[11] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, New York 1960.

[12] P. R. Halmos, *Injective and projective Boolean Algebras*, in Proc. Symp. Pure Math. II, *Lattice theory*, Providence 1961, pp. 114-122.

[13] — *Lectures on Boolean Algebras*, New York 1963.

[14] E. Hewitt, *A remark on density characters*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 641-643.

[15] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.

[16] E. Marczewski (E. Szpilrajn), *Remarque sur les produits cartésiens d'espaces topologiques*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 31 (1941) pp. 525-528.

[17] — *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. 34 (1947), pp. 127-143.

[18] E. S. Pondiczery, *Power problems in abstract spaces*, Duke Math. Journ. 11 (1944), pp. 835-837.

[19] K. A. Ross and A. H. Stone, *Products of separable spaces*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), pp. 398-403.

[20] N. Šanin, *On products of topological spaces*, Trudy Mat. Inst. Steklova 24 (1948) (Russian).

[21] N. Vedenissoff, *Remarques sur la dimension des espaces topologiques*, Uč. Zapiski Mosk. Gos. Univ. 30 (1939), 131-140 (Russian; French summary).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 22. 12. 1964

Ordnungsfähigkeit zusammenhängender Räume

von

H. Herrlich (Berlin)

Ziel der Arbeit ist eine topologische Kennzeichnung der zusammenhängenden (Satz 1) und der lokal-zusammenhängenden (Satz 2, 2a) ordnungsfähigen Räume.

DEFINITIONEN.

1) Ein topologischer Raum T heißt *ordnungsfähig*, wenn er einem geordneten Raum homöomorph ist, d.h. wenn es eine lineare Ordnung R auf T so gibt, daß die offenen Intervalle eine Basis der Topologie von T bilden.

2) Ein Punkt x einer zusammenhängenden Menge M heißt *Randpunkt von* M, wenn $M-\{x\}$ zusammenhängend ist, sonst Schnittpunkt von M.

3) Ein topologischer Raum heißt *randendlich*, wenn jede seiner zusammenhängenden Teilmengen höchstens zwei Randpunkte enthält.

HILFSSÄTZE.

1) *Sind x, y zwei verschiedene Elemente des zusammenhängenden, lokal-zusammenhängenden T_1-Raumes T, so gibt es eine Komponente K von $T' = T-\{x, y\}$, die x und y als Häufungspunkte besitzt. $K_1 = K \cup \{x, y\}$ ist als Unterraum lokal-zusammenhängend.*

Beweis: a) $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Komponenten von T'. Jedes K aus $\mathfrak{M}$ ist offen-abgeschlossen in T'. Gäbe es ein K in $\mathfrak{M}$, das weder x noch y als Häufungspunkt besäße, so wäre dieses K offen-abgeschlossen in T, im Widerspruch zum Zusammenhang von T. Jedes K aus $\mathfrak{M}$ besitzt also x oder y als Häufungspunkt. Ist U eine zu y disjunkte, zusammenhängende Umgebung von x und enthält ein K aus $\mathfrak{M}$ Elemente von U, so ist x Häufungspunkt von K; denn sonst wäre $K \cap U$ offen-abgeschlossen in U. Also umfaßt $X = \bigcup \{K \mid K \in \mathfrak{M}, x \in K^-\} \cup \{x\}$ die Menge U, ist somit Umgebung von x, also offen in T. Analog ist $Y = \bigcup \{K \mid K \in \mathfrak{M}, y \in K^-\} \cup \{y\}$ offen in T. Hätte keine Komponente x und y als Häufungspunkte, so wären X, Y disjunkt, im Widerspruch zum Zusammenhang von T.

b) K ist offen in T, also lokal-zusammenhängend. Ist Z eine zu y disjunkte, offene, zusammenhängende Umgebung von x, so ist $Z \cap K_1$ zusammenhängend; denn wäre letzteres nicht der Fall, so gäbe es eine Komponente L von $Z \cap K_1$, die x nicht enthielte, also in Z offen-abgeschlossen wäre, im Widerspruch zum Zusammenhang von Z. Somit besitzt auch x eine Basis aus zusammenhängenden Umgebungen in K_1. Ebenso y. K_1 ist lokalzusammenhängend.

2) *Ist x Schnittpunkt des zusammenhängenden, lokal-zusammenhängenden, randendlichen T_1-Raumes T, so besteht $T-\{x\}$ aus genau zwei Komponenten.*

Beweis. Wären K_1, K_2, K_3 verschiedene Komponenten von $T-\{x\}$, x_i Elemente von K_i für $i=1,2,3$, so gäbe es nach H. S. 1 Komponenten M_i von $T-\{x, x_i\}$, mit $\{x, x_i\} \subset \overline{M_i}$. Also wären x_1, x_2, x_3 Randpunkte der zusammenhängenden Menge $\bigcup_{i=1}^{3} M_i \cup \{x, x_1, x_2, x_3\}$, im Widerspruch zur Randendlichkeit von T.

3) *Besitzt der zusammenhängende, lokal-zusammenhängende, randendliche T_1-Raum T die Randpunkte a, b und ist x Schnittpunkt von T, so besteht $T-\{x\}$ aus genau zwei Komponenten, von denen eine a, die andere b enthält.*

Beweis. $T' = T-\{a\}$ ist ein zusammenhängender, lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum, $T'-\{x\}$ besteht also nach H. S. 2 aus genau zwei Komponenten L_1, L_2 mit $a \in \overline{L_1}$. Folglich sind $K_1 = L_1 \cup \{a\}$, $K_2 = L_2$ zusammenhängend, also die Komponenten von $T-\{x\}$. Da L_1 zusammenhängend ist, muß a Randpunkt von K_1 sein. Wäre b ebenfalls in K_1 enthalten, so könnte man analog zeigen, daß auch b Randpunkt von K_1 wäre. Dann wären a, b, x Randpunkte von $K_1 \cup \{x\}$, im Widerspruch zur Randendlichkeit von T. Also ist b Element von K_2.

4) *Besitzt der zusammenhängende T_1-Raum T genau zwei Randpunkte a, b und besteht $T-\{x\}$ für jeden Schnittpunkt x aus zwei separierten Mengen $A(x)$, $B(x)$ mit $a \in A(x)$, $b \in B(x)$, so gibt es eine lineare Ordnung R auf T derart, daß die Ordnungstopologie gröber ist als die gegebene Topologie von T.*

Beweis. Man setze $A(a) = B(b) = \emptyset$, $A(b) = B(a) = T$. Dann ist $R = \{(x; y) \mid x \in A(y)\}$ eine lineare Ordnung auf T; denn:

1a) Ist x Element von $A(y)$, so ist $B(y) \cup \{y\}$ zusammenhängend in $T-\{x\}$, also in $B(x)$ enthalten.

1b) Ist x Element von $B(y)$, so ist $A(y) \cup \{y\}$ zusammenhängend in $T-\{x\}$, also in $A(x)$ enthalten.

2) Es gelt xRy, yRz. Dann folgt aus 1a) $B(y) \cup \{y\} \subset B(x)$, $B(z) \cup \{z\} \subset B(y)$, also $z \in B(x)$, hieraus mit Hilfe von 1b) $x \in A(z)$, also xRz. R ist transitiv.

3) Sei $x \neq y$, $x \notin A(y)$. Dann gilt $x \in B(y)$, also nach 1b) $y \in A(x)$. Es gilt wenigstens eine der drei Relationen xRy, yRx, $x = y$.

4) Es gilt höchstens eine dieser drei Relationen, weil xRx für kein x gilt.

Also is R eine lineare Ordnung auf T. Die Mengen $A(x)$, $B(x)$ bilden eine Subbasis der zugehörigen Ordnungstopologie. Da sie sämtlich in T offen sind, ist die Ordnungstopologie gröber als die Topologie von T.

5) *$(T, \mathfrak{T})$ sei ein topologischer Raum und R eine lineare Ordnung auf T, so daß die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_R$ gröber als die Topologie $\mathfrak{T}$ ist.*

a) *Ist $(T, \mathfrak{T})$ kompakt, so gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_R$.*

b) *Ist $(T, \mathfrak{T})$ zusammenhängend und lokal-zusammenhängend, so gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_R$.*

Beweis. a) Die Identität auf T ist eine bijektive, stetige Abbildung des kompakten Raumes $(T, \mathfrak{T})$ auf den T_2-Raum $(T, \mathfrak{T}_R)$ und somit ein Homöomorphismus.

b) Die Menge $\mathfrak{B}$ aller bezüglich $\mathfrak{T}$ zusammenhängenden, offenen Mengen bildet eine Basis von $\mathfrak{T}$. Jedes B aus $\mathfrak{B}$ ist notwendig ein Intervall bezüglich R. Wäre ein derartiges B bezüglich $\mathfrak{T}_R$ nicht offen, so gäbe es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein x in B derart, daß die Menge $M(x) = \{y \mid xRy\}$ nicht leer und zu B disjunkt, also bezüglich $\mathfrak{T}$ offen-abgeschlossen wäre, im Widerspruch zum Zusammenhang von $(T, \mathfrak{T})$. Also ist jedes B aus $\mathfrak{B}$ offen bezüglich $\mathfrak{T}_R$ und somit $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_R$, also $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_R$.

6) (Eindeutigkeit der Ordnung): *Ist der zusammenhängende Raum T durch R und durch S zulässig geordnet, so gilt $R = S$ oder $R = S^{-1}$.*

Beweis. Für $A \subset T$ sei R/A bzw. S/A die Einschränkung von R bzw. S auf A. Die Menge $\mathfrak{M} = \{A \mid A \subset T, R/A = S/A\}$ wird durch Inklusion induktiv geordnet, besitzt also maximale Elemente. Sind alle maximalen Elemente von $\mathfrak{M}$ höchstens einpunktig, so gilt $R = S^{-1}$. Andernfalls gibt es ein maximales A in $\mathfrak{M}$, welches wenigstens zwei Punkte enthält. Gäbe es ein x in $T-A$, so gäbe es ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein y in A mit xRy, ySx. Sei z ein Element von $A-\{y\}$.

1. Fall: yRz. Dann liegen x und z bezüglich R in verschiedenen, bezüglich S in derselben Komponente von $T-\{y\}$. Widerspruch.

2. Fall: zRy. Dann liegen x und z bezüglich R in derselben, bezüglich S in verschiedenen Komponenten von $T-\{y\}$. Widerspruch.

Folglich gilt $A = T$, also $R = S$.

7) *Sind A, B zwei durch R beziehungsweise S zulässig geordnete, zusammenhängende Teilräume des randendlichen Raumes T und besitzen A und B bezüglich R beziehungsweise S denselben Anfangspunkt a und denselben Endpunkt b, so gilt $A = B$ und $R = S$.*

Beweis. Wäre x Element von $A-B$, so wären a, b, x Randpunkte von $A \cup B$, im Widerspruch zur Randendlichkeit von T. Also $A \subset B$. Analog $B \subset A$, somit $A = B$. Nach H. S. 6 muß dann auch $R = S$ gelten.

8) *Sind A und B zwei zusammenhängende, durch R beziehungsweise S zulässig geordnete Teilräume des randendlichen Raumes T und ist ihr Durchschnitt D nicht leer, so ist auch ihre Vereinigung V ordnungsfähig.*

Beweis. Sind x und y Elemente von D, so gehören nach H. S. 7 auch die von x, y aufgespannten Teilintervalle von A beziehungsweise B zu D. Also ist D ein Intervall bezüglich A und bezüglich B, somit zusammenhängend und nach H. S. 6 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Einschränkungen von R auf D und von S auf D identisch sind.

Also:

$$A = A_1 \cup D \cup A_2 \quad \text{mit} \quad A_1 \times D \subset R\,, \quad D \times A_2 \subset R\,.$$

$$B = B_1 \cup D \cup B_2 \quad \text{mit} \quad B_1 \times D \subset S\,, \quad D \times B_2 \subset S\,.$$

Sind a_1, a_2, b_1, b_2 Elemente von A_1, A_2, B_1, B_2, so sind sie Randpunkte von $[a_1, a_2]_R \cup [b_1, b_2]_S$. Wegen der Randendlichkeit von T müssen also zwei der vier Mengen A_1, A_2, B_1, B_2 leer sein. Enthält D nur einen Punkt, so folgt hieraus sofort die Ordnungsfähigkeit von $A \cup B$. Enthält D mehr als einen Punkt, so schließt man zunächst wie oben, daß eine der Mengen A_1, B_1 und eine der Mengen A_2, B_2 leer sein muß, woraus ebenfalls die Ordnungsfähigkeit von $A \cup B$ folgt.

Satz 1. *Ein zusammenhängender Raum ist genau dann ordnungsfähig, wenn er ein lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum ist.*

Beweis. a) Die Bedingungen sind offenbar notwendig.

b) T erfülle die Bedingungen. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller zusammenhängenden, ordnungsfähigen Teilräume von T wird durch Inklusion teilweise geordnet. Ist I eine wohlgeordnete Indexmenge mit dem Anfangselement 1 und f eine monoton steigende Abbildung von I in $\mathfrak{M}$, so ist $F = \bigcup \{f(i) \mid i \in I\}$ wieder zusammenhängend. Sei $f(1)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit mehr als einpunktig, R_1 eine zulässige Ordnung von $f(1)$. Dann gibt es wegen H. S. 6 zu jedem i aus I genau eine zulässige Ordnung R_i von $f(i)$, deren Einschränkung auf $f(1)$ gleich R_1 ist. Wegen der Randendlichkeit von T ist $R = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$ eine zulässige Ordnung von F. F ist somit Element von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ also induktiv geordnet und besitzt folglich ein maximales Element M. Wäre M von T verschieden, so könnte man ein x in M und ein y in $T-M$ und nach H. S. 1 eine Komponente K von $T-\{x, y\}$ so wählen, daß x, y Häufungspunkte von K wären. Nach H. S. 1, 2, 3, 4, 5b wäre $L = K \cup \{x, y\}$ ordnungsfähig, somit nach H. S. 8 auch $L \cup M$, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von M. Also $M = T$. T ist ordnungsfähig.

Satz 1a (Kowalsky). *Ein zusammenhängender Raum T ist genau dann ordnungsfähig, wenn er ein lokal-zusammenhängender T_1-Raum ist und wenn es unter je drei echten, zusammenhängenden Teilmengen von T stets zwei gibt, die T nicht überdecken.*

Beweis. a) Die Bedingungen sind offenbar notwendig.

b) Sind die Bedingungen erfüllt, so ist T randendlich; denn wären x_1, x_2, x_3 verschiedene Randpunkte einer zusammenhängenden Menge Z von T und wäre für $i = 1, 2, 3$ K_i diejenige Komponente von $T-\{x_i\}$, die $Z-\{x_i\}$ umfaßt, so wären die K_i offen in T, die $K_i \cup \{x_i\}$ abgeschlossen in T, also für $i \neq k$ $K_i \cup K_k = K_i \cup \{x_i\} \cup K_k \cup \{x_k\}$ offen-abgeschlossen in T und somit gleich T, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. T ist randendlich, also nach Satz 1 ordnungsfähig.

Bemerkung. Eine andersartige Kennzeichnung der zusammenhängenden, ordnungsfähigen Räume stammt von Eilenberg.

Beispiele. 1) Der durch $T = \{(x; y) \mid x > 0,\ y = \sin(x^{-1})\} \cup \{(0; 0)\}$ bestimmte Unterraum des 2-dimensionalen Euklidischen Raumes R^2 ist ein randendlicher, zusammenhängender metrischer Raum, der nicht lokal-zusammenhängend also nicht ordnungsfähig ist.

2) $\mathfrak{T}_0$ sei die natürliche Topologie des 3-dimensionalen Euklidischen Raumes R^3. T sei die Menge aller Punkte $(x; y; z)$ des R^3 mit $z \geqslant 0$. Bezeichnet man für reelle x, y mit $g(x, y)$ die Menge $\{(x; y; z) \mid z > 0\}$, so bildet $\mathfrak{S} = \{g(x, y) \mid x \in R, y \in R\} \cup \{B \cap T \mid B \in \mathfrak{T}_0\}$ eine Subbasis einer Topologie $\mathfrak{T}$ auf T. Der so konstruierte Raum $(T, \mathfrak{T})$ hat folgende Eigenschaften:

1. $(T, \mathfrak{T})$ ist metrisierbar. Bezeichnet man mit ϱ die Euklidische Metrik des R^3, so wird z.B. durch

$$\bar{\varrho}\big((x; y; z), (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\big) = \begin{cases} \varrho\big((x; y; z), (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\big) + |z-\bar{z}|, & \text{wenn } (x; y) = (\bar{x}; \bar{y}), \\ \varrho\big((x; y; z), (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\big) + |z+\bar{z}|, & \text{wenn } (x; y) \neq (\bar{x}; \bar{y}) \end{cases}$$

eine mit $\mathfrak{T}$ verträgliche Metrik auf T definiert.

2. $(T, \mathfrak{T})$ is zusammenhängend und lokal-zusammenhängend.

3. Für jedes x aus T zerfällt $T-\{x\}$ in genau zwei Komponenten.

4. $(T, \mathfrak{T})$ ist nicht randendlich, also nicht ordnungsfähig. Durch dieses Beispiel wird eine bei Bourbaki (S. 195, Ex. 15b) aufgestellte Behauptung widerlegt.

Die topologische Summe ordnungsfähiger Räume ist offenbar unterordnungsähig, d.h. einem Unterraum eines ordnungsfähigen Raumes homöomorph. Jeder lokal-zusammenhängende Raum ist topologische Summe zusammenhängender Räume. Also gilt:

Satz 2. *Ein lokal-zusammenhängender Raum ist genau dann unterordnungsfähig, wenn er ein randendlicher T_1-Raum ist.*

Andererseits ist ein derartiger Raum im allgemeinen nicht ordnungsfähig, wie der durch $T = (0,1) \cup \{2\}$ erzeugte Unterraum des 1-dimensionalen Euklidischen Raumes R^1 zeigt.

Hilfssatz 9. *I_0, I_1, I_2 seien drei paarweise disjunkte Indexmengen und jedem i aus $I = I_0 \cup I_1 \cup I_2$ sei ein topologischer Raum T_i und eine zulässige Ordnung R_i auf T_i so zugeordnet, daß jedes T_i bezüglich R_i für $i \in I_0$ weder einen Anfangs- noch einen Endpunkt, für $i \in I_1$ entweder einen Anfangs- oder einen Endpunkt, für $i \in I_2$ einen Anfangs- und einen Endpunkt besitzt. Ist eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt, so ist die topologische Summe T der T_i, $i \in I$ ordnungsfähig*:

(a) $I_0 = \emptyset$,
(b) $I_2 = \emptyset$,
(c) $I_1 \neq \emptyset$,
(d) $|I_2| \geqslant \aleph_0$.

Beweis. Man nenne eine lineare Ordnung R auf einer Menge M *diskret*, wenn M bezüglich der durch R induzierten Topologie ein diskreter Raum ist. Dann gibt es zu jeder Menge M diskrete Ordnungen (Ist z.B. $|M| = \aleph_a$ und $\mu = (\omega_0^{-1} + \omega_0)$ der Ordnungstyp der ganzen Zahlen, so kann man eine Ordnung auf M z.B. so wählen, daß der zugehörige Ordnungstyp gleich einem der folgenden Ordnungstypen ist: $\mu \cdot \omega_a$, $\omega_0 + \mu \cdot \omega_a$, $\omega_0 + \mu \cdot \omega_a + \omega_0^{-1}$). Für $\nu = 0, 1, 2$ sei T^ν die topologische Summe aller T_i, $i \in I_\nu$. Ist S_0 eine diskrete Ordnung auf I_0, so ist $Q_0 = \bigcup \{R_i |\ i \in I_0\} \cup \bigcup \{T_i \times T_j |\ i S_0 j\}$ eine zulässige Ordnung auf T^0. Analog zeigt man, daß es für $\nu = 1, 2$ zulässige Ordnungen Q_ν auf T^ν gibt, wobei man nur bei $\nu = 1$ aufpassen muß. Insbesondere kann man die Q_ν stets so wählen, daß folgendes gilt:

1. Ist (c) erfüllt, so besitze T^1 bezüglich Q_1 einen End- aber keinen Anfangspunkt. Ist außerdem $I_2 \neq \emptyset$, so besitze T^2 einen Anfangspunkt bezüglich Q_2.

2. Ist (d) erfüllt, (c) nicht erfüllt, so besitze T^2 keinen Anfangspunkt bezüglich Q_2.

Dann ist

$$R = \bigcup_{\nu=0}^{2} Q_\nu \cup (T^0 \times T^1) \cup (T^0 \times T^2) \cup (T^1 \times T^2)$$

eine zulässige Ordnung auf T.

Bezeichnet man die Vereinigungsmenge aller derjenigen Komponenten eines topologischen Raumes T, die wenigstens einen Randpunkt besitzen, mit $V(T)$, so gilt:

Satz 2a. *Ein lokal-zusammenhängender Raum T ist genau dann ordnungsfähig, wenn er randendlicher T_1-Raum ist und eine der folgenden Bedingungen erfüllt*:

(α) $V(T) = T$,
(β) $V(T) = \emptyset$,
(γ) *$V(T)$ ist nicht kompakt.*

Beweis. a) Ist der lokal-zusammenhängende Raum T durch R zulässig geordnet, so ist er randendlicher T_1-Raum, Angenommen, es sei keine der Bedingungen (α)-(γ) erfüllt. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit Elemente $x \in V(T)$, $y \in T - V(T)$ mit xRy. Da $V(T)$ kompakt ist, hat die Menge $M = \{z |\ z \in V(T), zRy\}$ ein Maximum a.

Besäße a keinen direkten Nachfolger in T, so wäre a Häufungspunkt von $T - V(T)$ im Widerspruch zum lokalen Zusammenhang von T. Besäße a einen direkten Nachfolger b, so wäre b Randpunkt der b enthaltenden Komponente von T, also Element von $V(T)$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von a. Also ist obige Annahme falsch.

b) T sei ein lokal-zusammenhängender, randendlicher T_1-Raum. Dann besitzt jede seiner Komponenten K_i nach Satz 1 eine zulässige Ordnung R_i und T ist die topologische Summe der K_i. Erfüllt T die Bedingung (α), so erfüllt er die Bedingung (a) von H.S. 9 ist also ordnungsfähig. Analog folgt aus (β), daß die Bedingung (b) und aus (γ), daß eine der Bedingungen (c), (d) von H.S. 9 erfüllt ist.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. III, IV, 3e éd., Paris 1960.
[2] S. Eilenberg, *Ordered topological spaces*, Am. J. Math. 63 (1941). S. 39-45.
[3] B. Knaster und C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), S. 206-255.
[4] H. J. Kowalsky, *Kennzeichnung von Bogen*, Fund. Math. 46 (1958), S. 103-107.

Reçu par la Rédaction le 27. 11. 1964