sequently $G^n/A^n \approx G^n/A^n[p]/A^n/A^n[p] \approx G^{n+1}/A^{n+1}$ and by induction on n $G/A = G^0/A^0 \approx G^n/A^n \approx G^M/A^M \approx B$. The first part of the proof is finished.

If $G/A = B$, $p^M G = 0$ and invariants of groups G, A, B are $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, then we put $G^0 = G$, $A^0 = A$, $G^{n+1} = G^n/A^n[p]$, $A^{n+1} = A^n/A^n[p]$ and let $\mathfrak{a}^n, \mathfrak{g}^n$ be invariants of A^n, G^n, $n = 0, 1, \ldots, M$. It is clear that the relations $T(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{a}^{i+1}, \mathfrak{g}^{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, M-1$, hold. Moreover, $G^n/A^n \approx G^{n+1}/A^{n+1}$ and $A^M = 0$; thus $B = G/A \approx G^0/A^0 \approx G^M/A^M \approx G^M$ and finally $\mathfrak{g}^M = \mathfrak{b}$. Hence the relation $E(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hold.

Remark'. If $A \subset G$ and p primary components of G are of bounded order, then by relations (1) and (2) it follows that there exists a homomorphic mapping of G onto A. Since a group $G/G[p]$ may be embedded in G, it is easy to see that the group $B = G/A$ may be embedded in G. Consequently the conditions (4.9) and (4.10) of [1] are equivalent.

References

[1] S. Balcerzyk, *On classes of abelian groups*, Fund. Math. 51 (1962), pp. 149-178.
[2] L. Fuchs, *Abelian groups*, Budapest 1958.

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1964

Universalmengen bezüglich der Lage im E^n

von

H. G. Bothe (Berlin)

1. Einleitung, die Mengen M_n^m. Mit E^n bezeichnen wir stets den n-dimensionalen euklidischen Raum, den wir auf ein festes kartesisches Koordinatensystem bezogen denken. Sind A und B zwei homöomorphe Teilmengen von E^n, so sagen wir, daß A und B die gleiche Lage im E^n haben, falls es einen Homöomorphismus von E^n auf sich gibt, der A auf B abbildet. Gibt es einen Homöomorphismus von E^n auf sich, der A auf eine Teilmenge von B abbildet, so sagen wir, daß sich A im E^n lagetreu in B einbetten läßt.

Ist $\mathfrak{S}$ ein System von topologischen Räumen, so nennt man einen Raum U aus $\mathfrak{S}$ Universalmenge von $\mathfrak{S}$, falls sich jeder Raum aus $\mathfrak{S}$ topologisch (d.h. homöomorph) in U einbetten läßt. Ist $\mathfrak{S}^*$ ein System von Teilmengen des E^n (n fest), so liegt es nahe, nach Universalmengen von $\mathfrak{S}^*$ bzgl. der Lage zu fragen. Dabei soll eine Menge U^* aus $\mathfrak{S}^*$ eine Universalmenge von $\mathfrak{S}^*$ bzgl. der Lage im E^n heißen, falls sich jede Menge aus $\mathfrak{S}^*$ lagetreu in U^* einbetten läßt. Ähnlich wie bei den gewöhnlichen Universalmengen liegt die Frage nach m-dimensionalen Universalmengen bzgl. der Lage im E^n nahe. Eine kompakte m-dimensionale Teilmenge U von E^n soll m-dimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^n heißen, falls sich jedes m-dimensionale Teilkompaktum A von E^n lagetreu in U einbetten läßt, falls es also stets einen Homöomorphismus h von E^n auf sich gibt, der A auf eine Teilmenge von U abbildet. In dieser Arbeit soll die Frage nach der Existenz derartiger Universalmengen in einigen Fällen beantwortet werden. Wir betrachten nämlich naheliegende Verallgemeinerungen der bekannten Mengerschen Universalmengen und entscheiden, in welchen Fällen diese Mengen m-dimensionale Universalmengen bzgl. der Lage im E^n sind. Ehe wir jedoch die genauen Ergebnisse angeben, sollen die zu betrachtenden Mengen (wir bezeichnen sie mit M_n^m) definiert werden.

Mit W_e^n bezeichnen wir stets den n-dimensionalen Einheitswürfel im E^n, d.h. die Menge aller Punkte $p = (\xi_i, \ldots, \xi_n)$, deren Koordinaten die Ungleichungen $0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ befriedigen. Ist $i \geqslant 1$ eine ganze Zahl, so sei D_i die Vereinigung aller offenen Intervalle

$(3^{-i}k, 3^{-i}(k+1))$, wobei k alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 3^i durchläuft, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen. Wir setzen $F_i = [0,1]\setminus D_i$ ($[0,1]$ ist das abgeschlossene Intervall zwischen 0 und 1). Sodann sei für $0 \leqslant r \leqslant n$ F_i^r die Menge aller der Punkte aus W_e^n, von deren Koordinaten wenigstens r zu F_i gehören. Es sei $M_n^m = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Ist $n = 2m+1$, so ist M_n^m gerade die m-dimensionale Mengersche Universalmenge. (Die Universalität der Menge M_n^m wurde zuerst von Lefschetz [7] bewiesen. Einen anderen Beweis findet man in [3].)

Wir wollen zeigen, daß M_n^m m-dimensional ist. Da M_n^m die durch $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\xi_j = 0$ $(j = m+1, \ldots, n)$ definierte Menge enthält, genügt es zu zeigen, daß M_n^m höchstens m-dimensional ist. Dazu konstruieren wir zu einer beliebigen positiven Zahl ε eine ε-Abbildung in ein m-dimensionales Polyeder (siehe [5], Seite 72). Wählen wir i genügend groß, so gibt es eine stetige Abbildung φ von $[0,1]$ auf sich, die jede Zahl um weniger als ε/n verrückt und die jede Zahl aus F_{i+1} auf eine der Zahlen $3^{-i}k$ $(k = 0, 1, \ldots, 3^i)$ abbildet. Setzen wir für $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in M_n^m$ stets $f(p) = \big(\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_n)\big)$, so ist f eine ε-Abbildung, die die Menge M_n^m in das m-dimensionale Polyeder überführt, das aus allen Punkten des Würfels W_e^n besteht, von deren Koordinaten wenigstens $n-m$ die Gestalt $3^{-i}k$ $(k = 0, 1, \ldots, 3^i)$ haben.

Da der n-dimensionale Würfel $W_e^n = M_n^n$ eine n-dimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^n ist, brauchen wir den Fall $m = n$ nicht weiter zu untersuchen, so daß wir in Zukunft stets $0 \leqslant m < n$ voraussetzen. Das Hauptergebnis dieser Arbeit lautet: *Die Menge M_n^m ist dann und nur dann eine m-dimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^n, wenn $m = n-1$ oder wenn $m = n-2$ und $m \neq 1$ ist.*

Zum Schluß der Arbeit wird noch auf den Fall $m = 1$, $n = 3$ eingegangen und gezeigt, daß sich jedes eindimensionale Kompaktum im E^3, das Vereinigung von höchstens abzählbar vielen ANR-Mengen ist, im E^3 lagetreu in M_3^1 d.h. in die gewöhnliche Sierpińskische Universalkurve einbetten läßt.

Ein zum großen Teil offenes Problem ist es, ob in den Fällen, wo die Mengen M_n^m keine m-dimensionalen Universalmengen bzgl. der Lage im E^n sind, überhaupt m-dimensionale Universalmengen bzgl. der Lage im E^n existieren. Eine Ausnahme bilden die Fälle $m = 0$ oder $m = 1$, $n = 3$; denn in einer folgenden Arbeit wird gezeigt werden, daß keine nulldimensionale und keine eindimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^3 existiert.

2. Die Mengen N_n^m.

Die Menge N_n^m bestehe aus allen Punkten des Einheitswürfels W_e^n, von deren Koordinaten höchstens m rational sind. Ist $n = 2m+1$, so ist N_n^m die bekannte Nöbelingsche Universalmenge (siehe z.B. [5], Seite 64). Im Falle $0 \leqslant m < n$ kann man sich N_n^m auf folgende Weise definiert denken: Sind $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \leqslant n$ ganze Zahlen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ beliebige rationale Zahlen aus dem Intervall $[0,1]$, so sei $W(i_1, \ldots, i_{m+1}; \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1})$ die Menge aller Punkte $p = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ aus W_e^n, deren Koordinaten den Gleichungen $\xi_{i_j} = \alpha_j$ $(j = 1, \ldots, m+1)$ genügen. Die Mengen $W(i_1, \ldots, i_{m+1}; \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1})$ sind $(n-m-1)$-dimensionale Würfel. Es gibt offenbar abzählbar viele derartige Würfel, und wir können sie in einer Folge $W_1, W_2, \ldots$ anordnen. Dann gilt

$$(1) \qquad N_n^m = W_e^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i .$$

In [3] wurde gezeigt, daß im Falle $n = 2m+1$ zu jedem in N_n^m enthaltenen Kompaktum A ein Homöomorphismus h von W_e^n auf sich existiert, der A auf eine Teilmenge von M_n^m abbildet. Dieser Homöomorphismus h läßt sich natürlich zu einem Homöomorphismus von ganz E^n auf sich ausdehnen. Da sich der in [3] angegebene Beweis fast wörtlich auf den Fall beliebiger Dimensionszahlen $0 \leqslant m < n$ übertragen läßt, erhalten wir folgende Aussage:

(2) *Ist $0 \leqslant m < n$ und A ein in N_n^m enthaltenes Kompaktum, so gibt es einen Homöomorphismus des Raumes E^n auf sich, der A in M_n^m abbildet.*

3. ε-Homöomorphismen.

Ist p ein Punkt aus E^n, so wollen wir den Abstand $\varrho(p, o)$ des Punktes p vom Koordinatenursprung $o = (0, \ldots, 0)$ mit $\varrho(p)$ bezeichnen. Ist $\varrho > 0$, so sei $K(\varrho)$ die aus allen Punkten p mit $\varrho(p) \leqslant \varrho$ bestehende Kugel. Ist ε eine positive Zahl und h ein Homöomorphismus von E^n auf sich, so nennen wir h einen *ε-Homöomorphismus*, falls für alle Punkte p aus $K(1/\varepsilon)$ stets $\varrho\big(p, h(p)\big) < \varepsilon$ gilt.

(3) *Ist h ein ε-Homöomorphismus von E^n auf sich und $\varepsilon < 1$, so ist h^{-1} ein $[\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{-1}]$-Homöomorphismus.*

Zum Beweis braucht man nur zu bemerken, daß $K(1/\varepsilon - \varepsilon) = \big(K(1-\varepsilon^2)/\varepsilon\big)$ in $h\big(K(1/\varepsilon)\big)$ enthalten ist.

(4) *Ist g ein Homöomorphismus von E^n auf sich und ε eine positive Zahl, so gibt es eine positive Zahl δ mit der Eigenschaft, daß für jeden δ-Homöomorphismus h die Abbildung $g^{-1}hg$ ein ε-Homöomorphismus von E^n auf sich ist.*

Zum Beweis berücksichtige man, daß g^{-1} auf jedem Kompaktum gleichmäßig stetig ist.

(5) *Es sei $h_1, h_2, \ldots$ eine Folge von Homöomorphismen des E^n auf sich, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge von positiven Zahlen und $f_i = h_i h_{i-1} \ldots h_1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Wir setzen voraus, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *h_i ist ein ε_i-Homöomorphismus $(i = 1, 2, \ldots)$.*

(b) $\varepsilon_i \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots)$; $\varepsilon_1 < 1$.

(c) $\varepsilon_i \leqslant \frac{1}{6}\inf \varrho\big(f_{i-1}(p), f_{i-1}(q)\big)$, *wobei* (p, q) *alle Paare von Punkten aus* $K(1/\varepsilon_i)$ *mit* $\varrho(p, q) \geqslant 1/i$ *durchläuft* $(i = 2, 3, \ldots)$.

Dann gibt es eine Folge $f_1^*, f_1^*, \ldots$ *von Homöomorphismen des* E^n *auf sich, die gegen einen Homöomorphismus* f^* *von* E^n *auf sich konvergiert und wobei stets* f_i^* *auf der Menge* $K(1/\varepsilon_1)$ *mit* f_i *übereinstimmt.*

Beweis. Aus (b) folgt $h_i\big(K(1/\varepsilon_i)\big) \subset K(1/\varepsilon_{i+1})$. Es ist nicht schwer, Homöomorphismen $h_1^*, h_2^*, \ldots$ des E^n auf sich zu konstruieren, so daß h_i^* auf $K(1/\varepsilon_i)$ mit h_i übereinstimmt und für alle Punkte p aus E^n die Ungleichung $\varrho\big(h_i^*(p)\big) < \varrho(p) + \varepsilon_i$ gilt. Wir setzen $f_i^* = h_i^* \ldots h_1^*$. Sicher gibt es zu jedem Punkt p einen Index i, so daß $f_i^*(p)$ in $K(1/\varepsilon_i)$ liegt. Da für jedes i der Homöomorphismus h_i^* ein ε_i-Homöomorphismus ist, folgt hieraus und aus (b) sofort, daß die Folge $f_1^*, f_2^*, \ldots$ gegen eine stetige Abbildung f^* von E^n in sich konvergiert. Wir wollen jetzt zeigen, daß f^* eineindeutig ist. Es seien dazu p und q zwei verschiedene Punkte. Wir können einen Index i so groß wählen, daß die Punkte $f_i^*(p), f_i^*(q)$, $p' = f_i^{-1}f_i^*(p)$ und $q' = f_i^{-1}f_i^*(q)$ alle in $K(1/\varepsilon_i)$ liegen und $\varrho(p', q') \geqslant 1/i$ wird. Dann gilt für $j \geqslant i$ stets $f_j^*(p) = f_j(p')$ und $f_j^*(q) = f_j(q')$. Aus (b) und (c) folgt für $j > i$

$$\varrho\big(f_j(p'), f_i(p')\big) < 2\varepsilon_{i+1} \leqslant \tfrac{1}{3}\varrho\big(f_i(p'), f_i(q')\big).$$

Da das gleiche für q' gilt, erhalten wir

$$\varrho\big(f_j^*(p), f_j^*(q)\big) = \varrho\big(f_j(p'), f_j(q')\big) > \tfrac{1}{3}\varrho\big(f_i(p'), f_i(q')\big) \qquad (j > i).$$

Es kann also nicht $f^*(p) = f^*(q)$ sein.

Um zu zeigen, daß f^* eine Abbildung auf ganz E^n ist, denke man daran, daß für $f_i^*(p) \in K(1/\varepsilon_i)$ stets $\varrho\big(f^*(p), f_i^*(p)\big) \leqslant \varepsilon_i$ gilt, daß also $K(1/\varepsilon_i - \varepsilon_i)$ in $f^* f_i^{*-1}\big(K(1/\varepsilon_i)\big)$ enthalten ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß f^* ein Homöomorphismus ist. Das wird jedoch klar, wenn man daran denkt, daß f^* auf jeder kompakten Kugel $K(1/\varepsilon_i)$ ein Homöomorphismus sein muß.

4. Eine hinreichende Bedingung für die Einbettbarkeit in M_n^m.

Satz 1. *Es sei* A *ein in* E^n *enthaltenes Kompaktum mit folgender Eigenschaft: Zu jeder zahmen* $(n-m-1)$*-dimensionalen Zelle* [1] Z *im* E^n *und jedem positiven* ε *gibt es einen* ε*-Homöomorphismus* h_ε *von* E^n *auf sich, für den* $h_\varepsilon(Z) \cap A = 0$ *wird. Dann gibt es einen Homöomorphismus von* E^n *auf sich, der* A *in die Menge* M_n^m *abbildet.*

[1] Eine zahme r-dimensionale Zelle im E^n ist das Bild eines r-dimensionalen abgeschlossenen Würfels im E^n bei einem Homöomorphismus von E^n auf sich.

Beweis. Wegen (2) genügt es einen Homöomorphismus von E^n auf sich zu finden, der A in N_n^m abbildet. Da man A natürlich durch einen Homöomorphismus von E^n auf sich in den Würfel W_e^n abbilden kann, dürfen wir voraussetzen, daß A eine im Innern von W_e^n, also im Innern von $K(n)$, gelegene Menge ist. Wir denken uns die Menge N_n^m gemäß (1) in der Form $W_e^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ dargestellt, wobei die Mengen W_i $(n-m-1)$-dimensionale Würfel sind. Ist g ein Homöomorphismus von E^n auf sich, so folgt aus den Bemerkungen (3) und (4), daß es zu jeder positiven Zahl ε und zu jedem Index i einen ε-Homöomorphismus h von E^n auf sich mit der Eigenschaft $h\big(g(A)\big) \cap W_i = 0$ gibt.

Wir konstruieren nun eine Folge $h_1, h_2, \ldots$ von Homöomorphismen des E^n auf sich und zwei Folgen von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots$, so daß, falls wir wieder $f_i = h_i \ldots h_1$ setzen, für die Folgen $h_1, h_2, \ldots$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Voraussetzungen (a), (b) und (c) der Bemerkung (5) aus Abschnitt 3 erfüllt sind und außerdem noch die folgenden Bedingungen gelten:

(d) $f_i(A) \subseteq \mathring{W}_e^n$ $(i = 1, 2, \ldots$; $\mathring{W}_e^n$ ist die Menge der inneren Punkte von $W_e^n)$.

(e) $\varrho\big(f_i(A), W_j\big) > \delta_j$ für $j \leqslant i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

(f) $\varepsilon_1 \leqslant 1/n$.

Mit dieser Konstruktion ist der Beweis des Satzes 1 beendet, denn man prüft leicht nach, daß der in (5) mit f^* bezeichnete Homöomorphismus von E^n auf sich die Menge A in N_n^m abbildet.

Die Folgen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$; $h_1, h_2, \ldots$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sollen schrittweise konstruiert werden, und zwar werden wir im k-ten Schritt die Objekte ε_k, h_k und δ_k festlegen.

1. Schritt: Wir wählen ε_1 so klein, daß $\varepsilon_1 \leqslant 1/n$ und $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}\varrho(A, E^n \setminus W_e^n)$ wird. Dann können wir den Homöomorphismus h_1 von E^n auf sich so bestimmen, daß h_1 ein ε_1-Homöomorphismus ist und $h_1(A) \cap W_1 = 0$ wird. Die Zahl δ_1 setzen wir dann gleich $\frac{1}{2}\varrho\big(f_1(A), W_1\big)$.

Nun nehmen wir an, ε_i, h_i und δ_i seien für $1 \leqslant i \leqslant k-1$ bereits so festgelegt, daß die Bedingungen (a), (b) (c) (d) und (e) für $1 \leqslant i \leqslant k-1$ erfüllt sind.

k-ter Schritt: Wir wählen ε_k so klein daß ε_k den Forderungen (b) und (c) genügt. Außerdem gelte

$$\varepsilon_k \leqslant \tfrac{1}{2}\varrho\big(f_{k-1}(A), E^n \setminus W_e^n\big)$$

$$\varepsilon_k \leqslant \tfrac{1}{2}\big[\varrho\big(f_{k-1}(A), W_j\big) - \delta_j\big] \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Der Homöomorphismus h_k von E^n auf sich sei dann ein ε_k-Homöomorphismus für den $h_k(f_{k-1}(A)) \cap W_k = 0$ ist. Schließlich setzen wir noch $\delta_k = \frac{1}{2}\varrho(f_k(A), W_k)$.

5. Der Fall $n = m+1$. Es sei $m \geqslant 0$, $n = m+1$ und A ein m-dimensionales Kompaktum im E^n. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt; denn da jetzt $n-m-1 = 0$ ist, sind die $(n-m-1)$-dimensionalen Zellen in diesem Falle einpunktige Mengen, und da die Menge A keine inneren Punkte im E^n besitzen kann, gibt es zu jeder solchen Zelle $Z = \{p\}$ und jedem positiven ε eine Translation von E^n, die die Punkte von E^n um weniger als ε verrückt und die p aus A herausschiebt. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Ist $m \geqslant 0$ und A ein m-dimensionales Kompaktum im E^{m+1}, so läßt sich A im E^{m+1} lagtreu in M einbetten. M^m_{m+1} ist also eine m-dimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^{m+1}.*

6. Ein Hilfssatz. Bei der Behandlung des Falles $n = m+2$ werden wir den folgenden Hilfssatz heranziehen:

Hilfssatz 1. *Wir machen folgende Voraussetzungen: $n \geqslant 4$; W^n ist ein n-dimensionaler Würfel im E^n; W_1^{n-1} und W_2^{n-1} sind zwei gegenüberliegende $(n-1)$-dimensionale Seiten von W^n; p_1 und p_2 sind zwei Punkte im Innern von W_1^{n-1} bzw. W_2^{n-1}; B ist ein endlicher Streckenzug, der p_1 mit p_2 verbindet und der mit Ausnahme seiner Endpunkte p_1 und p_2 ganz im Innern von W^n liegt. Dann gibt es einen Homöomorphismus von W^n auf sich, der die Randpunkte von W^n festläßt und der B auf die Strecke $[p_1, p_2]$ abbildet.*

Beweis. Einen inneren Punkt eines beliebigen (endlichen) Streckenzuges S, der nicht im Innern einer in S enthaltenen Strecke liegt, nennen wir Knickpunkt von S. Sind a und b die Endpunkte und $r_1, \ldots, r_t$ die in der Reihenfolge von a nach b gezählten Knickpunkte eines Streckenzuges S, so soll S mit $[a, r_1, \ldots, r_t, b]$ bezeichnet werden. Unter der Distanz zweier Streckenzüge $[a, r_1, \ldots, r_t, b]$ und $[a, r_1', \ldots, r_t', b]$ mit den gleichen Endpunkten und der gleichen Anzahl von Knickpunkten verstehen wir die Zahl $\max \varrho(r_i, r_i')$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Man beweist dann leicht die folgende Bemerkung: Ist B der im Hilfssatz vorgegebene Streckenzug, so gibt es eine positive Zahl ε mit der Eigenschaft, daß zu jedem Streckenzug B' mit den Endpunkten p_1 und p_2, dessen Distanz von B höchstens ε ist, ein Homöomorphismus von W^n auf sich existiert, der alle Randpunkte von W^n festläßt und B auf B' abbildet. Nach dieser Bemerkung ist es leicht, einen Homöomorphismus h von W^n auf sich zu finden, der alle Randpunkte von W^n festläßt und der B auf einen Streckenzug $B' = [p_1, r_1, \ldots, r_t, p_2]$ mit der gleichen Anzahl von Knickpunkten abbildet, bei dem der Durchschnitt des von p_1, r_1 und r_2 aufgespannten Dreiecks mit B' nur aus den Strecken $[p_1, r_1]$ und $[r_1, r_2]$ besteht ($r_2 = p_2$, falls $t = 1$). Hierbei benutzt man die Voraussetzung $n \geqslant 4$. Hierauf ist es leicht, einen zweiten Homöomorphismus g von W^n auf sich anzugeben, der die Randpunkte von W^n und die Punkte aus $B' \setminus ([p_1, r_1] \cup [r_1, r_2])$ festläßt und $[p_1, r_1] \cup [r_1, r_2]$ auf die Strecke $[p_1, r_2]$ abbildet. Der Homöomorphismus gh von W^n auf sich läßt ebenfalls alle Randpunkte von W^n fest und bildet B auf einen Streckenzug ab, der einen Knickpunkt weniger besitzt als B. Indem man dieses Verfahren eventuell mehrmals anwendet, führt man B in die Strecke $[p_1, p_2]$ über, und der Hilfssatz 1 ist bewiesen.

7. Der Fall $n = m+2$. In [4] wurde ein Beispiel eines eindimensionalen Teilkompaktums von E^3 angegeben, das sich im E^3 nicht lagetreu in M_3^1 einbetten läßt. Hier werden wir zeigen, daß für $m \neq 1$ und $n = m+2$ alle m-dimensionalen Kompakta im E^n die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllen, so daß der folgende Satz bewiesen wird:

Satz 3. *Ist $m \geqslant 0$, $m \neq 1$ und A ein m-dimensionales Kompaktum im E^{m+2}, so läßt sich A im E^{m+2} lagetreu in die Menge M^m_{m+2} einbetten. M^m_{m+2} ist für $m \neq 1$ also eine m-dimensionale Universalmenge bzgl. der Lage im E^{m+2}.*

Zum Beweis haben wir nachzuweisen, daß es zu jedem m-dimensionalen Kompaktum A im E^n $(n = m+2,\ m \neq 1)$, zu jedem zahmen Bogen B im E^n und zu jedem positiven ε einen ε-Homöomorphismus h von E^n auf sich gibt, für den $h(B) \cap A = 0$ wird. Indem man die Bemerkung (4) aus Abschnitt 3 berücksichtigt, darf man voraussetzen, daß der Bogen B die Strecke $[o, e]$ mit dem Endpunkten $o = (0, \ldots, 0)$ und $e = (1, 0, \ldots, 0)$ ist.

Zunächst zerlegen wir $B = [o, e]$ in t Teilstrecken $[c_0, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_{t-1}, c_t]$ der Länge t^{-1}, wobei wir t größer als $2\sqrt{n}\varepsilon^{-1}$ wählen ($c_0 = o$, $c_t = e$). Sodann betrachten wir für $k = 1, 2, \ldots, t$ die durch

$$t^{-1}(k-1) \leqslant \xi_1 \leqslant t^{-1}k; \quad -(2t)^{-1} \leqslant \xi_i \leqslant (2t)^{-1} \quad (i = 2, \ldots, n)$$

definierten n-dimensionalen Würfel W_k. Der Durchmesser dieser Würfel ist kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$. Die Punkte c_{k-1} und c_k sind die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden $(n-1)$-dimensionalen Seiten von W_k. Da A in E^n nirgends dicht liegt, gibt es eine Translation h_1 von E^n, die die Punkte um weniger als $\frac{1}{2}\varepsilon$ verrückt und für die keiner der Punkte $h_1(c_i)$ in A liegt $(i = 0, 1, \ldots, t)$. Zur Abkürzung wollen wir die Punkte $h_1(c_i)$ mit c_i' und die Würfel $h_1(W_i)$ mit W_i' bezeichnen. Da A $(n-2)$-dimensional ist, gibt es zu jedem k einen Streckenzug L_k, der c_{k-1}' mit c_k' verbindet, mit Ausnahme seiner Endpunkte ganz im Innern von W_k' liegt und der zu A fremd ist (siehe [1], Seite 208). Zu jedem k gibt es dann einen Homöomorphismus g_k von W'_k auf sich, der die Randpunkte von W'_k festläßt und der die Strecke $[c'_{k-1}, c'_k]$ auf L_k abbildet. (Ist $m > 1$, so folgt das aus Hilfssatz 1, während es im Falle $m = 0$ Folge eines Satzes über Ausdehnungen von Homöomorphismen der Ebene ist. Siehe [6], Seite 381.) Definieren wir einen Homöomorphismus h_2 von E^n auf sich, indem wir

$$h_2(p) = \begin{cases} g_k(p) & \text{für} \quad p \in W'_k, \\ p & \text{für} \quad p \in E^n \setminus \bigcup_{k=1}^{t} W'_k \end{cases}$$

setzen, so ist h_2 ein $\frac{1}{2}\varepsilon$-Homöomorphismus mit $h_2 h_1(B) \cap A = 0$. Da $h = h_2 h_1$ ein ε-Homöomorphismus ist, ist damit der Satz 3 bewiesen.

8. Der Fall $n \geqslant m+3$. Wir wollen hier zeigen, daß es im Falle $0 \leqslant m \leqslant n-3$ im E^n ein m-dimensionales Kompaktum gibt, daß sich im E^n nicht lagetreu in M_n^m einbetten läßt. Es gibt dann sogar ein nulldimensionales Kompaktum im E^n, das sich nicht lagetreu in M_n^m einbetten läßt. Dazu beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 2. *Ist $0 \leqslant m \leqslant n-3$ und C ein in M_n^m enthaltenes Kompaktum, so ist die Menge $E^n \setminus C$ einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es sei f eine stetige Abbildung der Kreislinie L in $E^n \setminus C$. Da $f(L)$ von C einen positiven Abstand hat, gibt es eine zu f homotope Abbildung f_1 von L in $E^n \setminus C$, bei der die Bildmenge $f_1(L)$ ein einfach geschlossenes Polygon ist, dessen Strecken zu Koordinatenachsen parallel sind. Außerdem können wir f_1 so wählen, daß es zu jedem Eckpunkt p von $f_1(L)$ einen Index i gibt, so daß keine Koordinate von p in F_i liegt (siehe Abschnitt 1). Da die Strecken von $f_1(L)$ zu Koordinatenachsen parallel sind, gibt es zu jedem Punkt q auf $f_1(L)$ ein i, so daß höchstens eine Koordinate von q zu F_i gehört. Verschieben wir $f_1(L)$ parallel zur ξ_1-Achse, so gibt es zu jedem Punkt r, der bei dieser Verschiebung überstrichen wird, einen Index i, für den höchsten zwei Koordinaten von r zu F_i gehören. Da $n-m \geqslant 3$ ist, folgt aus der Definition von M_n^m, daß bei der Verschiebung von $f_1(L)$ kein Punkt von M_n^m berührt wird. Auf diese Weise können wir $f_1(L)$ aus dem M_n^m enthaltenden Einheitswürfel W_e^n hinausschieben und dann außerhalb von W_e^n auf einen Punkt zusammenziehen. Damit ist gezeigt, daß f homotop trivial ist.

In [2] wurde ein nulldimensionales Kompaktum A im E^n konstruiert, dessen Komplement $E^n \setminus A$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Wie aus dem Hilfssatz 2 folgt, läßt sich A im E^n nicht lagetreu in M_n^m einbetten. Natürlich gibt es dann auch ein m-dimensionales Kompaktum im E^n mit dieser Eigenschaft.

9. Der Fall $m = 1$, $n = 3$. Wir wollen hier zeigen, daß jedes eindimensionale Kompaktum im E^3, das Vereinigung von höchstens abzählbar vielen ANR-Mengen (²) ist, im E^3 lagetreu in M_3^1 eingebettet werden kann. Von K. Sieklucki [8] wurde folgende Eigenschaft der ANR-Mengen bewiesen:

Ist A eine eindimensionale ANR-Menge und $\mathfrak{S}$ ein System von paarweise disjunkten eindimensionalen kompakten Teilmengen von A, so ist $\mathfrak{S}$ höchstens abzählbar.

Da die Vereinigung von abzählbar vielen kompakten nulldimensionalen Mengen wieder nulldimensional ist (siehe [5], Seite 30), kann auch ein eindimensionales Kompaktum, das Vereinigung von abzählbar vielen ANR-Mengen ist, nicht überabzählbar viele paarweise disjunkte kompakte eindimensionale Teilmengen enthalten, und unsere Behauptung ist in folgendem Satz enthalten.

SATZ 4. *Ist A ein Kompaktum im E^3, das nicht überabzählbar viele paarweise disjunkte eindimensionale abgeschlossene Teilmengen enthält, so läßt sich A im E^3 lagetreu in M_3^1 einbetten.*

Beweis. Nach Satz 1 und der Bemerkung (4) aus Abschnitt 3 brauchen wir nur zu zeigen, daß es zu jeder Menge A mit den angegebenen Eigenschaften und zu jedem positiven $\varepsilon < 1$ einen ε-Homöomorphismus h von E^3 auf sich gibt, für den $h([o, e]) \cap A = 0$ gilt. ($[o, e]$ ist wieder die Strecke mit den Endpunkten $o = (0, 0, 0)$ und $e = (1, 0, 0)$.) Es sei E^2 eine zur ξ_1-Achse parallele Ebene, die von dieser Achse höchstens den Abstand $\frac{1}{2}\varepsilon$ hat und die A in einer höchstens nulldimensionalen Menge schneidet (nach den Voraussetzungen über A existiert eine solche Ebene). Es sei h_1 eine Translation von E^3, die die Punkte um höchstens $\frac{1}{2}\varepsilon$ verschiebt und $[o, e]$ in E^2 abbildet. Da $E^2 \cap A$ nulldimensional oder leer ist, kann man wie beim Fall $m = 0$, $n = 2$ des Beweises von Satz 3 einen Homöomorphismus h'_2 von E^2 auf sich konstruieren, der jeden Punkt um weniger als $\frac{1}{2}\varepsilon$ verrückt und für den $h'_2(h_1([0, 1])) \cap A = 0$ wird. Die Abbildung h'_2 läßt sich zu einem $\frac{1}{2}\varepsilon$-Homöomorphismus h_2 von E^3 auf sich fortsetzen. Der Homöomorphismus $h = h_2 h_1$ von E^3 auf sich hat dann alle verlangten Eigenschaften.

(²) Unter einer ANR-Menge (d. h. unter einem absoluten Umgebungsretrakt) verstehen wir einen kompakten metrischen Raum Y mit folgender Eigenschaft: Ist X ein metrischer Raum, X_0 eine abgeschlossene Teilmenge von X und f eine stetige Abbildung von X_0 in Y, so läßt sich f zu einer stetigen Abbildung einer in X gebildeten Umgebung von X_0 in Y fortsetzen (siehe z.B. [6], Seite 259).

Literaturverzeichnis

[1] P. S. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Mathem. Annalen 106 (1932), S. 161-238.

[2] W. A. Blankinship, *Generalisation of a construction of Antoine*, Ann. of Math. 53 (1951), S. 276-297.

[3] H. G. Bothe, *Eine Einbettung m-dimensionaler Mengen in einen (m+1)-dimensionalen absoluten Retrakt*, Fund. Math. 52 (1963), S. 209-224.

[4] — *Ein eindimensionales Kompaktum im E^3, das sich nicht lagetreu in die Mengersche Universalkurve einbetten läßt*, Fund. Math. 54 (1964), S. 251-258.

[5] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton 1948.

[6] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952.

[7] S. Lefschetz, *On compact spaces*, Ann. of Math. 32 (1931), S. 521-538.

[8] K. Sieklucki, *A generalisation of a theorem of K. Borsuk concerning the dimension of ANR-sets*, Bull. Acad. Pol. Sc., Sér. Sci. Math. Astr. Phys., 10 (1962), S. 433-436.

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1964

Confluent mappings and unicoherence of continua

by

J. J. Charatonik (Wrocław)

§ 1. Introduction. A new kind of continuous mappings will be introduced and studied in this paper, namely the notion of *confluent mapping* (¹), which comprises, among other mappings, interior, monotone and, for locally connected continua, also quasi-monotone mappings.

In particular, some theorems concerning the invariance of unicoherence and of hereditary unicoherence, known only for some of the three kinds of continuous mappings quoted above, will be generalized to confluent mappings (theorems X and XIV). This task has arisen from investigations of dendroids (see [1] and [2]) and is intended to be applied to them (see § 6).

The essentiality of the hypotheses assumed will be shown by examples (see the final parts of § 3 and § 5).

I am very much indebted to Professor B. Knaster, who contributed to my investigations his kind advice and valuable improvements.

§ 2. Definitions and preliminary properties. A continuous mapping f of a topological space X onto a topological space Y is *confluent* if for every subcontinuum Q of Y each component of the inverse image $f^{-1}(Q)$ is mapped by f onto Q.

Confluent mappings have the following properties I-VII:

I. *If f is a confluent mapping of X onto Y, B is a subset of Y, and A is the union of some components of $f^{-1}(B)$, then the partial mapping $g=f|A$ is a confluent mapping of A onto $f(A)$.*

Proof (²). Let Q be a subcontinuum of $f(A)$ and C a component of $g^{-1}(Q)$. Since

$$g^{-1}(Q)=A\cap f^{-1}(Q)\,, \tag{1}$$

C lies in a component C' of $f^{-1}(Q)$. It follows from $C\subset A$ that

$$0\neq C=A\cap C\subset A\cap C'\,, \tag{2}$$

(¹) denomination by Professor B. Knaster.
(²) simplified by A. Lelek.