[7] E. Hewitt, *A remark on density characters*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), стр. 641-643.
[8] E. S. Pondiczery, *Power problems in abstract spaces*, Duke Math. J. 11 (1944), стр. 835-837.
[9] Б. Ефимов, *О диадических бикомпактах*, Докл. АН СССР 149 (1963), стр. 1011-1014.
[10] W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. 33 (1945), стр. 299-302.
[11] А. С. Есенин-Вольпин, *О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах*, Докл. АН СССР 68 (1949).
[12] Б. Ефимов, *О диадических пространствах*, Докл. АН СССР 151 (1963), стр. 1021-1024.
[13] Wang Shu-tang, *Remarks on ω_μ-additive spaces*, Fund. Math. 55 (1964), pp. стр. 101-112.
[14] R. Sikorski, *Remarks on some topological spaces of high power*, Fund. Math. 37 (1950), стр. 125-136.
[15] M. Bockstein, *Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques*, Fund. Math. 35 (1948), стр. 242-246.
[16] I. R. Isbell, *Uniform spaces*, Providence 1964, стр. 130-132.
[17] А. Мищенко, *О равномерно замкнутых отображениях*, Fund. Math. этот том, стр. 285-308.
[18] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Warszawa, 1934.

Reçu par la Rédaction le 11. 1. 1965

О равномерно замкнутых отображениях

А. Мищенко (Москва)

Статья посвящена изучению веса равномерных пространств, являющихся образами произведений пространств. Как известно, диадический бикомпакт с первой аксиомой счётности метризуем ([4]), т. е. если образ произведения метрических бикомпактов удовлетворяет первой аксиоме счётности, то он метризуем. Возникает задача расширить класс пространств, для которых выполняются теоремы аналогичного содержания. Можно доказать, что если образ произведения бикомпактов метризуем, то отображение можно разложить в композицию проекции на счётную грань и отображения этой грани на образ. Поэтому естественно задачу разбить на две части: 1) исследовать условия, достаточные для существования такого разложения отображения, и 2) найти такие классы отображений, при которых вес образа не превосходит веса прообраза. Первая задача решается в [6]. Второй задаче посвящена настоящая статья. Именно, изучается класс отображений равномерных пространств, называемых здесь *равномерно замкнутыми отображениями*, причём, эти отображения не повышают равномерного веса образа. Этот класс достаточно широк, так что все непрерывные отображения бикомпактов, все открытые гомоморфизмы топологических групп и проекции произведений на их сомножители входят в этот класс. Итак, основной результат заключается в том, что, если равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, то необходимым и достаточным условием неравенства вес $Y \leqslant \mathfrak{n}$, где Y — образ пространства $\prod_{a\in A} X_a$ при равномерно замкнутом отображении, локальный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$, является наличие калибра $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ у всех пространств $\prod_{a\in B} X_a$, $|B| < \aleph_0$. Но это отнюдь не значит, что не существует у пространства Y другой равномерности, совместимой с топологией пространства Y, вес которой не превосходит $\mathfrak{n}$. Действительно, для более узкого класса отображений, которые названны *сильно равномерно замкнутыми отображениями*, можно отбросить условие существования калибров пространств $\prod_{a\in B} X_a$, а добавить условие существования изолированной точки в каждом пространстве X_a (1). Этот класс отображений продолжает включать в себя все открытые гомоморфизмы групп и проекции пря-

(1) На самом деле, можно отбросить и это условие.

мого произведения, а на бикомпактах в точности совпадают с открытыми отображениями.

Понятия и терминологию мы исползуем из [1], [2], [3]. Все отображения пространств являются отображениями „на“.

§ 1. Равномерные пространства. Определения равномерного пространства и пространства близости можно найти у Вейля [1] и Смирнова [2]. Мы будем также рассматривать неотделимые равномерности и близости, т. е. структуры, не удовлетворяющие аксиоме $\bigcap \mathfrak{U} = \Delta$ в случае равномерности или аксиоме: $x\delta y$ эквивалентно $x = y$ в случае близости. *Равномерным весом пространства* мы будем называть наименьшую мощность среди мощностей баз фильтра окружений диагонали квадрата равномерного пространства.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathfrak{m}$ — равномерный вес пространства X. Существует база топологии пространства X, представимая в виде объединения функционально дискретных множеств $\omega = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} \omega_\alpha$, причём, мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{m}$. Существует также база топологии пространства X, представимая в виде объединения $\omega = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} \omega_\alpha$, где ω_α — функционально локально конечные покрытия, а мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{m}$. Обратно, если у вполне регулярного топологического пространства X существует одна из указанных выше баз, то существует равномерность пространства X; совместимая с топологией X, причём равномерный вес не превосходит $\mathfrak{m}$*(²).

Доказательство по-существу находится в работе Мрувки [7].

Предложение 1.2. *Пусть в топологическом T_1-пространстве X существует семейство покрытий $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, удовлетворяющее следующему условию: для любого индекса α существует подмножество $B \ni \alpha$ множества A, по мощности не превосходящее $\aleph_0$, такое что для любого индекса $\gamma \in B$ и для любой точки x пространства X существует элемент σ покрытия ω_γ и существует индекс $\beta \in B$, причём выполняется условие: $\omega_\beta\big(\omega_\beta(x)\big) \subset \sigma$. Тогда существует равномерность пространства X, совместимая с топологией X, равномерный вес которой не превосходит мощности множества индексов A.*

Используя доказательство теоремы 1 в работе Архангельского [7] (стр. 14) доказываем, что во всякое покрытие ω_α можно звёздно вписать бесконечную последовательность покрытий.

Определение 1.1. Пусть f: $X \to Y$ — некоторое отображение множества X на множество Y. Пусть на множестве X заданы топология T, близость δ и равномерность $\mathfrak{U}$. Топология T_1 (соответственно, близость δ_1, равномерность $\mathfrak{U}_1$), заданная на множестве Y, называется *факторной*, если она является наибольшей среди всех таких топологий (близостей, равномерностей) множества Y, для которых отображение f будет непрерывным (близостно непрерывным, равномерно непрерывным). Обозначения: $T_1 = f(T)$, $\delta_1 = f(\delta)$, $\mathfrak{A}_1 = f(\mathfrak{A})$.

Введём ещё две функции: функция t, ставящая каждой близости или равномерности топологию, ими порождённую, функция d, ставящая каждой равномерности близость, ею порождённую. Ещё одна функция, τ: каждой близости δ пространства X и каждому отображению f множества X на множество Y ставит в соответствие следующую топологию множества Y: подмножество G множества Y открыто тогда и только тогда, когда прообраз любой точки множества G далёк от дополнения к прообразу множеству G.

Надо доказать корректность определения факторных структур, т. е. доказать, что для любой близости или равномерности множества X существует наибольшая близость или равномерность множества Y, для которой отображение f близостно непрерывно или равномерно непрерывно.

Предложение 1.3. *Пусть на множестве X заданы две равномерных структуры: $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$. Существует наименьшая равномерная структура $\mathfrak{W}$ среди всех равномерных структур, которые сильнее как структуры $\mathfrak{U}$, так и структуры $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех попарных пересечений окружений из обеих структур: $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$. Докажем, что это множество образует фильтр окружений некоторой равномерной структуры. Нужно проверить аксиому: для любого окружения равномерности $\mathfrak{W}$, т. е. для любого множества вида $U \cap V$, $U \in \mathfrak{U}$, $V \in \mathfrak{B}$, существует окружение равномерности $\mathfrak{W}$, т. е. множество вида $U_1 \cap V_1$, $U_1 \in \mathfrak{U}$, $V_1 \in \mathfrak{B}$, вейлевский квадрат которого содержится в исходном окружении, т. е. $(U_1 \cap V_1) \circ (U_1 \cap V_1) \subset \subset U \cap V$. Пусть U_1 и V_1 удовлетворяют условию: $U_1^2 \subset U$, $V_1^2 \subset V$. Легко видеть, что $(U_1 \cap V_1)^2 \subset U_1^2 \cap V_1^2$. Ясно, что равномерность является наименьшей среде всех равномерностей, которые сильнее равномерностей $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$.

Предложение 1.4. *Пусть f: $X \to Y$ — некоторое отображение множества X на множество Y, и в множестве X задана некоторая равномерность $\mathfrak{U}$. Тогда среди всех равномерностей множества Y, для которых отображение f равномерно непрерывно, существует наибольшая равномерность* (*вообще говоря, неотделимая*).

Доказательство. По крайней мере, одна такая равномерность, для которой отображение является равномерно неперерывным, существует. Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех таких равномерностей, $\mathcal{U} = \{\mathfrak{U}_\alpha\}$. Положим $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$. Из предложения 1.3 вытекает, что семейство $\mathcal{U}$ направлено как упорядоченное множество. Множество $\mathfrak{B}$ является равномерностью,

(²) Система множеств $\{O_\alpha\}$ называется *функционально дискретной (локально-конечной)*, если существуют функции f_α, такие что $f_\alpha(x) = 1$, если $x \in O_\alpha$, а система множеств $\{y\colon f_\alpha(y) > 0\}$ является дискретной (локально-конечной), причём для любого $x \in X$ и α $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant 1$.

которая сильнее любой равномерности из семейства $\mathfrak{U}_\alpha$, а отображение f равномерно непрерывно для равномерности $\mathfrak{V}$.

Предложение 1.5. *Пусть δ_1 и δ_2 — две близости пространства X. Существует наименьшая близость δ среди близостей, которые сильнее близостей δ_1 и δ_2.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ — наименьшие равномерности, соответствующие близостям δ_1 и δ_2. Пусть $\mathfrak{U}$ — наименьшая равномерность, которая сильнее равномерностей $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$. Ясно, что $d(\mathfrak{U}) \geqslant \delta_i$, $i=1,2$. Пусть теперь близость δ сильнее близостей δ_1 и δ_2, а $\mathfrak{U}_0$ — её наименьшая равномерность. Имеет место неравенство: $\mathfrak{U}_0 \geqslant \mathfrak{U}_i$. Значит, $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{U}_0$, т. е. $\delta = d(\mathfrak{U}_0) \geqslant d(\mathfrak{U})$.

Предложение 1.6. *Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение множества X на множество Y, а δ — некоторая близость множества X. Тогда на множестве Y существует наибольшая близость, для которой отображение f является близостно непрерывным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая равномерность близости δ. По предложению 1.4 существует наибольшая равномерность $\mathfrak{U}_1$ пространства Y, такая что отображение f является равномерно непрерывным. Тогда для близости $d(\mathfrak{U}_1)$ отображение f является близостно непрерывным. Пусть, теперь, δ_1 — некоторая близость, для которой отображение f является близостно непрерывным, а $\mathfrak{U}_2$ — её наименьшая равномерность. Тогда для равномерности $\mathfrak{U}_2$ отображение является равномерно непрерывным, и, значит, выполнено неравенство: $\mathfrak{U}_2 \leqslant \mathfrak{U}_1$. Следовательно, имеет место неравенство: $\delta_1 \leqslant d(\mathfrak{U}_1)$.

Предложение 1.7. *Пусть $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение множества X на множество Y, $\mathfrak{U}$ и δ — некоторые равномерность и близость множества X. Имеют место равенства: $f\big(d(\mathfrak{U})\big) = d\big(f(\mathfrak{U})\big)$, $f\big(r(\delta)\big) = r\big(f(\delta)\big)$, где $r(p)$ — минимальная равномерность близости P.*

Последнее равенство вытекает из того, что соответствия, отображающие равномерность в соответствующую ей близость, а близость — в соответствующую ей минимальную равномерность, являются функторными соответствиями.

Предложение 1.8. *При тех же предложениях имеет место неравенство: $t\big(f(\delta)\big) \leqslant \tau(f, \delta)$.*

В обратную сторону утверждение неверно, как показывает следующий пример. Множество X строится как подмножество произведения отрезка $[0,1]$ на отрезок $[-1,1]$. Отрезок $[0,1]$ можно представить в виде объединения счётного множества всюду плотных, несчётных и попарно непересекающихся подмножеств: $[0,1] = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} X_n$. Точка $(x, n) \in [0,1]\times[-1,1]$ принадлежит множеству X тогда и только тогда, когда существует такое целое число n, отличное от нуля, что $1/(n+1) \leqslant y \leqslant 1/n$, а $x \in X_n$. Близость в множестве берётся индуцированной пространством $[0,1]\times[-1,1]$. Множество Y есть отрезок $[0,1]$, отображение f индуцируется проекцией произведения $[0,1]\times[-1,1]$ на сомножитель $[0,1]$. Множество $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ обладает тем свойством, что множество $f^{-1}G$ является открытым, и, так как множества $f^{-1}y$ являются компактами, то $f^{-1}y \Subset f^{-1}G$ для любого $y \in G$, что означает открытость G. Тем не менее, множество G не является открытым в близости $f(\delta)$. В самом деле, если множество G является открытым, то для любой точки $y_1 \in X_1 \subset G$, должна существовать окрестность O такая что $O \in G$. Тогда прообраз этой окрестности $f^{-1}O$ далёк от дополнения к прообразу множества G, а для любой точки $z \in O$ имеет место $f^{-1}z \Subset f^{-1}O$. Значит $\{y_1\}\times[\frac{1}{2},1] \Subset f^{-1}O$. Существуют числа $y' < y_1 < y''$, для которых $X \cap (y', y'')\times[\frac{1}{2},1] \subset f^{-1}O$, следовательно, $X_2 \cap (y', y'')\times\times[\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \subset f^{-1}O$. Так как множество X_2 всюду плотно, то существует точка $y_2 \in X_2$, для которой $\{y_2\}\times[\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \subset f^{-1}O$. Далее построим точку y_3, для которой $\{y_3\}\times[\frac{1}{4},\frac{1}{3}] \subset f^{-1}O$, и так далее. Легко видеть, что множество $f^{-1}O$ близко к множеству $X\setminus f^{-1}G$.

В дальнейшем мы дадим достаточные условия для того, чтобы выполнялись равенства: $t\big(f(\delta)\big) = \tau(f, \delta)$, $r(f, \delta) = f\big(t(\delta)\big)$.

§ 2. Равномерно замкнутые отображения.

Обозначения. Пусть X и Y — равномерные пространства, $f\colon X \to Y$ — некоторое отображение. Отображение f индуцирует отображение квадратов $f\colon X\times X \to Y\times Y$, по правилу: $f(x_1, x_2) = \big(f(x_1), f(x_2)\big)$. Через Δ будем обозначать диагональ множества $Y\times Y$. Мы будем рассматривать многократные произведения двух множеств U и V, лежащих в множестве $X\times X$, типа $U\circ V\circ U\circ V\circ U\circ V\circ U$, так чтобы подряд не стояли одинаковые множества. Пусть $f\colon X\to Y$ — некоторое отображение равномерного пространства X на Y, U — некоторое окружение диагонали множества $X\times X$, а $f^{-1}\Delta$ — прообраз диагонали множества $Y\times Y$. Рассмотрим некоторое многократное произведение этих двух множеств: $\ldots\circ U\circ f^{-1}\Delta\circ U\circ f^{-1}\Delta\circ\ldots$ Определим ранг такого произведения как пару чисел (n, k), причём n — число, сколько раз встречается в произведении множество U, число k принимает значения -1, 0 и 1, причём $n+k$ есть число, сколько раз встречается в произведении множество $f^{-1}\Delta$. Если $k=0$, то ранг определяет многократное произведение с точностью до инверсии. Обозначим это произведение через $\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^n$ в случае $k\neq 0$. В случае же $k=0$ через $\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^n$ обозначим то произведение, которое начинается с U, т. е.

$$\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^n = \underbrace{U\circ f^{-1}\Delta\circ\ldots\circ U\circ f^{-1}\Delta}_{n \text{ раз}}.$$

Определение 2.1. Отображение f равномерно пространства X на равномерное пространство Y называется *(n,k)-замкнутым*, если для любого окружения U диагонали множества $X\times X$ существует окружение V диагонали множества $Y\times Y$, причём имеет место включение $f^{-1}V\subset\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^n$. Пара (n,k) называется *рангом замкнутости*. Отображение f называется *сильно равномерно замкнутым*, если ранг замкнутости равен $(1,0)$, соответственно, *равномерно замкнутым*, если ранг равен $(2,-1)$, *равномерно открытым*, если ранг равен $(1,1)$. Пусть для любого окружения U диагонали множества $X\times X$ существует семейство окружений V_α диагонали множества $Y\times Y$, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, причём для любой точки x пространства X существует окружение V_α из вышеуказанного семейства, для которого $f^{-1}V_\alpha[x]\subset\langle U_1 f^{-1}\Delta\rangle_k^n[x]$. Тогда отображение f называется *$\mathfrak{m}-(n,k)$-замкнутым*.

Аналогичные определения можно дать для случая пространств близости. Но для простоты мы ограничимся только тремя специальными случаями.

Определение 2.2. Пусть X и Y — пространства близости, f — некоторое отображение пространства X на пространство Y. Отображение f называется *сильно δ-замкнутым*, если для любых двух замкнутых множеств $A, B\subset X$ из условия $A\bar{\delta} f^{-1}fB$ вытекает: $fA\,\bar{\delta}\, fB$. Отображение f называется *δ-замкнутым*, если для любых двух замкнутых множеств $A, B\subset X$ из того, что существует такая δ-окрестность OB множества B, что $A\bar{\delta} f^{-1}fOB$, вытекает: $fA\,\bar{\delta}\, fB$. Отображение f называется δ-открытым, если для любых двух замкнутых множеств $A,B\subset X$ из условия $f^{-1}fA\Subset B$ вытекает: $fA\Subset fB$.

Предложение 2.1. *Пусть X — равномерное пространство. В $X\times X$ можно ввести тоже равномерность, соответствующую равномерности в пространстве X. Пусть A и B — два далёких множества, лежащих в пространстве $X\times X$. Существует откружение диагонали $U=U^{-1}$, такое что $A\cap U\circ B\circ U=\wedge$. Обратно, если $A\cap U\circ B\circ U=\wedge$, то $A\bar{\delta}B$.*

Доказательство. В пространстве $X\times X$ вводится естественная равномерность. Пусть U — окружение диагонали пространства $X\times X$. Положим $U\,\square\, U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon (x_1,x_3)\in U,\ (x_2,x_4)\in U\}$. Условие $A\,\bar{\delta}\, B$ эквивалентно тому, что существует такое окружение U диагонали пространства $X\times X$, что $A\times B\cap U\,\square\, U=\wedge$. Допустим теперь, что существует точка $(x^{\mathrm{I}},x^{\mathrm{II}})$, принадлежащая множеству $A\cap U\circ B\circ U$. Тогда существуют точки x^{III} и x^{IV}, удовлетворяющие условию: $(x^{\mathrm{I}},x^{\mathrm{III}})\in U$, $(x^{\mathrm{III}},x^{\mathrm{IV}})\in B$, $(x^{\mathrm{IV}},x^{\mathrm{II}})\in U$, $(x^{\mathrm{II}},x^{\mathrm{IV}})\in U^{-1}=U$. Тогда имеем: $(x^{\mathrm{I}},x^{\mathrm{II}},x^{\mathrm{III}},x^{\mathrm{IV}})\in A\times B$, $(x^{\mathrm{I}},x^{\mathrm{II}},x^{\mathrm{III}},x^{\mathrm{IV}})\in U\,\square\, U$. Допустим, далее, что существуют четыре точки x_1,x_2,x_3 и x_4, для которых имеет место $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in A\times B\cap U\circ U$. Это значит, что $(x_1,x_2)\in A$, $(x_3,x_4)\in B$, $(x_1,x_3)\in U$, $(x_2,x_4)\in U$, $(x_4,x_2)\in U^{-1}=U$. Следовательно, $(x_1,x_2)=(x_1,x_3)\circ(x_3,x_4)\circ(x_4,x_2)\in U\circ B\circ U$.

Предложение 2.2. *Для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ имеет место: $(X\times X\setminus U)\,\bar{\delta}\,\Delta$.*

Предложение 2.3. *Если отображение $f\colon X\to Y$ равномерно непрерывно, то отображение $f\colon X\times X\to Y\times Y$ тоже равномерно непрерывно.*

Предложение 2.4. *Отображение $f\colon X\to Y$ равномерно замкнуто тогда и только тогда, когда для любого множества M, далёкого от прообраза диагонали пространства $Y\times Y$, существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, причём $f^{-1}V\,\bar{\delta}\, M$.*

Предложение 2.5. *Пусть отображение $f\colon X\to Y$ равномерно непрерывно и сильно равномерно замкнуто. Тогда для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует такое окружение U_1, что $U_1\subset U$ и $U_1\circ f^{-1}\Delta\subset f^{-1}\Delta\circ U$.*

Доказательство. Существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, такое что $f^{-1}V\subset U^{-1}\circ f^{-1}\Delta$. Можно считать, что $V=V^{-1}$. Так как $V\ni\Delta$, то $f^{-1}V\ni f^{-1}\Delta$; следовательно по предложению 2.1, существует такое окружение U_1 диагонали пространства $X\times X$, что $U_1\circ f^{-1}\Delta\subset U_1\circ f^{-1}\Delta\circ U_1\subset f^{-1}V$. Тогда имеем: $U_1\circ f^{-1}\Delta\subset f^{-1}V\subset f^{-1}\Delta\circ U$.

Предложение 2.6. *Отображение $f\colon X\to Y$ сильно равномерно замкнуто тогда и только тогда, когда для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, такое что для любой точки $y\in Y$ имеет место: $f^{-1}V[y]\subset U[f^{-1}y]$.*

Для доказательства нужно доказать эквивалентность включений: для любой точки $y\in Y$ $f^{-1}V[y]\subset U[f^{-1}y]$ и $f^{-1}V\subset U\circ f^{-1}\Delta$.

Предложение 2.7. *Отображение $f\colon X\times Y$ равномерно замкнуто тогда и только тогда, когда для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, такой что для любой точки $x\in X$ имеет место: $f^{-1}V[fx]\subset U\big[f^{-1}fU[x]\big]$.*

Доказательство аналогичное. Подобным же образом можно перефразировать на язык покрытий общее определение (n,k)-замкнутого отображения. Далее укажем на связь с δ-замкнутыми отображениями.

Предложение 2.8. *Если отображение $f\colon X\times Y$ сильно равномерно замкнутое, то оно является сильно δ-замкнутым в индуцированной близости.*

Доказательство. Пусть множества A и B таковы, что $A\bar{\delta}f^{-1}fB$. Существует окружение U диагонали пространства $X\times X$, такое что $U[f^{-1}fB]\cap A=\wedge$. Для окружения U существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, такое что для любой точки $x\in X$ имеет место $f^{-1}V[fx]\subset U[f^{-1}fx]$. Значит, $f^{-1}V[fB]\subset U[f^{-1}fB]$, т. е. $f^{-1}V[fB]\cap A=\wedge$, или $V[fB]\cap fA=\wedge$. Следовательно, $fB\,\bar{\delta}\, fA$.

Предложение 2.9. *Пусть отображение $f\colon X\to Y$ является сильно δ-замкнутым. Тогда отображение является сильно равномерно замкнутым в минимальной равномерности, совместимой с данной близостью.*

Доказательство. Пусть ω — конечное δ-покрытие, $\omega=\{\sigma^n\}_{n=1}^{s}$, а τ^n — такие множества, что $\tau^n\Subset\sigma^n$, $U\tau^n=X$, т. е. семейство $\omega_1=\{\tau^n\}$ является покрытием. Рассмотрим теперь множество $B_y = X \setminus \bigcup \{\sigma^n\colon \sigma^n \cap f^{-1}y = \wedge\}$. Для любого подмножества γ множества целых чисел от 1 до s положим:

$$Y_\gamma = \{y\colon B_y = X \setminus \bigcup_{n\in\gamma} \sigma^n\}, \qquad B_\gamma = X \setminus \bigcup_{n\in\gamma} \sigma^n, \qquad A_\gamma = X \setminus \bigcup_{n\in\gamma} \tau^n.$$

Имеет место включение $f^{-1}Y_\gamma \subset B_\gamma \Subset A_\gamma$. В силу сильной δ-замкнутости отображения f существует множество C_γ, для которого имеет место: $Y_\gamma \Subset C_\gamma$, $f^{-1}Y_\gamma \Subset f^{-1}C_\gamma \subset A_\gamma$. Так как всех подмножеств множества целых чисел от 1 до s конечное число, то существует конечное равномерное покрытие пространства Y, обозначенное через Ω, для которого имеет место: $\Omega[Y_\gamma] \subset C_\gamma$. Следовательно, $(f^{-1}\Omega)[f^{-1}y] \subset \omega(f^{-1}y)$.

Предложение 2.10. *Всякое равномерно замкнутое отображение является δ-замкнутым отображением.*

Предложение 2.11. *Если отображение $f\colon X \to Y$ δ-замкнуто, то оно является равномерно замкнутым в минимальной равномерности, совместимой с данной близостью.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.9.

Предложение 2.12. *Всякое равномерно открытое отображение является δ-открытым. Всякое δ-открытое отображение является равномерно открытым отображением в минимальной равномерности, совместимой с данной близостью.*

§ 3. Равномерная замкнутость и топологические свойства отображений.

Предложение 3.1. *Всякое топологически замкнутое отображение на нормальное пространство является δ-замкнутым в максимальной близости, совместимой с данной топологией.*

Доказательство. Пусть A и B — некоторые множества, и существует окрестность $O[A]$ замыкания множества A, причём $[B] \cap [f^{-1}fO[A] = \wedge$. В силу топологической замкнутости имеем: $f[A] \cap f[B] = \wedge$ или $[f(A)] \cap [f(B)] = \wedge$, т. е. $f(A)\bar{\delta} f(B)$.

Предложение 3.2. *Всякое сильно δ-замкнутое в максимальной близости, совместимой с данной топологией, отображение нормального пространства является топологически замкнутым отображением.*

Предложение 3.3. *Всякое непрерывное и δ-замкнутое в максимальной близости отображение является факторным* (3), *если факторная топология регулярна.*

Предложение 3.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — сильно δ-замкнутое отображение, где X и Y некоторые пространства близости. Тогда отображение является топологически открытым.*

(3) Отображение $f\colon X \to Y$ называется *факторным*, если топология на Y факторная.

Доказательство. Пусть G открытое множество, x — точка из этого множества. Точка x далека от множества $F = X \setminus f^{-1}fG$, значит, $f(x)\bar{\delta} fF$, т. е. $fx \Subset fG$.

Предложение 3.5. *Если отображение f является открытым и замкнутым, то оно является сильно δ-замкнутым в максимальной близости, если образ является нормальным пространством.*

Приведём пример δ-замкнутого отображения нормального пространства на нормальное пространство, которое не является замкнутым отображением. Множество X есть дискретная сумма отрезка $[1, \omega_1]$ и полуинтервала $[1, \omega_1)$. Множество Y есть отрезок $[1, \omega_1]$, а отображение заключается в проекции полуинтервала $[1, \omega_1)$ на отрезок $[1, \omega_1]$. Близость в каждом пространстве единственна. Нетрудно проверить, что отображение является δ-замкнутым, но не является замкнутым.

Предложение 3.6. *Всякое топологически замкнутое отображение является δ-открытым в максимальной близости, если нормален образ отображения.*

Предложение 3.7. *Если отображение $f\colon X \to Y$ является топологически открытым, то оно является δ-открытым в максимальной близости, совместимой с данной топологией, если нормален образ отображения.*

Предложение 3.8. *Для любого δ-открытого отображения $f\colon X \to Y$ пространства близости X на пространство близости Y имеет место равенство: $tf(\delta) = \tau(f, \delta)$.*

Доказательство. Пусть множество G удовлетворяет условию: для любой точки y из множества G имеет место $f^{-1}y \Subset f^{-1}G$. В силу δ-открытости имеем: $y = f^{-1}fy \Subset f^{-1}fG = G$.

Предложение 3.9. *Всякое δ-открытое в максимальной близости отображение является топологически факторным.*

Доказательство. Для максимальной близости имеет место равенство $\tau(f, \delta) = f(t(\delta))$.

Приведём пример отображения, являющегося равномерно открытым, но $\tau(f, \delta) \neq f(t(\delta))$. В качестве пространства X возьмём плоскость в её естественной равномерности. Выберем на плоскости прямую линию. Это будет элемент разбиения. Все остальные точки будут одноточечными элементами разбиениями. В образе возьмём факторную равномерность. Легко видеть, что это отображение является равномерно открытым, а $\tau(f, \delta) \neq f(t(\delta))$.

Предложение 3.10. *Всякое (m, k)-замкнутое отображение равномерного пространства X на равномерное пространство Y является равномерно факторным отображением.*

Доказательство. Пусть V — окружение диагонали пространства $Y \times Y$ в факторной равномерности. Существует последовательность окружений V_n той же факторной равномерности, удовлетворяющие условиям $V_n^2 \subset V_{n-1} \subset V$. Имеем: $f^{-1}V_n \supset f^{-1}\Delta$. Существует окружение U диагонали пространства

$X\times X$, для которого $U\circ f^{-1}\Delta\circ U\subset f^{-1}V_m$. Тогда существует окружение V_1^* диагонали пространства $Y\times Y$, для которого $f^{-1}V_1^*\subset\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^m$. С другой стороны $\langle U, f^{-1}\Delta\rangle_k^m\subset f^{-1}V$, следовательно, $V_1^*\subset V$.

§ 4. Сильно равномерно замкнутые отображения.

Предложение 4.1. *Пусть отображение $f\colon X\to Y$ является равномерно непрерывным и сильно равномерно замкнутым отображением. Тогда равномерность пространства Y совпадает с равномерностью, индуцированной пространством замкнутых подмножеств ψX пространства X, если пространство Y рассматривать как подмножество пространства ψX.*

Доказательство. Пусть U — некоторое окружение диагонали пространства $X\times X$. Ему соответствует окружение $\mathfrak{U}$ диагонали пространства $\psi X\times\psi X$, определённое равенством: $\mathfrak{U}=\{(A, B)\colon A\subset U[B],\ B\subset U[A]\}$. Существует окружение V диагонали пространства $Y\times Y$, для которого $f^{-1}V\subset f^{-1}\Delta\circ U\cap U\circ f^{-1}\Delta$. Если точка (y_1, y_2) принадлежит окружению V, $(y_1, y_2)\in V$, то $y_1\in V[y_2]$. Значит, $f^{-1}y_1\subset U[f^{-1}y_2]$, $f^{-1}y_2\subset U[f^{-1}y_1]$, т. е. $(f^{-1}y_1, f^{-1}y_2)\in\mathfrak{U}$. Пусть теперь дано окружение V диагонали пространства $Y\times Y$. Имеем: $V\ni\Delta$, $f^{-1}V\ni f^{-1}\Delta$. Существует окружение U диагонали пространства $X\times X$, для которого $f^{-1}\Delta\circ U\subset f^{-1}V$, $U\circ f^{-1}\Delta\subset f^{-1}V$. Пусть для точки (y_1,y_2) имеет место $(f^{-1}y_1, f^{-1}y_2)\in\mathfrak{U}$. Это значит, что $f^{-1}y_1\subset U[f^{-1}y_2]$, $f^{-1}y_2\subset U[f^{-1}y_1]$. Пусть x_1 — некоторая точка прообраза $f^{-1}y_1$, существует такая точка $x_2\in f^{-1}y_2$, что $(x_1, x_2)\in U$. Следовательно, $(fx_1, fx_2)\in V$.

Предложение 4.2. *Пусть Y — разбиение пространства X на замкнутые множества. Введём на множестве Y равномерность, индуцированную пространством замкнутых подмножеств ψX. Тогда отображение $f\colon X\to Y$ является сильно равномерно замкнутым (вообще говоря, не равномерно непрерывным) отображением.*

Доказательство. Пусть дано некоторое окружение U диагонали пространства $X\times X$, а $\mathfrak{U}$ — порождённое этим окружением окружение диагонали пространства $\psi X\times\psi X$. Если точка (x_1, x_2) принадлежит множеству $f^{-1}\mathfrak{U}$, то $(fx_1, fx_2)\in\mathfrak{U}$. Это значит, что $f^{-1}fx_1\subset U[f^{-1}fx_2]$, $f^{-1}fx_2\subset U[f^{-1}fx_1]$. Для первого включения существует точка x_3, такая что $(x_1, x_3)\in U$, $(x_3, x_2)\in f^{-1}\Delta$, и, следовательно, $(x_1, x_2)\in U\circ f^{-1}\Delta$. Аналогично для второго включения.

Итак, нами доказана

Теорема 1. *Пусть $f\colon X\to Y$ — равномерно непрерывное отображение. Отображение f является сильно равномерно замкнутым тогда и только тогда, когда равномерность пространства Y совпадает с равномерностью, индуцированной пространством замкнутых множеств ψX пространства X.*

Предложение 4.3. *Обобщённая последовательность замкнутых множеств F_a является фундаментальной тогда и только тогда, когда для любого окружения U существует индекс a_0, такой что для любых двух индексов a и β, больших индекса a_0, имеет место $F_a\times F_\beta\subset U\circ F_\beta\times F_\beta$.*

Для доказательства нужно проверить эквивалентность включений $F_a\subset U[F_\beta]$ и $F_a\times F_\beta\subset U\circ F_\beta\times F_\beta$.

Предложение 4.4. *Обобщённая последовательность замкнутых множеств F_a сходится к множеству F в равномерности пространства замкнутых множеств ψX тогда и только тогда, когда для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует такой индекс a_0, что для любого индекса a, большего индекса a_0, имеют место включения: $F\times F_a\subset U\circ F_a\times F_a$, $F_a\times F\subset U\circ F\times F$.*

Теорема 2. *Пусть отображение $f\colon X\to Y$ является равномерно непрерывным и сильно равномерно замкнутым отображением. Если пространство X ультраполно, то и пространство Y является ультраполным.*

Доказательство. Пусть обобщённая последовательность замкнутых множеств F_a пространства Y является фундаментальной. Это значит, что для любого окружения V диагонали пространства $Y\times Y$ существует такой индекс a_0, что для любых индексов a, β, больших a_0, имеет место $F_a\times F_\beta\subset V\circ F_\beta\times F_\beta$. Пусть задано окружение U диагонали пространства $X\times X$. Существует окружение V пространства $Y\times Y$, для которого $f^{-1}V\subset U\circ f^{-1}\Delta$, $f^{-1}V\subset f^{-1}\Delta\circ U$, а для него вышеуказанный индекс a_0. Значит для любых индексов a и β, больших a_0, имеет место включение: $f^{-1}F_a\times f^{-1}F_\beta\subset f^{-1}V\circ f^{-1}F_\beta\times f^{-1}F_\beta\subset U\circ f^{-1}F_\beta\times f^{-1}F_\beta$. Следовательно, последовательность $f^{-1}F_\beta$ является фундаментальной. Так как пространство X является ультраполным, то существует замкнутое множество Φ, к которому сходится последовательность $f^{-1}F_\beta$. Тогда для любого окружения V диагонали пространства $Y\times Y$ прообраз $f^{-1}V$ является окружением диагонали пространства $X\times X$, значит, существует такой индекс a_0, что для любого индекса a, большего a_0, выполняются включения: $f^{-1}F_a\times\Phi\subset f^{-1}V\circ\Phi\times\Phi$, $\Phi\times f^{-1}F_a\subset f^{-1}V\circ f^{-1}F_a\times f^{-1}F_a$. Легко проверить, что отсюда вытекают следующие включения: $F_a\times f\Phi\subset V\circ f\Phi\times f\Phi$, $f\Phi\times F_a\subset V\circ F_a\times F_a$. Значит последовательность F_a сходится к множеству $f\Phi$.

Приведём пример равномерно открытого и равномерно замкнутого отображения полного метрического пространства на неполное метрическое пространство. В качестве пространства X возьмём множество всех точек плоскости, имеющих координаты $(n, 1/2^k)$, где n — любое натуральное число, а k — целое число, не большее числа n. Равномерность возьмём индуцированную равномерностью плоскости. В качестве отображения f возьмём отображение, индуцированное проекцией плоскости на второе слагаемое, т. е. каждой точке $(n, 1/2^k)$ ставится в соответствие число $1/2^k$. Легко проверить, что отображение f является равномерно открытым и равномерно замкнутым, но не является сильно равномерно замкнутым.

Предложение 4.5. *Пусть отображение f: $X\to Y$ является равномерно непрерывным и сильно равномерно замкнутым, а пространство Y и прообраз каждой точки y пространства Y являются полными пространствами. Тогда пространство X является полным пространством.*

Доказательство. Пусть последовательность точек x_a пространства X является фундаментальной. Тогда последовательность точек fx_a пространства Y является фундаментальной и, значит, сходится к некоторой точке y. Это значит, что для любого окружения V диагонали пространства $Y\times Y$ существует такой индекс a_0, что для любого индекса a, большего a_0, $(fx_a, y)\in V$ или $(f^{-1}fx_a\times f^{-1}y)\subset f^{-1}V$. Так как отображение f является сильно равномерно непрерывным, то для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует такой индекс $a_0(U)$, что для любого индекса a, большего a_0, имеет место: $f^{-1}fx_a\times f^{-1}y\subset U\circ f^{-1}\Delta$. Следовательно, имеет место и такое включение: $x_a\times f^{-1}y\subset U\circ f^{-1}\Delta$. Это значит, что существует точка $x'_a\in f^{-1}y$, для которой $(x_a, x'_a)\in U$. Итак, для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует такой индекс $a_0(U)$, что для любого индекса a, большего a_0, существует такая точка $x^a_{1,U} f \in^{-1} y$, что $(x_a, y'_{a,U})\in U$. Последовательность $x'_{a,V}$ является фундаментальной и, следовательно сходится к некоторой точке $x_0\in f^{-1}y$. Легко проверить, что и последовательность x_a сходится к этой же точке a_0.

§ 5. Поведение равномерного веса при замкнутых отображениях.

Предложение 5.1. *Пусть отображение f: $X\to Y$ является (n, k)-замкнутым. Тогда равномерной вес пространства Y не превосходит равномерного веса пространства X.*

Доказательство. Пусть $\{U_a\}$ — база фильтра окружений диагонали пространства $X\times X$. Для каждого окружения U_a из этой базы существует окружение V_a диагонали пространства $Y\times Y$, для которого выполняется включение: $f^{-1}V_a\subset\langle U_a, f^{-1}\Delta\rangle^n_k$. Докажем, что множество окружений V_a образует базу фильтра окружений диагонали пространства $Y\times Y$. Пусть V — некоторое окружение диагонали пространства $Y\times Y$, а V_1 — такое окружение, что $V_1^n\subset V$. Прообраз окружения $f^{-1}V_1$ является окружением диагонали пространства $X\times X$. Значит, существует такое окружение U_a, что $U_a\subset f^{-1}V_1$. Имеем: $f^{-1}V_a\subset\langle U_a, f^{-1}\Delta\rangle^n_k\subset\langle f^{-1}V_1, f^{-1}\Delta\rangle^n_k$. Отсюда получаем: $V_a\subset V_1^n\subset V$.

Предложение 5.2. *Пусть отображение f: $X\to Y$ является $\mathfrak{m}-(n, k)$-замкнутым отображением. Тогда в пространстве Y существует равномерность, совместимая с данной топологией, равномерный вес которой не превосходит числа $\mathfrak{m}$ или равномерного веса пространства X.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 5.1 для каждого окружения U_a из базы фильтра окружений диагонали пространства $X\times X$ существует семейство окружений $\{V^\gamma_a\}_\gamma$ диагонали пространства $Y\times Y$, причём для любой точки x из пространства X найдётся такое окружение V^γ_a из вышеуказанного семейства, что выполняется включение: $f^{-1}V^\gamma_a[x]\subset\langle U_a, f^{-1}\Delta\rangle^n_k[x]$. Объединение всех семейств $\{V^\gamma_a\}$ порождает равномерность, совместимую с данной топологией пространства $Y\times Y$. Доказательство этого факта аналогично доказательству, приведённому для предложения 5.1.

Предложение 5.3. *Пусть отображение f равномерного пространства X на равномерное пространство Y удовлетворяет условию: для любого окружения U диагонали пространства $X\times X$ существует такая последовательность окружений U_n, что $U_1 = U$, а для любого номера n и любой точки y пространства Y существует номер m, для которого выполняется включение: $U_m[f^{-1}y]\subset X\setminus f^{-1}f(X\setminus U_n[f^{-1}y])$. Тогда на пространстве Y существует равномерность, совместимая с топологией пространства Y, равномерный вес которой не превосходит равномерного веса пространства X.*

Доказательство. Надо построить систему покрытий пространства Y, удовлетворяющую условиям предложения 1.2. Для любого окружения U диагонали пространства X через ${}^\omega U$ обозначим покрытие, состоящее из всех множеств вида $Y\setminus f(X\setminus U_n[f^{-1}y])$, точка y пробегает всё пространство Y. Покажем, что последовательность окружений U_n в условиях предложении 5.3 можно взять таким, что $U^2_{n-1}\subset U_n$. Обозначим условие, наложенное на последовательность окружений U_n, буквой (А). Итак, пусть нам дана последовательность окружений, удовлетворяющая условию (А). Сначала её преобразуем в такую последовательность U_n, что $U_{n+1}\subset U_n$. Для каждого окружения U_n существует такое окружение U^1_n, что $(U^1_n)^2\subset U_n$. Каждое окружение U^1_n обладает последовательностью U^k_n, которая тоже удовлетворяет условию (А). Положим $V_n=\bigcap_{i,j<n} U^i_j$. Тогда $V_1 = U^1_1$, $V_n\subset U^1_n$, $(V_n)^2\subset U_n$, $V_{n+1}\subset V_n$. Переобозначим множества V_n по новому: обозначим множество V_n через U^1_n. Последовательность U^1_n удовлетворяет условию (А), и $U^1_{n+1}\subset U_n$, $(U^1_n)^2\subset U_n$. Для этой последовательности построим последовательность U^2_n, тоже удовлетворяющую условию (А), и $U^2_{n+1}\subset U^2_n$, $(U^2_n)^2\subset U^1_n$, и так далее, построим последовательность U^k_n, $U^k_{n+1}\subset U^k_n$, $(U^k_n)^2\subset U^{k-1}_n$. Положим $V_n=\bigcap_{i,j\leqslant n} U^i_j$. Это искомая последовательность. Итак $U_n\supset(U_{n+1})^2$. Для данного окружения U_n и данной точки $y\in Y$ существует номер m, для которого $U_m[f^{-1}y]\subset X\setminus f^{-1}f(X\setminus U_n[f^{-1}y])$. Тогда номер $m+2$ удовлетворяет условию предложения 1.2.

Следствие. *Образ метрического пространства при замкнутом бикомпактном отображении метризуем* (см. [9], [10]).

Определение 5.1. Пусть f: $X\to Y$ — некоторое отображение равномерного пространства X на пространство Y, а U — некоторое окружение диагонали пространства $X\times X$. Будем говорить, что отображение f не зависит от окружения U, если $f^{-1}f(U\cap V)=f^{-1}fV$ для любого окружения V.

Будем говорить, что отображение f не зависит от окружения U в точке $y \in Y$, если $(U \cap V)[f^{-1}y] = V[f^{-1}y]$ для любого окружения V.

Семейство окружений $\{U_a\}$ называется псевдобазой, если семейство всевозможных конечных пересечений элементов исходного семейства образует базу фильтра окружений диагонали пространства $X \times X$.

Предложение 5.4. *Пусть отображение $f: X \to Y$ является (n, k)-замкнутым, а семейство $\{U_a\}_{a \in A}$ является псевдобазой фильтра окружений диагонали пространства $X \times X$. Пусть, далее, существует подмножество B множества A, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, причём отображение не зависит от окружения U_a для любого индекса $a \notin B$. Тогда равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Пусть γ — конечное множество индексов из множества A. Через U_γ обозначим пересечение $\bigcap_{a \in \gamma} U_a$. Для любого конечного множества индексов $\gamma \subset B$ существует окружение V_γ диагонали пространства $Y \times Y$, для которого выполнено включение: $f^{-1}V_\gamma \subset \langle U_\gamma, f^{-1}\Delta\rangle_k^n$. Пусть теперь V — некоторое окружение диагонали пространства $Y \times Y$, V_1 — другое окружение $V_1^n \subset V$. Существует конечное подмножество γ множества A, для которого $U_\gamma \subset f^{-1}V_1$, а, значит, $f^{-1}fU_\gamma \subset f^{-1}V_1$. Следовательно, множество γ можно взять лежащим в множестве B, но чтобы включение $f^{-1}fU_\gamma \subset f^{-1}V_1$ продолжало выполняться. Итак, $f^{-1}\Delta \circ U_\gamma \circ f^{-1}\Delta \subset f^{-1}V_1$, $\langle U_\gamma, f^{-1}\Delta\rangle_k^n \subset (f^{-1}V_1)^n \subset f^{-1}V$. Тогда $V_\gamma \subset V$.

Теорема 3. *Пусть отображение $f: X \to Y$ является $(1, k)$-замкнутым, а $\{U_a\}_{a \in A}$ — некоторая псевдобаза фильтра окружений диагонали пространства $X \times X$. Пусть, далее, дана система функционально локально конечных покрытий $\{\omega_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ пространства Y, мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{m}$, а $\varphi_\gamma: \omega_\gamma \to A$ — некоторые функции, для которых выполнено условие: для любой точки y пространства Y отображение f не зависит в точке y от всякого такого окружения, которое отлично от окружений вида $U_{\varphi_\gamma(\sigma)}$, где индекс γ пробегает множество Γ, а элемент σ содержит точку y. При выполнении всех указанных условий на множестве Y существует такая равномерность, совместимая с данной на пространстве топологией, равномерный вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Построим систему мощности $\mathfrak{m}$ функционально локально конечных покрытий пространства Y, объединение которой образует топологическую базу пространства Y. Если B — конечное подмножество множества A, то через U_B обозначим $\bigcap_{a \in B} U_a$. Если Γ_1 — конечное подмножество множества Γ, то через ω_{Γ_1} обозначим $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma_1} \omega_\gamma$. Естественно определяется функция φ_{Γ_1}, отображающая покрытие ω_{Γ_1} в множество всех конечных подмножеств множества A, а именно, $\varphi_{\Gamma_1}(\sigma_{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge \sigma_{\gamma_k}) = \{\varphi_{\gamma_1}(\sigma_{\gamma_1}), \ldots, \varphi_{\gamma_k}(\sigma_{\gamma_k})\}$. Зафиксируем некоторое покрытие ω_{Γ_1}. Возьмём произвольный элемент σ покрытия ω_{Γ_1}. Пусть $B = \varphi_{\Gamma_1}(\sigma)$. Для окружения U_B существует такое окружение V_B диагонали пространства $Y \times Y$, что $f^{-1}V_B \subset \langle U_B, f^{-1}\Delta\rangle_k^1$. Семейство множеств $\{V_B[y]: y \in \sigma\}$ образует покрытие множества σ, причём существует функционально локально конечное в X измелчение $\Omega_{\Gamma_1}^\sigma$ покрывающее σ. Тогда объединение $\bigcup_{\sigma \in \omega_{\Gamma_1}} \Omega_{\Gamma_1}^\sigma$ образует функционально локально конечное покрытие пространства Y. Покажем, что объединение всех таких покрытий, когда Γ_1 пробегает множество всех конечных подмножеств множества Γ, образует базу. Пусть точка y принадлежит открытому множеству $G \subset Y$. Существует окружение V диагонали пространства $Y \times Y$, для которого $V[y] \subset G$. Далее, существует окружение U_B диагонали пространства $X \times X$, лежащее в прообразе окружения $f^{-1}V$, и, значит, $f^{-1}fU_B[f^{-1}y] \subset f^{-1}V[y]$. Можно считать, что конечное множество B состоит только из тех индексов a, для которых отображение f зависит в точке y от окружения U_a. Это значит, что существует конечное подмножество Γ_1 множества Γ и элемент покрытия ω_{Γ_1}, для которого $\varphi_{\Gamma_1}(\sigma) = B$. Имеем: $f^{-1}V_B \subset \langle U_B, f^{-1}\Delta\rangle_k^1$, $V_B \subset fU_B$, $fU_B[y] \subset V[y]$, $V_B[y] \subset V[y]$, $V_B[y] \subset G$.

§ 6. Оценка веса при равномерно замкнутых отображениях. Мы дадим несколько следствий, вытекающих из свойств равномерно замкнутых отображений и результатов [6]. Там же находится определение калибра $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$. Все отображения предполагаются равномерно непрерывными.

Теорема 4. *Пусть X_a — такие равномерные пространства, что равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, а пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является топологическим калибром всех конечных произведений пространств X_a. Пусть, далее, отображение $f: \prod_{a \in A} X_a \to Y$ является (n, k)-замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{n}$. Тогда равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. В силу следствия теоремы 3 [6] существует такое подмножество B множества A, что мощность его не превосходит $\mathfrak{m}$, и существует такое отображение $g: \prod_{a \in B} X_a \to Y$, что $f = g \circ \pi_B$. Равномерный вес пространства $\prod_{a \in B} X_a$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда в силу предложения 5.1 равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.

Следствие. *Пусть X_a — такие равномерные пространства, что равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, а пара $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ является топологическим калибром пространств X_a. Пусть, далее, отображение $f: \prod_a X_a \to Y$ является (n, k)-замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Теорема 5. *Пусть X_a — такие равномерные пространства, что равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, а пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является топологическим калибром всех конечных произведений пространств X_a. Пусть, далее,* *отображение* $f\colon \prod X_a \to Y$ *является* $\mathfrak{m}-(n,k)$-*замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства* Y *не превосходит* $\mathfrak{n}$. *Тогда существует равномерность пространства* Y, *совместимая с топологией пространства* Y, *причём равномерный вес этой равномерности не превосходит* $\mathfrak{m}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2, только вместо предложения 5.1 надо применить предложение 5.2.

Следствие. *Пусть* X_a — *такие равномерные пространства, что равномерный вес пространств* X_a *не превосходит* $\mathfrak{m}$, *а пара* $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ *является топологическим калибром пространств* X_a. *Пусть, далее, отображение* $f\colon \prod_a X_a \to Y$ *является* $\mathfrak{m}-(n,k)$-*замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства* Y *не превосходит* $\mathfrak{m}$. *Тогда существует равномерность пространства* Y, *совместимая с топологией пространства* Y, *причём равномерный вес этой равномерности не превосходит* $\mathfrak{m}$.

Теорема 6. *Пусть* X_a — *такие равномерные пространства, что равномерный вес пространств* X_a *не превосходит* $\mathfrak{m}$, *а пара* $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$ *является топологическим калибром всех конечных произведений пространств* X_a. *Пусть, далее, отображение* $f\colon \prod_a X_a \to Y$ *удовлетворяет условиям предложения* 5.3, *а локальный псевдовес пространства* Y *не превосходит* $\mathfrak{n}$. *Тогда существует равномерность пространства* Y, *совместимая с топологией пространства* Y, *причём равномерный вес этой равномерности не превосходит* $\mathfrak{m}$.

Следствие. *Если* $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$, *то для выполнения утверждения теоремы достаточно требовать, чтобы пара* $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$ *являлась топологическим калибром каждого пространства* X_a.

Из вышеуказанных теорем вытекают следующие утверждения: *диадический бикомпакт с первой аксиомой счётности метризуем*; если пространство с первой аксиомой счётности является образом произведения пространств со счётной базой при замкнутом отображении, то это пространство имеет счётную базу и, следовательно, метризуемо. Для последнего утверждения надо ещё применить результаты работы [9] (теорема 1).

Формулировка теоремы 4 является окончательной, ибо существует отображение f произведения $X_{a_0}\times\prod_a X_a$, где все X_a — дискретные двоеточия, а X_{a_0} — несчётное дискретное, на некоторое пространство Y с первой аксиомой счётности, причём это отображение является сильно равномерно замкнутым и не представляется в виде композиции проекции на грань и некоторого отображения этой грани на пространство Y (конструкцию отображения см. в [6]). Следовательно, пространство Y неметризуемо, так как имеет место следующее

Предложение 6.1. *Пусть отображение* $f\colon \prod_{a\in A} X_a \to Y$ *является равномерно непрерывным, а равномерный вес пространства* Y *не превосходит* $\mathfrak{m}$. *Тогда существует подмножество* B *множества* A, *мощность которого не превосходит* $\mathfrak{m}$, *и существует отображение* g *пространства* $\prod_{a\in B} X_a$ *на пространство* Y, *причём* $f = g\circ \Pi^B_A$.

Доказательство. Пусть семейство окружений $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ пространства Y является базой, а мощность множества Γ не превосходит $\mathfrak{m}$. Так как отображение равномерно непрерывно, то прообразы $f^{-1}V_\gamma$ являются окружениями диагонали пространства $\prod_{a\in A} X_a$; тогда существует окружение диагонали пространства $\prod_a X_a$ вида $V_{a_{1,\gamma}}\square\ldots\square V_{a_{s,\gamma}}\square\prod(X_a\times X_a)$, лежащее в окружении $f^{-1}V_\gamma$. Через B обозначим множество всех индексов $a_{i,\gamma}$, $\gamma\in\Gamma$. Пусть индекс a не принадлежит множеству B, а ξ и η — такие две точки пространства $\prod_{a\in A} X_a$, что для любого индекса β, отличного от a, имеет место: $\xi(\beta)=\eta(\beta)$. Если бы $f(\xi)\neq f(\eta)$, то существовал бы индекс $\gamma\in\Gamma$, для которого $\big(f(\xi), f(\eta)\big)\notin V_\gamma$, значит для некоторого индекса $a^i_\gamma\in B$ имеет место: $\big(\xi(a^i_\gamma), \eta(a^i_\gamma)\big)\notin V_{a_{i,\gamma}}$ что противоречит условию выбора точек ξ и η. Следовательно, $f(\xi)=f(\eta)$, т. е. отображение f не зависит от индекса a в каждой точке ξ пространства $\prod_a X_a$. Далее применяем предложение 3.3 [6].

§ 7. Разложение сильно равномерно замкнутых отображений.

Предложение 7.1. *Пусть равномерные пространства* X_a *имеют по изолированной точке* x_a, *а отображение* $f\colon \prod_a X_a \to Y$ *является сильно равномерно замкнутым и равномерно непрерывным отображением. Тогда* $Z_a \Subset Z_a$, *где* Z_a — *множество всех таких точек* $\xi\in\prod X_a$, *в которых отображение* f *не зависит от индекса* a.

Доказательство. Допустим противное, существует множество $\{\xi_\gamma\}$, близкое к множеству Z_a и не пересекающееся с последним. Построим для каждой точки ξ_γ другую точку следующим образом: $\eta_\gamma(\beta)=\xi_\gamma(\beta)$ для любого индекса $\beta\neq a$, $\eta_\gamma(a)=x_a$. Множество $\{\eta_\gamma\}$ близко к множеству Z_a, так как Z_a совпадает с множеством $(\pi^A_{A-a})^{-1}\pi^A_{A-a}Z_a$. Поскольку точка η_γ не принадлежит множеству Z_a, то существует такая точка ζ_γ, что $\eta_\gamma(\beta)= =\zeta_\gamma(\beta)$ для любого индекса β, отличного от a, а $f(\eta_\gamma)\neq f(\zeta_\gamma)$. Тогда множества $\{\zeta_\gamma\}$ и $\{\eta_\gamma\}$ далеки, так как x_a — изолированная точка. Легко видеть, что для любого окружения V диагонали пространства Y существует такой индекс γ что $V[f\eta_\gamma]\ni f\zeta_\gamma$. С другой стороны, существует такое окружение U диагонали пространства $\prod_a X_a$, что для любого индекса γ имеет место $U[\eta_\gamma]\cap f^{-1}f\zeta_\gamma=\Lambda$, или $f^{-1}fU[\eta_\gamma]\cap f^{-1}f\zeta_\gamma=\Lambda$. В силу $(1,1)$ замкнутости существует окружение V диагонали пространства Y, для которого $f^{-1}V[f\eta_\gamma]\subset f^{-1}fU[\eta_\gamma]$. Значит, $f^{-1}V[f\eta_\gamma]\cap f^{-1}f\zeta_\gamma=\Lambda$ или $V[f\eta_\gamma]\not\ni f\zeta_\gamma$, что противоречит вышесказанному.

Если хотя бы один из сомножителей не имеет изолированной точки, то утверждение предложения неверно. Приведём соответствующий пример. Пусть X_1 — множество чисел вида $1/2^n$, где n — натуральное число, и число 0, а X_2 — канторово совершенное множество. Построим следующее отображение f произведения этих двух пространств: множество $\{0\}\times X_2$ является элементом разбиения; для каждого натурального числа n разобьём пространство X_2 на 2^n гомеоморфных интервала $X_2=\bigcup_{i=1}^{2^n} X_{2,i}^n$, причём соответствующие друг другу две точки множества $\{1/2^n\}\times X_2$ при этих гомеоморфизмах будем считать эквивалентными. Легко видеть, что полученное отображение f открыто, следовательно, по предложению 3.5 и предложению 2.9 является сильно равномерно замкнутым отображением относительно единственной равномерности, существующей в $X_1\times X_2$.

Определение 7.1. Калибр множества всех открыто-замкнутых множеств топологического пространства X относительно семейства множеств с непустым пересечением называется *связным калибром пространства* X. Калибр множества всех множеств A равномерного пространства X, для которых имеет место: $A \Subset A$, относительно семейства множеств с непустым пересечением называется *равномерно связным калибром пространства* X.

Предложение 7.2. *Если пространство X связно, то всякая пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ является связным калибром. Если пространство X равномерно связно* (4), *то всякая пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ является равномерно связным калибром.*

Предложение 7.3. *Пусть индуктивная малая размерность топологического пространства X равна нулю. Тогда всякий связный калибр является топологическим калибром. Пусть равномерная малая индуктивная размерность равномерного пространства X равна нулю. Тогда всякий равномерно связный калибр является топологическим калибром.*

Для любого топологического пространства X построим некоторое другое пространство Y следующим образом. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство всех открыто-замкнутых множеств пространства X. Для любой точки x пространства X положим $A_x=\bigcap\{A\in\mathfrak{A}: x\in A\}$. Для любых двух множеств A_x и A_y имеет место: или $A_x=A_y$ или $A_x\cap A_y=\wedge$. В самом деле, пусть $y\in A_x$, тогда $A_y\subset A_x$. Если $x\notin A_y$, то существует множество $A\in\mathfrak{A}$, для которого $y\in A$, а $x\notin A$. Так как множество $X\setminus A$ тоже принадлежит семейству $\mathfrak{A}$, то $y\notin A$. Имеет место также равенство: $A_x=[A_x]$. Итак, семейство множеств A_x является разбиением пространства X и порождает отображение пространства X на некоторое множество Y. Введём на множестве следующую топологию: множество G принадлежит базе открытых множеств тогда и только тогда, когда $f^{-1}G\in\mathfrak{A}$. Легко заметить, что пространство Y является хаусдорфовым пространством, а малая индуктивная размерность пространства Y равна нулю.

(4) Т. е. не существует равномерно непрерывного отображения пространства на дискретное двоеточие.

Для любого равномерного пространства X аналогичным образом построим некоторое равномерное пространство Z. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство всех таких множеств A, что $A\Subset A$. Через A_x обозначим множество $\bigcap\{A\in\mathfrak{B}: x\in A\}$. Можно доказать, что семейство множеств A_x порождает некоторое отображение пространства X на некоторое множество Z, в котором можно ввести такую равномерность, что равномерная малая индуктивная размерность пространства Z равна нулю.

Предложение 7.4. *Пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является связным калибром пространства X тогда и только тогда, когда эта же пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является топологическим калибром пространства Y. Пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является равномерно связным калибром пространства X тогда и только тогда, когда эта же пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является топологическим калибром пространства Z.*

Теорема 7. *Пусть равномерные пространства X_a имеют по изолированной точке, а пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является равномерно связным калибром каждого конечного произведения пространств X_a. Пусть, далее, отображение $f\colon \prod_{a\in A} X_a\to Y$ непрерывно и сильно равномерно замкнуто, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{n}$. Тогда существует такое подмножество B множества A, что мощность множества B не превосходит $\mathfrak{m}$, и существует отображение $g\colon \prod_{a\in B} X_a\to Y$, для которого $f=g\circ\pi_B^A$.*

Доказательство. По предложению 7.1 имеет место: $\prod X_a\setminus Z_a \Subset \prod X_a\setminus Z_a$. По предложению 3.2 [6] каждая точка пространства $\prod_a X_a$ содержится самое большее в семействе множеств вида $\prod X_a\setminus Z_a$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{n}$. Тогда по теореме 1 [6] множество A можно представить в виде объединения $\bigcup\{A_i: i\in I\}$, причём мощность множества I не превосходит $\mathfrak{m}$, а для любых индексов a и β из множества A_i имеет место: $Z_a=Z_a$. Если $Z_a\neq\prod_{a\in A} X_a$, $a\in A_i$, то мощность множества A_i не превосходит $\mathfrak{n}$. Значит, мощность множества B тех индексов a, для которых $Z_a\neq\prod_{a\in A} X_a$, не превосходит $\mathfrak{m}$. Если индекс a не принадлежит множеству B, то отображение f не зависит от индекса a в каждой точке ξ пространства $\prod_{a\in A} X_a$. По предложению 3.3 [6] существует отображение $g\colon \prod_{a\in B} X_a\to Y$, причём $f=g\circ\pi_B^A$.

Теорема 8. *Пусть равномерные пространства X_a имеют по изолированной точке, равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$, и пара $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ является равномерно связным калибром всех конечных произведений пространств X_a. Пусть, далее, отображение $f\colon \prod_{a\in A} X_a\to Y$ является непрерывным и сильно равномерно замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{n}$. Тогда равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. В силу теоремы 7 существует подмножество B множества A, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, и существует отображение $g\colon \prod_{\alpha\in B} X_\alpha \to Y$. Вес пространства $\prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ не превосходит $\mathfrak{m}$. По предложению 5.1 равномерный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$.

Следствие. *Если $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$, то в теореме 8 достаточно требовать, чтобы пара $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$ являлась равномерно связным калибром пространств X_α.*

Предложение 7.5. *Если пара $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$ не является равномерно связным калибром пространства X, а пространства X, X_α имеют локальный псевдовес, не превосходящий $\mathfrak{n}$, то существует непрерывное сильно равномерно замкнутое отображение $f\colon X\times\prod X_\alpha \to Y$, причём локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{n}$ но отображение f нельзя представить в виде суперпозиции проекции и некоторого отображения грани на пространство Y.*

Доказательство в точности повторяет доказательство предложения 3.4 [6].

§ 8. Поведение веса при сильно равномерно замкнутых отображениях. Пусть $f\colon \prod X_\alpha\to Y$ — некоторое отображение. Скажем, что отображение f *не зависит* от индекса α в точке y пространства Y, если для любой точки ξ прообраза $f^{-1}y$ и для любой другой точки η, у которой все координаты, за исключением координаты с индексом α, равны соответствующим координатам точки ξ, имеет место: $f(\xi)=f(\eta)$. Через W_α обозначим множество всех точек y пространства Y, в которых отображение f не зависит от индекса α.

Предложение 8.1. *Множество W_α является замкнутым, если отображение f является сильно равномерно замкнутым и равномерно непрерывным.*

Доказательство. Прообраз множества W_α лежит в множестве $Z_\alpha = [Z_\alpha]$. Покажем, что $f^{-1}([W_\alpha])\subset Z_\alpha$. В силу предложений 2.8 и 3.4 отображение f открыто. Значит имеет место равенство: $f^{-1}([A])\subset[f^{-1}(A)]$. В частности, $f^{-1}([W_\alpha])=[f^{-1}(W_\alpha)]\subset[Z_\alpha]=Z_\alpha$. Легко заметить, что множество W_α можно определить равенством: $W_\alpha=\{y\colon f^{-1}y\subset Z_\alpha\}$. Отсюда вытекает, что $W_\alpha=[W_\alpha]$.

Предложение 8.2. *Если пространства X_α содержат по изолированной точке, то $W_\alpha \Subset W_\alpha$.*

Доказательство. Пусть множество точек $\{y_\gamma\}$ не пересекается с множеством W_α и близко к нему. Тогда имеем: $f^{-1}W_\alpha\cap f^{-1}y_\gamma=\wedge$, $\bigcup_\gamma f^{-1}y_\gamma\delta f^{-1}W_\alpha$. Ясно, что каждое множество $f^{-1}y_\gamma$ не лежит в множестве Z_α, следовательно, существует такая точка $\xi_\gamma\in f^{-1}y_\gamma$, что $\xi_\gamma\in\prod X_\alpha\setminus Z_\alpha$. Так как $Z_\alpha\Subset Z_\alpha$, то существует такое окружение U диагонали пространства $\prod X_\alpha\times\prod X_\alpha$, что $U[Z_\alpha]=Z_\alpha$. Для любого же окружения V диагонали пространства $Y\times Y$ существует такая точка $y_\gamma(V)$ и такая точка $z_V\in W_\alpha$, что $f^{-1}V[f^{-1}z_V]\supset f^{-1}y_\gamma(V)$, чего не может быть, ибо существует окружение V, для которого $f^{-1}V[f^{-1}z_V]\subset U[f^{-1}z_V]$:

Предложение 8.3. *Пусть X_α — некоторые пространства, $f\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha\to Y$ — некоторое отображение, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. Если отображение непрерывно, то семейство множеств $\prod_{\beta\in A} X_\beta\setminus W_\alpha$, содержащих точку ξ, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$.*

Предложение 8.4. *Пусть равномерный вес пространства X не превосходит $\mathfrak{m}$, а ω — некоторая система множеств, удовлетворяющих условию: $\sigma\Subset\sigma$. Тогда система ω представляется в виде объединения $\omega=\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha$, мощность множества A не превосходит $\mathfrak{m}$, а для каждой системы ω_α существует окружение U и такая дизъюнктная система множеств Ω_α, что для любого множества τ из этой системы Ω_α имеет место: $U[\tau]=\tau$, а каждое множество σ системы ω_α является объединением некоторой подсистемы Ω'_α системы Ω_α.*

Предложение 8.5. *Пусть равномерный вес пространств X_α не превосходит $\mathfrak{m}$, а в пространстве $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ задана некоторая система множеств $\{G_\gamma\}$, причём для любого множества G_γ из этой системы имеет место: $G_\gamma\Subset G_\gamma$, и мощность множества всех множеств системы $\{G_\gamma\}$, содержащих данную точку ξ, не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда существует семейство мощности $\mathfrak{m}$ функционально локально конечных систем Ω_δ, таких что любое множество G_γ из системы $\{G_\gamma\}$ является объединением некоторой подсистемы множеств одной из систем Ω_δ.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha^\pi\}_{\pi\in\Pi}$ — база окружений диагонали пространства $X_\alpha\times X_\alpha$, мощность множества Π не превосходит $\mathfrak{m}$. Итак как $G_\gamma\Subset G_\gamma$, то существует такое конечное подмножество $B(\gamma)$ множества A и такие окружения $U_\beta^{\pi(\beta)}$, $\beta\in B$, что $V[G_\gamma]=G_\gamma$, где $V=\bigsqcup_{\alpha\in B} U_\alpha^{\pi(\alpha)}=\bigsqcup_{\alpha\in A\setminus B}(X_\alpha\times X_\alpha)$. Пусть $\omega_\alpha^{\pi(\alpha)}$ — локально конечное измельчение покрытия $\{U_\alpha^{\pi(\alpha)}[x]\}_{x\in X}$. Для системы всех тех множеств G_γ, у которых одно и то же множество $B(\gamma)$ и одна и та же функция π, по предложению 8.4 найдётся система $\Omega_{B,\pi}$, такая что для любого элемента σ из системы $\Omega_{B,\pi}$ имеет место $\bigwedge_{\alpha\in B}\omega_\alpha^{\pi(\alpha)}(\sigma)=\sigma$, а каждое множество G_γ есть объединение некоторой подсистемы $\Omega'_{B,\pi}$ системы $\Omega_{B,\pi}$. Через $T_{B,\pi}$ обозначим множество всех элементов покрытия $\bigwedge_{\alpha\in B}\omega_\alpha^{\pi(\alpha)}$, которые лежат в некотором элементе σ системы $\Omega_{B,\pi}$. Множество $T=\bigcup_\gamma T_{B,\pi}$ удовлетворяет условиям предложения 5.9 [6] и, следовательно, представляется в виде объединения $T=\bigcup_{i\in I}T^i$, мощность множества I не превосходит $\mathfrak{m}$, а множество T^i является локально конечной системой. Можно при этом считать, что каждое множество $T_{B,\pi}$ лежит в некотором множестве T^i, а если функции π и π_1 различны, то множества $T_{B,\pi}$ и T_{B,π_1} лежат в разных множествах T^i. Каждое множество $T_{B,\pi}$ представим в виде объединения $T_{B,\pi}=\bigcup_j T_{B,\pi}^j$, где $T_{B,\pi}^j$ — множество всех элементов τ из множества $T_{B,\pi}$, лежащих в одном и том же элементе $\sigma^j \in \Omega_{B,\pi}$. Через $\varrho^j_{B,\pi}$ обозначим объединение $\bigcup T^j_{B,\pi}$. Тогда семейство этих множеств $\varrho^j_{B,\pi}$ тоже локально конечно и есть в точности система $\Omega_{B,\pi}$.

Теорема 9. *Пусть равномерные пространства X_a имеют по изолированной точке, а равномерный вес пространств X_a не превосходит $\mathfrak{m}$. Пусть, далее, отображение $f\colon \Pi X_a \to Y$ является равномерно непрерывным и сильно равномерно замкнутым отображением, а локальный псевдовес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда существует такая равномерность пространства Y, совместимая с топологией пространства Y, что равномерный вес её не превосходит $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. По предложению 8.3 семейство всех множеств $\prod_\beta X_\beta \setminus W_a$, содержащих данную точку ξ, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$. По предложению 8.2 имеет место: $W_a \Subset W_a$. По предложению 8.5 существует такое семейство мощности $\mathfrak{m}$ функционально локально конечных систем B_i, что каждое множество $\prod_\beta X_\beta \setminus W_a$ есть объединение некоторой подсистемы одной из системы B_i. Тогда для любого элемента b системы B_i и любой точки $y \in b$ отображение f зависит не более чем от $\mathfrak{m}$ индексов $a \in A$, причём одних и тех же для всех точек $y \in b$. По теореме 3 существует такая равномерность, совместимая с топологией пространства Y, что равномерный вес её не превосходит $\mathfrak{m}$.

Теорема 10. *Пусть метрические пространства X_a имеют по изолированной точке, отображение $f\colon \prod X_a \to Y$ является равномерно непрерывным и сильно равномерно замкнутым, а пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счётности. Тогда пространство Y метризуемо.*

Следствие. *Образ произведения дискретных пространств при непрерывном и сильно равномерно непрерывном отображении, удовлетворяющий первой аксиоме счётности, метризуем.* (Смотри пример после теоремы 6).

§ 9. Поведение веса при замкнутых отображениях. Если требовать в весовых теоремах топологическую замкнутость отображений вместо сильно равномерной замкнутости, то можно получить некоторые аналогичные результаты, но, как будет видно в дальнейшем, ситуация в этом случае более тривиальна.

Предложение 9.1. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ замкнуто, а локальный вес пространства Y в точке y не превосходит $\mathfrak{m}$. Если ω — дискретная система открытых множеств пространства X, то мощность подсистемы всех тех множеств, которые пересекают границу прообраза $f^{-1}y$, строго меньше $\mathfrak{m}$.*

Доказательство. Допустим противное, пусть мощность дискретной системы ω равна $\mathfrak{m}$, и все её элементы пересекают границу прообраза y. Пусть $\mathfrak{B}$ — база точки y, $\mathfrak{B} = \{O_a\}$, мощность $\mathfrak{B}$ не превосходит $\mathfrak{m}$. Пусть $x_a \notin f^{-1}y$ — некоторая точка множества $f^{-1}O_a \cap \sigma_a$. Тогда система $\{x_a\}$ дискретна, значит множество $f^{-1}y \setminus \{x_a\}$ открыто. Следовательно, существует такое O_β, что $f^{-1}O_\beta \cap \{x_a\} = \bigwedge$, но $x_\beta \in f^{-1}O_\beta$. Противоречие доказывает предложение.

Предложение 9.2. *Пусть отображение $f\colon X \to Y$ является замкнутым отображением, локальный вес пространства Y не превосходит $\mathfrak{m}$, а пространство X имеет равномерность, совместимую с топологией пространства X, равномерный вес которой не превосходит $\mathfrak{m}$. Тогда границы любого прообраза точки имеет (топологическую) базу мощности $\mathfrak{m}$.*

Предложение 9.3. *Пусть X — произведение дискретных пространств X_a, $a \in A$, F — некоторое замкнутое подмножество пространства X, причём для любой точки x множества F существует такое подмножество B множества A, что мощность множества B не превосходит $\mathfrak{m}$, а $H^x_B \subset F$* ([5]). *Тогда граница множества F тоже обладает этим же свойством.*

Доказательство. Пусть точка x принадлежит границе множества F; пусть $H^x_B \subset F$, мощность множества B не превосходит $\mathfrak{m}$. Для любого конечного подмножества Γ множества B множество $H^x_\Gamma \setminus F$ непусто и открыто, значит, существует конечное множество E_Γ и точка y_Γ, для которых $H^{y_\Gamma}_{E_\Gamma} \subset H^x_\Gamma \setminus F$. Через B_1 обозначим объединение $\bigcup_{\Gamma \subset B} E_\Gamma$, его мощность не превосходит $\mathfrak{m}$. Можно считать, что $B \subset B_1$. Далее построим множества B_n для любого целого числа n. Через B^0 обозначим объединение $\bigcup_{n=1}^{\infty} B^n$, мощность его не превосходит $\mathfrak{m}$. Покажем, что $H^x_{B^0} \subset \operatorname{гр} F$. Пусть y — некоторая точка множества $H^x_{B^0}$, а Γ — конечное множество индексов. Множество Γ представим в виде $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, так чтобы $\Gamma_1 \subset B_n$, $\Gamma_2 \cap B^0 = \bigwedge$. Имеем: $H^y_\Gamma = H^y_{\Gamma_1} \cap H^y_{\Gamma_2} = H^x_{\Gamma_1} \cap H^y_{\Gamma_2}$. Тогда существует точка z и конечное множество индексов Γ_3, для которых $H^z_{\Gamma_3} \subset H^x_{\Gamma_1} \setminus F$, $\Gamma_3 \subset B_{n+1}$. Значит существует такая точка z_1, что $z_1 \in H^y_{\Gamma_2} \cap H^z_{\Gamma_3} \cap H^x_{\Gamma_1}$.

Предложение 9.4. *Пусть отображение f произведения дискретных пространств X_a на некоторое пространство Y является непрерывным и замкнутым. Тогда, если пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счётности, то все пространства X_a за исключением счётного семейства конечны, либо Y дискретно.*

Предложение 9.5. *Если отображение f произведения метрического пространства X и пространства D^τ на пространство Y с первой аксиомой счётности замкнуто, то пространство Y метризуемо.*

Доказательство. Для любой точки x пространства X существует счётное подмножество B_a множества Δ, такое что отображение f не зависит от индексов $a \notin B_x$ в каждой точке множества $\{x\} \times D^\tau$. Пусть X_a — множество всех точек x пространства X, в которых отображение f не зависит от индекса a. Легко видеть, что множество $X \setminus X_a$ является открытым мно-

([5]) Множество H^x_B определяется равенством: $H^x_B = \{y\colon$ для любого $a \in B$ $y(a) = x(a)\}$.

жеством. Так как пространство X метрическое, то можно построить σ-локально конечную систему множеств, такую что в каждой точке отображение f не зависит от индекса α, если этот индекс α не соответствует некоторому элементу системы, содержащему точку x. Далее строим отображение g пространства X на некоторое пространство X^* так же как и в предложении 3.4 [6]. Легко видеть, что пространство X^* можно так отобразить на пространство Y, что $f = h \circ g$, где h — последнее отображение.

Цитированная литература

[1] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniform et sur la topologie générale*, Paris 1938.

[2] Ю. М. Смирнов, *О пространствах близости*, Мат. сборник 31.3 (1952), стр. 543-574.

[3] I. R. Isbell, *Uniform spaces*, Providence 1964.

[4] А. С. Есенин-Вольпин, *О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах*, Докл. АН СССР, 68 (3), (1949).

[5] R. H. Bing, *Metrisation of topological spaces*, Canadian Journ. Math. 3 (1951), стр. 175-186.

[6] А. Мищенко, *Несколько теорем о произведении топологических пространств*, Fund. Math. этот том, стр. 259-284.

[7] S. Mrówka, *A necessary and sufficient condition for m-almost metrisability*, Bull. Acad. Pol. Sci. 5 (1957), стр. 627-629.

[8] А. Архангельский, *Новые критерии паракомпактности и метризуемости произвольного T_1-пространства*, Докл. АН СССР 41 (1), (1961).

[9] A. H. Stone, *Metrisability of decomposition spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), стр. 690-700.

[10] K. Morita and S. Hanai, *Closed mappings and metric spaces*, Proc. Acad. Japan 32 (1956), стр. 10-14.

Reçu par la Rédaction le 11. 1. 1965

Diagonal algebras

by

J. Płonka (Wrocław)

Introduction. The class of n-dimensional diagonal algebras defined here (section I) is a generalization of a certain class of semigroups considered by Liapin, and the representation theorem for diagonal algebras (section II) is a generalization of the representation theorem for those semigroups. Besides, the paper contains theorems characterizing diagonal algebras in a different manner, and also theorems concerning independence (in the sense of Marczewski, see [4]), which in diagonal algebras presents itself particularly clearly (section III). The results of this paper were announced in [6].

Diagonal algebras turn to be extremal in a problem of estimation of the number of independent elements in algebras with a noncommutative binary operation and appear also in an investigation of sets of algebraic operations (cf. [7], [9] and [10]).

In diagonal algebras the condition of exchange of independent sets formulated by Marczewski is also fulfilled (see, e.g. [8]).

I. Definitions and the simplest properties. Let us consider an algebra $\mathfrak{D} = (x; d)$ with a unique fundamental operation $d(x_1, \ldots, x_n)$ satisfying the following postulates:

I. $d(x, \ldots, x) = x$,

II. $d\big(d(x_1^1, \ldots, x_n^1), d(x_1^2, \ldots, x_n^2), \ldots, d(x_1^n, \ldots, x_n^n)\big) = d(x_1^1, x_2^2, \ldots, x_n^n)$.

This algebra will be called an *n-dimensional diagonal algebra*.

If the operation $d(x_1, \ldots, x_n)$ depends on each variable, then the n-dimensional diagonal algebra will be called *proper*.

The axioms I and II imply the following simple properties:

(i) *Each algebraic operation $f \in A^{(m)}$* (see [6]) *in the n-dimensional diagonal algebra is of the form:*

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots, x_m) \equiv d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \qquad (1 \leqslant i_p \leqslant m \text{ for } p = 1, \ldots, n).$$

In fact, from I it follows that

$$e_j^{(m)}(x_1, \ldots, x_m) \equiv d(x_j, \ldots, x_j);$$

hence, from II and the definition of algebraic operations we obtain (i).