Über gewisse Topologien auf geordneten Mengen

von

M. Novotný und **L. Skula** (Brno)

1. Einleitung. In dieser Arbeit wird folgendes Problem studiert: Es seien G, H geordnete Mengen, welche gleichzeitig topologische T_0-Räume sind. Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen an, unter welchen die Menge aller isotonen Abbildungen der Menge G in H mit der Menge aller stetigen Abbildungen der Menge G in H identisch ist. Es zeigt sich, daß bei der Lösung dieses Problems die sogenannte rechte und linke Topologie auf einer geordneten Menge eine wichtige Rolle spielen. Daher wird ein Satz über diese rechte Topologie bewiesen; er betrifft die Beziehung der rechten Topologie auf der geordneten Menge zur Einbettung der geordneten Menge in gewisse Kardinalpotenzen.

Wir gebrauchen die übliche Symbolik der Mengenlehre. Die Menge, welche x als einziges Element enthält, bezeichnen wir mit $\{x\}$. Durch $\{x|\, P(x)\}$ wird die Menge aller Elemente x symbolisiert, welche die Eigenschaft $P(x)$ haben. Sind $M \subseteq A$, B Mengen, $y \in B$ ein Element und f eine Abbildung der Menge A in B, so setzen wir

$$f^1(M) = \{f(x)|\, x \in M\}, \qquad f^{-1}(y) = \{x|\, f(x) = y\}.$$

Es sei A eine Menge, R, S Äquivalenzrelationen auf A. Wir setzen $R \leqslant S$ genau dann, wenn für jedes Paar $x \in A$, $y \in A$ von Elementen mit der Eigenschaft xRy stets xSy gilt. Die Abbildung φ der Menge A auf A/R, für welche $x \in \varphi(x)$ bei jedem $x \in A$ gilt, heißt *kanonisch*.

Unter einer geordneten Menge wird stets eine teilweise geordnete Menge verstanden. Die geordnete Menge G mit der Ordnungsrelation $\leqslant$ bezeichnen wir mit $(G, \leqslant)$. Eine *Gegenkette* ist eine geordnete Menge, in der je zwei verschiedene Elemente unvergleichbar sind.

Es sei G eine geordnete Menge, $A \subset G$ eine Teilmenge von G. Wenn aus $x \in A$, $y \in G$, $y < x$ stets $y \in A$ folgt, heißt die Menge A *Anfang* der Menge G. Insbesondere heißt die Menge $A(x) = \{t|\, t \in G,\ t \leqslant x\}$ *durch* $x \in G$ *erzeugter Hauptanfang*. Dual werden das *Ende* und das *durch* $x \in G$ *erzeugte Hauptende* $E(x) = \{t|\, t \in G,\ t \geqslant x\}$ erklärt.

Unter einer Topologie wird stets eine Topologie im Sinne von Bourbaki [2] verstanden [1]. Auf der Menge G wird die Topologie u definiert, wenn die abgeschlossene Hülle uM für jede Menge $M \subseteq G$ erklärt wird; den entsprechenden topologischen Raum bezeichnen wir mit (G, u). Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heiße *ao-Menge*, wenn sie abgeschlossen und offen ist. Sind auf der Menge G zwei Topologien u, v gegeben, so heißt die Topologie u *feiner als* v und v *gröber als* u, wenn jede im Raume (G, v) offene Menge auch im Raume (G, u) offen ist.

Es sei G eine geordnete Menge. Es sei ferner u eine Topologie auf G, welche dadurch definiert ist, daß für jedes Element $x \in G$ das System $\boldsymbol{U}(x)$ aller Umgebungen des Elementes x vorgeschrieben ist. Wenn für das System $\boldsymbol{U}(x)$ die Beziehung

$$\bigcap_{U \in \boldsymbol{U}(x)} U = A(x) \qquad [\bigcap_{U \in \boldsymbol{U}(x)} U = E(x)]$$

bei jedem $x \in G$ richtig ist, so heißt u *allgemeine linke Topologie* [*allgemeine rechte Topologie*]. Ist u eine allgemeine linke Topologie [allgemeine rechte Topologie], bei welcher die Menge $A(x)$ [$E(x)$] eine Umgebung des Elementes x für jedes $x \in G$ ist, heißt u *linke Topologie* [*rechte Topologie*] *auf* G.

Es sei G ein topologischer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf G. Dann gibt es die feinste Topologie auf der Menge G/R, bei der die kanonische Abbildung der Menge G auf G/R stetig ist. Diese Topologie heißt *Quotiententopologie.*

Es sei (G, u) ein topologischer Raum, $M \subseteq G$ eine Menge. Dann ist M ein topologischer Relativraum; seine Topologie wird mit u_M bezeichnet.

2. Mengen von isotonen und stetigen Abbildungen.

In diesem Absatz wird mit G, H ein Paar von Mengen bezeichnet, für welche $\operatorname{card} G \geqslant 2$, $\operatorname{card} H \geqslant 2$ gilt. Auf der Menge G ist die Ordnungsrelation $\leqslant$, auf H die Ordnungsrelation $\precsim$ gegeben. Wir bezeichnen mit I die Menge aller isotonen Abbildungen der geordneten Menge $(G, \leqslant)$ in die geordnete Menge $(H, \precsim)$ [2]. Ferner setzen wir $I^2 = \{f \mid f \in I, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$. Wir nehmen an, daß auf der Menge G die T_0-Topologie u, auf der Menge H die T_0-Topologie v gegeben ist. Wir bezeichnen mit S die Menge aller stetigen Abbildungen des topologischen Raumes (G, u) in den topologischen Raum (H, v). Ferner setzen wir $S^2 = \{f \mid f \in S, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$. Für ein beliebiges Element $x \in G$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{U}(x)$ das System aller Umgebungen des Elementes x im Raume (G, u); ähnlich sei $\boldsymbol{V}(y)$ das System aller Umgebungen des Elementes y im Raume (H, v) für jedes $y \in H$.

2.1. Hilfssatz. *Es sei u die rechte, v eine allgemeine rechte Topologie. Dann ist $I = S$.*

Beweis. I. Es sei $f \in I$, $x \in G$, $V \in \boldsymbol{V}[f(x)]$, $x' \in E(x)$. Dann ist $x \leqslant x'$, also $f(x) \precsim f(x')$ und $f(x') \in E[f(x)] \subseteq V$. Daher ist $f^1[E(x)] \subseteq V$ und f ist stetig im Elemente $x \in G$. Also ist $f \in S$; daraus ergibt sich $I \subseteq S$.

II. Es sei $f \in S$, $x_1, x_2 \in G$, $x_1 \leqslant x_2$. Für jede Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x_1)$ gilt $x_2 \in U$. Es sei $V \in \boldsymbol{V}[f(x_1)]$ beliebig. Dann gibt es eine solche Umgebung $U_0 \in \boldsymbol{U}(x_1)$, daß $f^1(U_0) \subseteq V$ gilt. Daraus ergibt sich $f(x_2) \in f^1(U_0) \subseteq V$ für jedes $V \in \boldsymbol{V}[f(x_1)]$; also ist $f(x_2) \in \bigcap_{V \in \boldsymbol{V}[f(x_1)]} V = E[f(x_1)]$. Daher ist $f(x_1) \precsim f(x_2)$ und $f \in I$. Also ist $S \subseteq I$.

Wir haben bewiesen, daß $I = S$ gilt.

Bemerkung. Aus diesem Hilfssatz folgt das Resultat, welches in [2], St. 20, Ex. 3 angegeben ist.

2.2. Hilfssatz. *Die Menge $(G, \leqslant)$ sei keine Gegenkette und es gelte $S^2 \subseteq I^2$. Es sei $y_1, y_2 \in H$, $y_1 \neq y_2$, $y_2 \in \bigcap_{V \in \boldsymbol{V}(y_1)} V$.*

Dann ist $y_1 \precsim y_2$ oder $y_2 \precsim y_1$.

Beweis. Es gibt eine solche Umgebung $V_0 \in \boldsymbol{V}(y_2)$, daß $y_1 \in H - V_0$ gilt (Axiom T_0). Ferner gibt es solche Elemente $x_1, x_2 \in G$, daß $x_1 < x_2$ gilt. Es gibt eine solche Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x_1)$ [oder $U \in \boldsymbol{U}(x_2)$], daß $x_2 \in G - U$ [oder $x_1 \in G - U$] gilt. Wir können annehmen, daß U eine offene Menge ist. Wir setzen

$$g(t) = \begin{cases} y_1 & \text{für jedes} \quad t \in G - U, \\ y_2 & \text{für jedes} \quad t \in U. \end{cases}$$

Dann ist $g \in S^2 \subseteq I^2$, also $y_2 = g(x_1) \precsim g(x_2) = y_1$ [oder $y_1 = g(x_1) \precsim g(x_2) = y_2$].

2.3. Folgerung. *Es sei $(H, \precsim)$ eine Gegenkette, $(G, \leqslant)$ keine Gegenkette. Ist $S^2 \subseteq I^2$, so ist (H, v) ein T_1-Raum.*

2.4. Hilfssatz. *Die Mengen $(G, \leqslant)$, $(H, \precsim)$ seien keine Gegenketten und es gelte $I^2 = S^2$. Es gebe ein solches Element $y_0 \in H$ und eine solche Umgebung $V_0 \in \boldsymbol{V}(y_0)$, daß $V_0 \not\supseteq A(y_0)$ gilt. Dann sind folgende Behauptungen richtig:*

(A) *Zu jedem Element $x \in G$ gibt es eine solche Umgebung $U(x) \in \boldsymbol{U}(x)$, daß $U(x) \subseteq E(x)$ gilt.*

(B) *Für jedes Element $y \in H$ und jede Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y)$ gilt $V \supseteq E(y)$.*

---

[1] Im Buche [3] heißt diese Topologie allgemeine F-Topologie; in der Arbeit [4] erscheint sie unter dem Namen einer AU-Topologie.

[2] Es ist $I = H^G$, wo H^G die Kardinalpotenz im Sinne von Birkhoff ist; vgl. [1].

(C) *Für jedes Element $x \in G$ und jede Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x)$ gilt $U \supseteq E(x)$.*

Beweis. I. Ist x das kleinste Element der Menge G, so gilt $U \subseteq G = E(x)$ für jede Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x)$. Wir nehmen an, daß x kein kleinstes Element von G ist. Es sei $y_1 \in A(y_0) - V_0$ ein beliebiges Element. Wir setzen

$$h(t) = \begin{cases} y_0 & \text{für jedes} \quad t \in E(x)\,, \\ y_1 & \text{für jedes} \quad t \in G - E(x)\,. \end{cases}$$

Es ist $y_1 \precsim y_0$. Daraus folgt leicht $h \in I^2 \subseteq S^2$. Zu der Umgebung $V_0 \in \boldsymbol{V}[h(x)]$ gibt es daher eine solche Umgebung $U(x) \in \boldsymbol{U}(x)$, daß $h^1[U(x)] \subseteq V_0$, also $h^1[U(x)] = \{y_0\}$ gilt. Daraus ergibt sich $U(x) \subseteq E(x)$. Also ist (A) in Kraft.

II. Wir nehmen an, daß es solche Elemente $y_1, y_2 \in H$ und eine solche Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y_1)$ gibt, daß $y_2 \in E(y_1) - V$ gilt. Es sei $x \in G$ ein beliebiges Element. Ist x maximal in G, so gibt es nach (A) eine solche Umgebung $U(x) \in \boldsymbol{U}(x)$, daß $\{x\} \subseteq U(x) \subseteq E(x) \subseteq \{x\}$, also $U(x) = \{x\}$ gilt. Also ist x ein isoliertes Element des Raumes (G, u). Wenn x kein maximales Element von G ist, so gibt es ein solches Element $t_0 \in G$, daß $t_0 > x$ gilt. Wir setzen

$$k(t) = \begin{cases} y_2 & \text{für jedes} \quad t \in G,\ t > x\,, \\ y_1 & \text{für jedes} \quad t \in G,\ t \not> x\,. \end{cases}$$

Da $y_2 \succsim y_1$ gilt, so ist $k \in I^2 \subseteq S^2$. Also gibt es eine solche Umgebung $U'(x) \in \boldsymbol{U}(x)$, daß $k^1[U'(x)] \subseteq V$, d.h. $k^1[U'(x)] = \{y_1\}$ gilt. Daraus ergibt sich $U'(x) \subseteq \{t \mid t \in G,\ t \not> x\}$. Es gilt $\{x\} \subseteq U(x) \cap U'(x) \subseteq \{t \mid t \in G,\ t \geqslant x\} \cap \{t \mid t \in G,\ t \not> x\} = \{x\}$ nach (A). Ferner ist $\{x\} = U(x) \cap U'(x) \in \boldsymbol{U}(x)$; x ist daher ein isoliertes Element des Raumes (G, u).

Also ist jedes Element des Raumes (G, u) isoliert; daher ist jede Abbildung des Raumes (G, u) in den Raum (H, v) stetig.

Wir nehmen solche Elemente $x_1, x_2 \in G$, daß $x_1 < x_2$ ist. Ferner setzen wir

$$l(t) = \begin{cases} y_2 & \text{für jedes} \quad t \in G,\ t \leqslant x_1\,, \\ y_1 & \text{für jedes} \quad t \in G,\ t \not\leqslant x_1\,. \end{cases}$$

Dann ist $l \in S^2 = I^2$, was offenbar ein Widerspruch ist, da $l(x_1) = y_2 \succsim y_1 = l(x_2)$ gilt.

Also gilt $V \supseteq E(y)$ für jedes Element $y \in H$ und jede Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y)$. Daher ist (B) in Kraft.

III. Es sei $y_1, y_2 \in H$, $y_1 \precsim y_2$. Für jede Umgebung $V_1 \in \boldsymbol{V}(y_1)$ gilt $y_2 \in V_1$ nach (B). Also gibt es eine solche Umgebung $V_2 \in \boldsymbol{V}(y_2)$, daß $y_1 \in H - V_2$ gilt.

Wir nehmen an, daß es ein solches Element $x \in G$ und eine solche Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x)$ gibt, daß $U \not\supseteq E(x)$ gilt. Also gibt es ein Element $x' \in E(x) - U$. Es ist $x' > x$; wir können annehmen, daß U eine offene Menge ist. Wir setzen

$$m(t) = \begin{cases} y_2 & \text{für jedes} \quad t \in U\,, \\ y_1 & \text{für jedes} \quad t \in G - U\,. \end{cases}$$

Dann ist $m \in S^2 = I^2$, aber $m(x) = y_2 \succsim y_1 = m(x')$, was ein Widerspruch ist. Also ist (C) in Kraft.

2.5. Bemerkung. Offenbar sind auch die zu 2.1 und 2.4 dualen Hilfssätze richtig.

2.6. Satz. *Die Mengen $(G, \leqslant)$, $(H, \precsim)$ seien keine Gegenketten. Dann sind folgende drei Behauptungen äquivalent:*

(A) *u ist die rechte und v ist eine allgemeine rechte Topologie oder u ist die linke und v ist eine allgemeine linke Topologie.*

(B) $I = S$.

(C) $I^2 = S^2$.

Beweis. Wenn (A) gilt, so gilt (B) nach 2.1 und 2.5. Aus (B) folgt offenbar (C).

Es sei (C) in Kraft. Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Es gibt ein solches Element $y_0 \in H$ und eine solche Umgebung $V_0 \in \boldsymbol{V}(y_0)$, daß $V_0 \not\supseteq A(y_0)$ ist. Nach 2.4 (A), (C) ist $E(x)$ die kleinste Umgebung des Elementes x für jedes $x \in G$; also ist u die rechte Topologie. Es sei $y \in H$ ein beliebiges Element. Nach 2.4 (B) gilt $\bigcap_{V \in \boldsymbol{V}(y)} V \supseteq E(y)$. Wir nehmen an, daß es ein Element $y_1 \in \bigcap_{V \in \boldsymbol{V}(y)} V - E(y)$ gibt. Nach 2.2 und 2.4 (B) gilt $y \in E(y_1) \subseteq W$ für jede Umgebung $W \in \boldsymbol{V}(y_1)$. Also ist $y \in \bigcap_{W \in \boldsymbol{V}(y_1)} W$, $y_1 \in \bigcap_{V \in \boldsymbol{V}(y)} V$, $y \neq y_1$, was unmöglich ist, da das Axiom T_0 gilt. Daher ist $\bigcap_{V \in \boldsymbol{V}(y)} V = E(y)$; also ist v eine allgemeine rechte Topologie.

b) Für jedes Element $y \in H$ und für jede Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y)$ gilt $V \supseteq A(y)$. Wir nehmen solche Elemente $y_0, y_1 \in H$, daß $y_0 \precsim y_1$ gilt. Dann ist $y_0 \in A(y_1)$, also gilt $y_0 \in V$ für jede Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y_1)$. Nach T_0 gibt es eine solche Umgebung $V_0 \in \boldsymbol{V}(y_0)$, daß $y_1 \in E(y_0) - V_0$, d.h. $V_0 \not\supseteq E(y_0)$ gilt. Nach 2.2, 2.4, 2.5 folgt jetzt ähnlich wie sub a), daß u die linke und v eine allgemeine linke Topologie ist.

Also ist (A) in Kraft.

2.7. Satz. *Es sei $(G, \leqslant)$ eine Gegenkette. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *u ist die rechte (und zugleich die linke) Topologie.*

(B) $I = S$.

(C) $I^2 = S^2$.

Beweis. Wenn (A) in Kraft ist, ist jedes Element des Raumes (G, u) isoliert, also ist jede Abbildung des Raumes (G, u) in den Raum (H, v) stetig. Da $(G, \leqslant)$ eine Gegenkette ist, ist jede Abbildung der Menge $(G, \leqslant)$ in die Menge $(H, \preceq)$ isoton. Also ist $I = S$ und (B) ist in Kraft. Aus (B) folgt offenbar (C).

Es sei (C) in Kraft. Wir nehmen solche Elemente $y_1, y_2 \in H$, daß $y_1 \neq y_2$ gilt und daß es eine solche Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y_1)$ gibt, daß $y_2 \in H - V$ gilt. Es sei $x \in G$ ein beliebiges Element. Wir setzen

$$n(t) = \begin{cases} y_2 & \text{für jedes} \quad t \in G - \{x\}, \\ y_1 & \text{für} \quad t = x. \end{cases}$$

Dann ist $n \in I^2 = S^2$. Also gibt es eine solche Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(x)$, daß $n^1(U) \subseteq V$, d.h. $n^1(U) = \{y_1\}$ gilt. Daraus ergibt sich $U = \{x\}$. Für jedes $x \in G$ gilt daher $E(x) = A(x) = \{x\} \in \boldsymbol{U}(x)$. Also ist (A) in Kraft.

Es sei $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge. Für die Elemente $x, y \in G$ setzen wir xCy genau dann, wenn es eine solche natürliche Zahl n und solche Elemente $x = t_0, t_1, \ldots, t_n = y$ in G gibt, daß die Elemente t_{i-1}, t_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ vergleichbar sind. Die Relation C ist eine Äquivalenzrelation auf G; die Klassen dieser Relation nennen wir *Komponenten* der Menge $(G, \leqslant)$.

2.8. Satz. *Die Menge $(H, \preceq)$ sei eine Gegenkette, die Menge $(G, \leqslant)$ keine Gegenkette. Dann sind folgende Behauptungen* (A), (B) *äquivalent*:

(A) $I = S$.

(B) *Folgende zwei Bedingungen sind erfüllt:*

a) *Die Komponenten der Menge $(G, \leqslant)$ sind offen.*

b) *Für jede Äquivalenzrelation R auf G, zu welcher es eine solche als die Quotiententopologie gröbere Topologie w auf G/R und eine solche Teilmenge $H_0 \subseteq H$ gibt, daß die Räume $(G/R, w)$ und (H_0, v_{H_0}) homöomorph sind, gilt $R \geqslant C$.*

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Wir nehmen an, daß b) nicht gilt. Dann gibt es eine solche Äquivalenzrelation R_0 auf G, eine solche als die Quotiententopologie u_0 gröbere Topologie w_0 auf G/R_0, eine solche Teilmenge $H_0 \subseteq H$ und einen solchen Homöomorphismus p des Raumes $(G/R_0, w_0)$ auf (H_0, v_{H_0}), daß $R_0 \ngeqslant C$ gilt. Es sei ferner q die kanonische Abbildung der Menge G auf G/R_0 und e die identische Abbildung der Menge G/R_0 auf G/R_0. Dann ist q eine stetige Abbildung des Raumes (G, u) auf $(G/R_0, u_0)$, e eine stetige Abbildung des Raumes $(G/R_0, u_0)$ auf $(G/R_0, w_0)$, p eine stetige Abbildung des Raumes $(G/R_0, w_0)$ auf (H_0, v_{H_0}). Also ist $r = p \circ e \circ q$ [3] eine stetige Abbildung des Raumes (G, u) auf (H_0, v_{H_0}), d.h. $r \in S = I$. Da $R_0 \ngeqslant C$ gilt, gibt es eine solche Komponente $K \in G/C$ und solche Klassen $T_1, T_2 \in G/R_0$, $T_1 \neq T_2$, daß $T_1 \cap K \neq \emptyset \neq T_2 \cap K$ gilt. Wir nehmen beliebige Elemente $t_1 \in T_1 \cap K$, $t_2 \in T_2 \cap K$. Dann ist $q(t_1) = T_1 \neq T_2 = q(t_2)$, woraus $e[q(t_1)] \neq e[q(t_2)]$ und $r(t_1) = p\{e[q(t_1)]\} \neq p\{e[q(t_2)]\} = r(t_2)$ folgt, was offenbar ein Widerspruch ist, da für jedes $f \in I$ die Menge $f^1(K)$ nur ein Element enthält. Also ist (b) in Kraft.

[3] Sind A, B, C Mengen, f eine Abbildung der Menge A in B, g eine Abbildung der Menge B in C, so bezeichnen wir mit $g \circ f$ die durch die Gleichung $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ erklärte Abbildung.

Es sei $K_0 \in G/C$ eine beliebige Komponente. Wir nehmen solche Elemente $y_1, y_2 \in H$, zu welchen es eine solche Umgebung $V \in \boldsymbol{V}(y_1)$ gibt, daß $y_2 \in H - V$ gilt. Wir setzen

$$s(t) = \begin{cases} y_1 & \text{für jedes} \quad t \in K_0, \\ y_2 & \text{für jedes} \quad t \in G - K_0. \end{cases}$$

Dann ist $s \in I = S$. Also gibt es zu jedem Element $t \in K_0$ eine solche Umgebung $U \in \boldsymbol{U}(t)$, daß $s^1(U) \subseteq V$, d.h. $s^1(U) = \{y_1\}$ gilt. Also ist $U \subseteq K_0$ und die Komponente K_0 ist offen. Also ist (a) in Kraft.

Aus (A) folgt daher (B).

II. Es sei (B) in Kraft. Wir nehmen ein beliebiges Element $f \in I$. Offenbar ist f eine Abbildung, welche auf jeder Komponente konstant ist. Nach a) ist jede Komponente offen, also f stetig. Daraus ergibt sich $I \subseteq S$.

Es sei $f \in S$. Also ist f eine stetige Abbildung des Raumes (G, u) auf den Raum (H_0, v_{H_0}) für eine geeignete Menge $H_0 \subseteq H$. Zu dieser Abbildung gibt es eine solche Äquivalenzrelation R auf G, daß $G/R = \{f^{-1}(z) |\ z \in H_0\}$ gilt. f^{-1} ist offenbar eine schlichte Abbildung der Menge H_0 auf G/R. Wenn wir auf der Menge G/R die Topologie w konstruieren, für welche f^{-1} ein Homöomorphismus ist, so ist die kanonische Abbildung des Raumes (G, u) auf $(R/G, w)$ stetig; also ist w gröber als die Quotiententopologie auf G/R. Nach b) gilt $R \geqslant C$. Also ist f auf jeder Komponente von G konstant, d.h. $f \in I$. Daraus ergibt sich $S \subseteq I$.

Wir haben bewiesen, daß $I = S$ gilt. Aus (B) folgt daher (A).

2.9. Hilfssatz. *Es sei (G, u) ein topologischer Raum, (H, v) ein diskreter topologischer Raum, $M \subseteq G$ eine minimale ao-Menge von (G, u), $f \in S$ eine beliebige Abbildung. Dann ist f auf M konstant.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ ein beliebiges Element. Wir setzen $y_0 = f(x_0)$. Dann ist $\{y_0\}$ eine ao-Menge von (H, v), also ist $f^{-1}(y_0)$ eine ao-Menge von (G, u), für welche $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ gilt. Da M eine minimale ao-Menge von (G, u) ist und $x_0 \in M$ gilt, ist $M \subseteq f^{-1}(y_0)$. Also ist $f(x) = y_0$ für jedes Element $x \in M$.

2.10. Hilfssatz. *Es sei $(H, \preceq)$ eine Gegenkette, $(G, \leqslant)$ keine Gegenkette. Ist $I = S$, so ist v eine T_1-Topologie und jede Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ ist eine minimale ao-Menge des Raumes (G, u).*

Beweis. Nach 2.3 ist v eine T_1-Topologie. Nach 2.8 ist jede Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ offen; daraus ergibt sich leicht, daß sie eine ao-Menge des Raumes (G, u) ist.

Es sei K_0 eine Komponente der Menge $(G, \leqslant)$, welche keine minimale ao-Menge des Raumes (G, u) ist. Dann gibt es eine solche ao-Menge K_1 des Raumes (G, u), daß $K_1 \subseteq K_0$, $K_1 \neq K_0$ gilt. Es seien $y_1, y_2 \in H$, $y_1 \neq y_2$ beliebige Elemente. Wir setzen

$$z(t) = \begin{cases} y_1 & \text{für jedes } \quad t \in K_1, \\ y_2 & \text{für jedes } \quad t \in G - K_1. \end{cases}$$

Offenbar ist $z \in S = I$, was ein Widerspruch ist, da z auf K_0 nicht konstant ist.

2.11. Folgerung. *Es sei $(H, \preceq)$ eine Gegenkette, $(G, \leqslant)$ keine Gegenkette. Die Topologie v sei diskret. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) $I = S$.

(B) *Jede Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ ist eine minimale ao-Menge des Raumes (G, u).*

Beweis. Aus (A) folgt (B) nach 2.10. Es sei (B) in Kraft. Offenbar ist $I \subseteq S$. Es sei $f \in S$ ein beliebiges Element. Nach 2.9 ist $f \in I$. Also ist (A) in Kraft.

2.12. Folgerung. *Es sei $(H, \preceq)$ eine endliche Gegenkette, $(G, \leqslant)$ keine Gegenkette. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) $I = S$.

(B) *Jede Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ ist eine minimale ao-Menge des Raumes (G, u) und v ist eine T_1-Topologie.*

Beweis. (B) folgt aus (A) nach 2.10. Wenn (B) in Kraft ist, so folgt aus der Endlichkeit von H, daß v diskret ist. (A) folgt aus 2.11.

2.13. Folgerung. *Es sei $(G, \leqslant)$ eine endliche geordnete Menge, welche keine Gegenkette ist, $(H, \preceq)$ eine Gegenkette. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) $I = S$.

(B) *Jede Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ ist eine minimale ao-Menge des Raumes (G, u) und v ist eine T_1-Topologie.*

Beweis. Aus (A) folgt (B) nach 2.10. Es sei (B) in Kraft. Offenbar ist $I \subseteq S$. Es sei $f \in S$ ein beliebiges Element. Dann ist $f^1(G)$ eine endliche Teilmenge des T_1-Raumes (H, v), also ein diskreter Raum. Ferner ist f eine stetige Abbildung des Raumes (G, u) auf $(f^1(G), v_{f^1(G)})$. Nach 2.9 ist f auf jeder Komponente der Menge $(G, \leqslant)$ konstant. Daher ist $f \in I$. Also ist $S \subseteq I$ und $S = I$. Daraus ergibt sich, daß (A) in Kraft ist.

3. Rechte Topologie.

In diesem Absatz bezeichnen wir mit $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge, mit u die rechte Topologie auf G. Man sieht leicht ein, daß alle Hauptenden und infolgedessen auch alle Enden der Menge $(G, \leqslant)$ offene Mengen des Raumes (G, u) sind. Alle Enden einer beliebigen geordneten Menge bilden einen vollständigen Mengenring.

Das System aller offenen Mengen eines topologischen Raumes wird oft durch ein passendes Teilsystem definiert, z. B. durch eine Basis oder Subbasis. Hier werden wir den Begriff einer Quasibasis definieren.

Es sei $\boldsymbol{A}$ ein vollständiger Mengenring, d.h. ein nichtleeres System von Mengen, welches in bezug auf Summen und Durchschnitte beliebiger Teilsysteme abgeschlossen ist; dabei betrachten wir das kleinste Element O von $\boldsymbol{A}$ als Summe und das größte Element U von $\boldsymbol{A}$ als Durchschnitt des leeren Teilsystems von $\boldsymbol{A}$. Ein vollständiger Mengenring $\boldsymbol{C}$ heiße *Teilring von* $\boldsymbol{A}$, wenn $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$, $O \in \boldsymbol{C}$, $U \in \boldsymbol{C}$ gilt. Offenbar ist der Durchschnitt einer nicht leeren Menge von Teilringen von $\boldsymbol{A}$ ein Teilring von $\boldsymbol{A}$. Ist $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ und ist $\boldsymbol{C}$ der Durchschnitt aller Teilringe $\boldsymbol{D}$ von $\boldsymbol{A}$ mit Eigenschaft $\boldsymbol{D} \supseteq \boldsymbol{B}$, so heißt $\boldsymbol{C}$ der *durch* $\boldsymbol{B}$ *in* $\boldsymbol{A}$ *erzeugte Teilring*.

Es sei $\boldsymbol{A}$ ein vollständiger Mengenring, $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ seine Teilmenge. $\boldsymbol{B}$ soll eine *Quasibasis von* $\boldsymbol{A}$ heißen, wenn für den Teilring $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$, welcher in $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{B}$ erzeugt wird, die Beziehung $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$ richtig ist.

3.1. Hilfssatz. *Es sei $\boldsymbol{A}$ ein vollständiger Mengenring mit dem kleinsten Element O und mit dem größten Element U, es sei ferner $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *$\boldsymbol{B}$ ist eine Quasibasis von $\boldsymbol{A}$.*

(B) *Sind $x \in U - O$, $y \in U - O$, $A \in \boldsymbol{A}$ beliebige Elemente, für welche $x \in A$, $y \in U - A$ gilt, so gibt es ein solches Element $B \in \boldsymbol{B}$, daß $x \in B$, $y \in U - B$ gilt.*

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Wir nehmen an: Es gibt solche Elemente $x_0 \in U - O$, $y_0 \in U - O$, $A_0 \in \boldsymbol{A}$, daß $x_0 \in A_0$, $y_0 \in U - A_0$ gilt, daß aber entweder $x_0 \in B$, $y_0 \in B$ oder $x_0 \in U - B$, $y_0 \in U - B$ für jedes $B \in \boldsymbol{B}$ ist.

Das Element $A \in \boldsymbol{A}$ soll Element mit der Eigenschaft (α) heißen, wenn $x_0 \in A$, $y_0 \in A$ gilt. Das Element $A \in \boldsymbol{A}$ heiße Element mit der Eigenschaft (β), wenn $x_0 \in U - A$, $y_0 \in U - A$ gilt. Es sei $\boldsymbol{C}$ die Menge aller Elemente $A \in \boldsymbol{A}$, welche entweder die Eigenschaft (α) oder die Eigenschaft (β) haben.

Das System $\boldsymbol{C}$ ist ein vollständiger Mengenring. In der Tat: Es ist $O \in \boldsymbol{C}$, $U \in \boldsymbol{C}$. Es sei I eine Menge, $A_\iota \in \boldsymbol{C}$ für jedes $\iota \in \boldsymbol{I}$. Ist $I = \emptyset$, so ist $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota = O \in \boldsymbol{C}$, $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota = U \in \boldsymbol{C}$. Es sei also $I \neq \emptyset$. Wenn es mindestens einen solchen Index $\iota \in I$ gibt, daß A_ι die Eigenschaft (α) hat, so gilt $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \boldsymbol{A}$ und $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ hat die Eigenschaft (α). Daher ist $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota \in \boldsymbol{C}$.

Wenn alle A_ι $(\iota \in I)$ die Eigenschaft (β) haben, so gilt $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota \in \boldsymbol{A}$ und $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ hat die Eigenschaft (β). Also ist $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota \in \boldsymbol{C}$. Ähnlich zeigt man, daß $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota \in \boldsymbol{C}$ gilt. $\boldsymbol{C}$ ist daher ein Teilring von $\boldsymbol{A}$.

Ferner hat man $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A}$, da $A_0 \in \boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$ gilt. Also ist $\boldsymbol{B}$ keine Quasibasis des vollständigen Mengenringes $\boldsymbol{A}$, was ein Widerspruch ist. Daher ist (B) in Kraft.

II. Es sei (B) in Kraft. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{C}$ den Teilring, welcher in $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{B}$ erzeugt ist.

Für jedes Element $x \in U$ setzen wir $H(x) = \bigcap_{x\in A\in \boldsymbol{A}} A$. Für jedes $A_0 \in \boldsymbol{A}$ gilt $A_0 = \bigcup_{x \in A_0} H(x)$. In der Tat: Ist $A_0 = \emptyset$ (was nur im Falle $O = \emptyset$ möglich ist), ist die Formel richtig. Ist $A_0 \neq \emptyset$, so ist $A_0 \supseteq H(x)$ für jedes $x \in A_0$. Also ist $A_0 \supseteq \bigcup_{x\in A_0} H(x)$. Offenbar gilt $\bigcup_{x\in A_0} H(x) \supseteq A_0$. Also ist $A_0 = \bigcup_{x\in A_0} H(x)$.

Ferner werden wir zeigen, daß $H(x) \in \boldsymbol{C}$ für jedes $x \in U$ gilt.

Es sei erstens $x \in U-O$. Da $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ ist, so gilt $\bigcap_{x\in B\in\boldsymbol{B}} B \supseteq \bigcap_{x\in A\in\boldsymbol{A}} A = H(x)$. Wir nehmen an, daß es ein Element $y \in \bigcap_{x\in B\in\boldsymbol{B}} B - H(x)$ gibt. Dann ist $y \in U-O$. Offenbar gibt es ein solches Element $A_0 \in \boldsymbol{A}$, daß $x \in A_0$, $y \in U-A_0$ gilt; sonst wäre $y \in A$ für jedes $A \in \boldsymbol{A}$ mit der Eigenschaft $x \in A$, woraus sich $y \in \bigcap_{x\in A\in\boldsymbol{A}} A$ ergäbe, was ein Widerspruch ist. Laut Voraussetzung (B) gibt es ein solches Element $B_0 \in \boldsymbol{B}$, daß $x \in B_0$, $y \in U-B_0$ gilt. Daraus ergibt sich $y \in U - \bigcap_{x\in B\in\boldsymbol{B}} B$, was unmöglich ist. Also ist $H(x) = \bigcap_{x\in B\in\boldsymbol{B}} B \in \boldsymbol{C}$ für jedes $x \in U-O$.

Es sei zweitens $x \in O$. Dann ist $H(x) = O \in \boldsymbol{C}$.

Also ist $H(x) \in \boldsymbol{C}$ für jedes $x \in U$. Für jedes Element $A_0 \in \boldsymbol{A}$ gilt daher $A_0 = \bigcup_{x\in A_0} H(x) \in \boldsymbol{C}$. Daraus folgt $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$. Da offenbar $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{A}$ ist, so gilt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$. Also ist (A) in Kraft.

In der Arbeit [5] haben wir den Begriff einer Ordnungsbasis definiert. Es sei $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge, $\boldsymbol{B}$ ein System von Anfängen der Menge $(G, \leqslant)$, welches folgende Eigenschaft hat: Ist $x, y \in G$, $x \nleqslant y$, dann gibt es ein solches Element $B \in \boldsymbol{B}$, daß $y \in B$, $x \in G-B$ gilt. Dann heißt $\boldsymbol{B}$ eine *Ordnungsbasis* der Menge $(G, \leqslant)$. Dual wird eine duale Ordnungsbasis definiert:

Es sei $\boldsymbol{B}$ ein System von Enden einer geordneten Menge $(G, \leqslant)$. Dieses System heißt *duale Ordnungsbasis*, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in G$ mit der Eigenschaft $x \nleqslant y$ ein solches Element $B \in \boldsymbol{B}$ gibt, daß $x \in B$, $y \in G-B$ gilt.

3.2. Hilfssatz. *Es sei $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge, $\boldsymbol{B}$ eine Menge von Enden der Menge $(G, \leqslant)$. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(A) *$\boldsymbol{B}$ ist eine duale Ordnungsbasis der Menge $(G, \leqslant)$.*

(B) *$\boldsymbol{B}$ ist eine Quasibasis des Systems aller Enden der Menge $(G, \leqslant)$.*

Beweis. I. Es sei (A) in Kraft. Das kleinste Ende der Menge $(G, \leqslant)$ ist $\emptyset$. Es seien $x, y \in G$ Elemente, zu welchen es ein solches Ende E gibt, daß $x \in E$, $y \in G-E$ gilt. Dann ist $y \ngeqslant x$. Also gibt es ein solches Element $B \in \boldsymbol{B}$, daß $x \in B$, $y \in G-B$ gilt. Daher ist die Bedingung (B) aus 3.1 erfüllt; also ist $\boldsymbol{B}$ eine Quasibasis des Systems aller Enden der Menge $(G, \leqslant)$. Daher ist (B) in Kraft.

II. Es sei (B) in Kraft. Es seien $x, y \in G$ solche Elemente, daß $x \nleqslant y$ gilt. Dann ist $E(x) = \{t \mid t \in G,\ t \geqslant x\}$ ein Ende der Menge $(G, \leqslant)$; es gilt $x \in E(x)$, $y \in G-E(x)$. Nach 3.1 gibt es ein solches Element $B \in \boldsymbol{B}$, daß $x \in B$, $y \in G-B$ gilt. Also ist $\boldsymbol{B}$ eine duale Ordnungsbasis der Menge $(G, \leqslant)$. Daher ist (A) in Kraft.

Es sei (G, u) ein topologischer Raum, dessen System aller offenen Mengen ein vollständiger Mengenring ist. Es sei $\mathfrak{m}$ die minimale Kardinalzahl, zu der es eine solche Quasibasis $\boldsymbol{B}$ des Systems aller offenen Mengen des Raumes (G, u) gibt, daß $\mathrm{card}\,\boldsymbol{B} = \mathfrak{m}$ gilt. Dann heißt $\mathfrak{m}$ *Quasigewicht* des Raumes (G, u) und wird mit $qw(G, u)$ bezeichnet.

Es sei $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge mit der Eigenschaft $\mathit{card}\, G \geqslant 2$, u die entsprechende rechte Topologie auf G. Nach 3.2 ist $qw(G, u)$ die minimale Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, zu der es eine duale Ordnungsbasis $\boldsymbol{B}$ der Menge $(G, \leqslant)$ mit der Eigenschaft $\mathit{card}\, \boldsymbol{B} = \mathfrak{m}$ gibt. Aus Korollar 1 in der Arbeit [5] folgt

3.3. Satz. *Es sei $(G, \leqslant)$ eine geordnete Menge mit der Eigenschaft $\mathit{card}\, G \geqslant 2$, u die entsprechende rechte Topologie auf G. Die Kardinalzahl $qw(G, u)$ ist die kleinste Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ mit folgender Eigenschaft: Die Menge $(G, \leqslant)$ ist zu einer geeigneten Teilmenge der Kardinalpotenz $\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}$ isomorph* (4).

3.4. Bemerkung. Es sei $(G, \leqslant)$ eine unendliche Kette, $\mathfrak{m}$ die kleinste Kardinalzahl mit der Eigenschaft, daß $(G, \leqslant)$ zu einer geeigneten Teilmenge der Kardinalpotenz $\mathbf{2}^{\mathfrak{m}}$ isomorph ist. Aus [5] folgt, daß $\mathfrak{m}$ zugleich das Minimum von Kardinalzahlen der in $(G, \leqslant)$ dichten Teilmengen ist. Aus diesem Ergebnis läßt sich ahnen, daß $\mathfrak{m}$ durch topologische Begriffe ausgedrückt werden kann. Die topologische Charakterisierung von $\mathfrak{m}$ wird in 3.3 angegeben.

(4) $\mathbf{2}$ ist eine Kette mit zwei Elementen, $\mathfrak{m}$ ist eine Gegenkette, deren Kardinalzahl gleich $\mathfrak{m}$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, rev. ed. New York 1948.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale, Eléments de Mathématique II*, première partie *Les structures fondamentales de l'analyse*, livre III, Paris 1940.

[3] E. Čech, *Topologické prostory*, Nakl. ČSAV, Praha 1959.

[4] — *Topologické prostory*, Čas. pěst. mat. a fys. 66 (1937) S. D 225-264.

[5] M. Novotný, *Bemerkung über die Darstellung teilweise geordneter Mengen*, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, 369 (1955), S. 451-458.

Reçu par la Rédaction le 20. 4. 1964

Some applications of the notions of forcing and generic sets *

by

S. Feferman (Stanford, Calif.)

1. The notions of *forcing* and of *generic* sets were introduced by Paul Cohen [2], [3] to settle the long-outstanding problems of the logical interrelationships of the axiom of constructibility, the axiom of choice, and the continuum hypothesis, relative to the system of Zermelo-Fraenkel set theory. In this paper we consider extensions of these notions to other contexts, namely that of (1st order) number theory and of a part of (2nd order) analysis, and obtain some applications there (§§ 2 and 3). These results depend on a general *transform* lemma concerning forcing; this is proved in § 2 below. By means of this lemma we are also able to obtain some new applications of Cohen's methods in set theory (§ 4). The most interesting of these are the following: (1) No set-theoretically definable well-ordering of the continuum can be proved to exist from the Zermelo-Fraenkel axioms together with the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. (2) The prime ideal theorem in Boolean algebra is independent of the Zermelo-Fraenkel axioms. (Both results depend, of course, on the hypothesis of consistency of Zermelo-Fraenkel set theory.)

The notion of forcing is syntactic and the notion of generic (sequence of) sets is obtained directly from it. However, the motivations behind the introduction of these notions are essentially model-theoretic. In broad terms, what is involved is the following. One starts with a certain language L, whose structures $\mathcal{M}$ we are interested in. L is extended to an auxiliary language $L^* = L^*(S_0, \ldots, S_n, \ldots)$ containing (a finite or infinite sequence of) symbols $S_0, \ldots, S_n, \ldots$, $n < \delta \leqslant \omega$, for the generic sets $S_0, \ldots, S_n, \ldots$ to be defined. L* also contains means to denote the members of a structure $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*(S_0, \ldots, S_n, \ldots)$ of objects constructed in certain ways from the $S_0, \ldots, S_n, \ldots$ Every L*-structure thus determines an L-structure.

* Text of a talk given under this title at the International Symposium on the Theory of Models held at Berkeley, June 25-July 11, 1963. A summary of the main definitions and results of this paper is to appear under the same title in the proceedings of that Symposium.