References

[1] E. H. Connell, *On properties of analytic functions*, Duke Math. Journ. 28 (1961), pp. 73-81.

[2] — and P. Porcelli, *An algorithm of J. Schur and the Taylor series*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), pp. 232-235.

[3] M. A. Denjoy, *Sur la continuité des fonctions analytique singuliéres*, Bull. Soc. Math. 60 (1932), pp. 27-105.

[4] R. L. Plunkett, *A topological proof of the continuity of the derivative of a function of a complex variable*, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), pp. 1-4.

[5] P. Porcelli and E. H. Connell, *A proof of the power series expansion without Cauchy's formula*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), pp. 177-181.

[6] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, Monografie Matematyczne 28, Warszawa 1952, pp. 225-230.

[7] C. J. Titus and G. S. Young, *The extension of interiority with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), pp. 329-340.

[8] G. T. Whyburn, *Topological analysis*, Princeton, N. J., 1951, pp. vii-119.

[9] — *Developments in topological analysis*, Fund. Math. 50 (1962), pp. 305-318.

LOUISIANA STATE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 17. 8. 1963

Sur les demi-groupes compacts et connexes

par

R. P. Hunter* et **L. W. Anderson*** (University Park, Penn.)

Nous nsioorodnsé certains aspects de la structure des demi-groupes compacts et connexes, c'est-à-dire, nous étudions la question de l'existence de divers types de sous continus. Nous avons recours à la notion suivante (voir [2]). On dit qu'un tel demi-groupe S est algébriquement irréductible entre les points a et b lorsque ces deux points ne se laissent unir par aucun sous-demi-groupe compact et connexe qui soit différent de S. Il s'ensuit d'après la manière classique qu'un demi-groupe compact et connexe contient un sous-demi-groupe compact, connexe et algébriquement irréductible entre chaque couple de ses points. La terminologie suit généralement cela de [13].

THÉORÈME 1. *Soit S un demi-groupe compact et connexe algébriquement irréductible entre son identité e et son zéro z. Alors H , le sous-groupe maximal contenant e, est un continu.*

Démonstration. Soit C le composant de H_e qui contient e. Nous supposons, au contraire, que $C \neq H_e$. Puisque le quotient H_e/C est un groupe compact et $\dim(H_e/C) = 0$, il existe des petits sous-groupes de H contenant C qui sont ouverts et fermés. Donc, il existe des ouverts V et O tels que $V \cap H_e \neq \emptyset$, $C \subset O$, $z \notin V^* \cup O^*$, $T = H_e \cap O$ est un sous-groupe, $V^* \cap O^* = \emptyset$, et $H_e \subset V \cup O$. Puisque $TT = T$, il existe un ouvert W tel que $T \subset W \subset O$ et $WW \subset O$. Soit S_1 l'idéal bilatère engendré par l'ensemble fermé $S - V - W$. Donc S_1 est un idéal fermé, et puisque $H_e \subset V \cup W$, l'on a aussi, $S_1 \cap H_e = \emptyset$. Il découle que $S - S_1 = V' \cup W'$ où V' et W' sont des ouverts contenus dans V et W respectivement. En particulier, $S_1 = S - V' - W'$ est un idéal et $W'W' \cap V' = \emptyset$. On sait, [3], qu'il existe un sous-continu M tel que $e \in H_e \cap M$, $M \subset W'$ et $M - H_e \neq \emptyset$. Soit X le demi-groupe compact et connexe engendré par M.

$$X = (M \cup M^2 \cup M^3 \cup \dots)^* .$$

Nous démontrons d'adorq que $V' \cap X = \emptyset$.

* Avec l'appui de The National Science Foundation NSF GP 237 et NSF GP 610.

Supposant, au contraire, que $V' \cap X \neq \emptyset$, il existe un élément de la forme
$$m_1 m_2 m_3 \dots m_q \in V', \quad m_i \in M.$$

Nous pouvons supposer que q soit le plus petit tel entier. Donc,
$$m_1 m_2 m_3 \dots m_{q-1} \notin V' \quad \text{et l'on a,} \quad m_1 \cdot m_2 \dots m_{q-1} \in S_1$$
ou $m_1 \cdot m_2 \dots m_{q-1} \in W'$ car $S_1 \cup V' \cup W' = S$. Si $m_1 m_2 \dots m_{q-1} \in S_1$, il s'ensuit que $(m_1 m_2 \dots m_{q-1}) m_q \in S_1 m_q \subset S_1$.

Si $m_1 m_2 \dots m_{q-1} \in W'$ l'on a $(m_1 m_2 \dots m_{q-1}) m_q \in W' m_q \subset W'W'$ et puisque $W'W' \cap V' = \emptyset$, l'on a
$$m_1 \cdot m_2 \dots m_q \notin V'.$$
C'est-à-dire, dans chaque cas, on a une contradiction. Ainsi, $X \cap V' = \emptyset$.

Soit x un élément quelconque de $X - H_e$. Donc, SxS est un idéal compact et connexe qui ne contient aucun élément de H_e. (On sait bien que $S - H_e$ est un idéal.) Ainsi, $X \cup SxS$ est un sous-demi-groupe compact et connexe différent de S. C'est une contradiction. Ainsi, H_e est un continu.

COROLLAIRE 1. *Soit S un demi-groupe compact et connexe, avec identité e, qui n'est pas un groupe. Alors, si H_e est dispersé, S contient un sous-demi-groupe M, compact connexe et non-dégénéré, tel que*
$$M \cap H_e = \{e\}.$$

Démonstration. Ayant recours à un sous-continu qui est un demi-groupe algébriquement irréductible entre le noyau K et e, le corollaire suit du théorème 1.

COROLLAIRE 2. *Soit S un demi-groupe compact et connexe avec identité e. Si S peut être immergé dans E^2 et n'est pas un groupe, alors S contient un sous-demi-groupe M, compact, connexe et non-dégénéré, tel que*
$$M \cap H_e = \{e\}.$$

Démonstration. Soit M un sous-continu qui est un demi-groupe algébriquement irréductible entre $k \in K$ et e. Après le théorème 1, $M \cap H_e$ est un continu. Ainsi, puisque $S \subset E^2$, $M \cap H_e = \{e\}$ ou $M \cap H_e$ est une courbe simple fermée. Dans ce cas-ci il s'ensuit que M contient un idéal J tel que le quotient M/J peut être immergé dans E^2. (L'existence d'un tel idéal J suit car $M - (M \cap H_e)$ est connexe.) Alors, le demi-groupe M/J est compact, connexe avec identité et zéro. On sait bien qu'un tel demi-groupe ne peut pas être un séparateur de l'espace E^2. Puisque $H_e \cap M$ n'est pas un séparateur de M/J mais est un séparateur de E^2, il découle que M/J est un disque, dont la frontière soit H_e. Le théorème suit de la structure connue d'un tel demi-groupe [4].

Selon une petite modification de la démonstration du théorème 1, on peut démontrer comme suit:

Soit S un demi-groupe compact et connexe avec identité e et zéro z. Si C_e est la composante de H_e qui contient e, alors S contient un sous demi-groupe M, compact et connexe, tel que
$$z \in M, \quad M \cap H_e = C_e.$$

Quant à la notion d'un demi-groupe compact connexe et algébriquement irréductible entre zéro et identité, après [5] la structure est plutôt bien connue si le demi-groupe soit abélien. Bien entendu, la structure peut être très compliquée. A ce moment, sauf les résultats donnés, ici, on ne sait pratiquement rien du cas non-abélien.

En résumé nous nous avons le résultat suivant:

Soit S un demi-groupe, compact et connexe avec identité e, qui n'est pas un groupe. Alors, il existe un sous-demigroupe M compact et connexe (non-dégénéré) tel que
$$M \cap H_e = \{e\},$$
dans chacun des cas suivants:

(1) *S est abélien* [5].

(2) *H_e est dispersé.*

(3) *S est immergé dans E^2.*

Rappelons les équivalences de Green [9]: Soient S un demi-groupe quelconque et $a, b \in S$.
$$a \equiv b\,(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow Sa \cup a = Sb \cup b,$$
$$a \equiv b\,(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow a \cup aS = b \cup bS,$$
$$a \equiv b\,(\mathfrak{J}) \Leftrightarrow a \cup Sa \cup aS \cup SaS = b \cup Sb \cup bS \cup SbS.$$
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R} \quad \text{et, finalement,} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{L} \circ \mathfrak{R},$$
$a \equiv b\,(\mathfrak{D})$ veut dire qu'il existe un élément c tel que $a \equiv c\,(\mathfrak{L})$ et $c \equiv b\,(\mathfrak{R})$. Il s'ensuit, [9], que $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ \mathfrak{L} = \mathfrak{D}$.

Koch et Wallace ont montré que $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ pour un demi-groupe compact. (Plus généralement, l'on a $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ pour un demi-groupe stable [8].)

THÉORÈME 2. *Soit S un demi-groupe compact et connexe tel que chaque $\mathfrak{L}$-classe contienne un idempotent. Alors, E est un continu.*

Démonstration. Nous considérons d'abord, le cas dans lequel S ait un zéro. D'après un résultat de Koch, [6], il suffit à démontre que pour chaque idempotent $e \neq z$ et chaque ouvert V, $e \in V$, il existe un idempotent f tel que $f \in V - e$ et $efe = f$. Pour voir cela, on remarque d'abord qu'il existe une suite $\{e_i\}$ des idempotents qui converge vers un idempotent $g \in L_e$. Puisque $ege = e$, il découle que la suite $\{ee_ie\}$ converge vers e. Il sufit facilement, en choisissant les points e_i dans $Se-L_e$, que $ee_ie \neq e$ pour tout i. Il découle alors que E est un continu. Si S ne contient pas un zéro, c'est-à-dire, si K est non-dégénéré, nous utilisons le quotient S/K et remarquons que $E \cap K$ est un continu.

THÉORÈME 3. *Soit S un demi-groupe compact et connexe tel que E est connexe. Alors, si $e \in E-K$, il existe $k \in K \cap E$ et un arc $[k, e]$ tels que $[k, e]$ est un sous-demi-groupe, $[k, e] \subset E$, et $[k, e] \cap K = \{k\}$.*

Démonstration. D'abord on considère le quotient de Rees S/K. Ayant recours au théorèm de [6], il s'ensuit qu'il existe un arc $[\{K\}, e]$ qui est un demi-groupe composé entierement des idempotents. Soit α: $S \to S/K$ l'application canonique. Donc, $\left[\alpha^{-1}\left\{[(\{K\}, e]\}\right\}\right]^*$ est un demi-roupe compact et connexe. Il découle d'après la démonstration du théorème 6 de [12] que $\left[\alpha^{-1}\{(\{K\}, e]\}\right]^* - \alpha^{-1}\{(\{K\}, e]\} = \{k\}$ est dégénéré. Ainsi, $[k, e]$ est un arc contenu dans E et $[k, e] \cap K = \{k\}$.

On sait qu'un demi-groupe régulier satisfait aux hypothèses des théorèmes 2 et 3 (voir [7]).

Plus généralement, nous remarquons le résultat suivant:

THÉORÈME 4. *Soit S un demi-groupe compact et connexe qui n'est pas un groupe. Si chaque $\mathfrak{D}$-classe D satisfait à la condition $D^2 \cap D \neq \emptyset$, alors, S satisfait aux hypothèses de théorèmes 2 et 3.*

Démonstration. Scient $x, y \in D$ tels que $xy \in D$. Il s'ensuit d'après [1] ou [7] que $xS \cap D = R_x =$ la $\mathfrak{R}$-classe de x et que $Sy \cap D = L_y =$ la $\mathfrak{L}$-classe de y. Ainsi, $xy \in R_x \cap L_y$. Il découle d'après le théorème 3 de [7] que $R_y \cap L_x$ contient un idempotent. Ainsi, puisque D est régulier, d'après le théorème 1 de [7], chaque $\mathfrak{L}$-classe contient un idempotent. Ainsi, les hypothèses des théorèmes 2 et 3 sont remplis.

Dans cette note nous nous sommes intéressés aux sous continus qui sont, à la même fois, des sous-demi-groupes.

Quant à la question de l'existence des sous-continus spéciaux d'une autre sorte, qui ne sont pas nécéssairement sous-demi-groupes, par example, on doit mentionner le résultat suivant [10]:

Soit S un demi-groupe compact et connexe avec identité. Si H est une $\mathfrak{H}$-classe tel que $H \neq K$, l'idéal minimal, alors pour chaque point $h \in H$, il existe un sous-continu non-dégénéré X tel que

$$X \cap H = \{h\}.$$

On voit sans peine que la condition $H \neq K$ est nécéssaire. En effet si $H = K$, alors il peut arriver que H soit un $\mathfrak{C}$-ensemble. (Voir [11].)

Travaux cités

[1] L. W. Anderson, R. P. Hunter, R. J. Koch, *Some results on stability in semigroups* (à paraître). Trans., A. M. S.

[2] R. P. Hunter, N. J. Rothman, *Characters and cross sections in semigroups*, Duke Math. J. 29 (1962), p. 347-366.

[3] — *On a conjecture of Koch*, Proceedings A. M. S. 12 (1961), pp. 138-136.

[4] P. Mostert, A. Shields, *On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary*, Annals Math. 65 (1957), p. 117-143.

[5] R. P. Hunter, *On homogroups and their applications to the theory of compact connected semigroups*, Fund. Math. [1] (1963), p. 69-102.

[6] R. J. Koch, *Arcs in partially ordered spaces*, Pacific J. Math. 9 (1959), p. 723-728.

[7] A. H. Clifford, D. D. Miller, *Regular $\mathfrak{D}$-classes in semigroups*, Trans. A. M. S. 82 (1956), p. 270-280.

[8] R. J. Koch, A. D. Wallace, *Stability in semigroups*, Duke Math. J. 24, (1957), p. 193-196.

[9] J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. 54 (1951), p. 163-172.

[10] L. W. Anderson, R. P. Hunter, *Small continua at certain orbits*, Archiv der Mathematik, Fasc. 4/5, vol. XIV (1963), p. 350-353.

[11] R. P. Hunter, *Sur la position des $\mathfrak{C}$-ensembles dans les semi-groupes*, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Tome XIV, Fasc. 2 (1962), p. 190-195.

[12] — *Note on arcs in semigroups*, Fund. Math. 49 (1961), p. 233-245.

[13] A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. A. M. S. (1955), p. 95-112.

Reçu par la Rédaction le 30. 9. 1963