Sur les familles d'ensembles infinis des nombres naturels

Complément à la note de Fund. Math. XLIX (1961), p. 151-155

par

W. Sierpiński (Warszawa)

Le but de cette Note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I. *Il existe une famille F de puissance du continu d'ensembles infinis distincts de nombres naturels telle que aucun des ensembles E de la famille F n'est contenu dans une somme finie d'ensembles de F autres que E.*

THÉORÈME II. *Quelle que soit la famille infinie F d'ensembles infinis distincts de nombres naturels, il existe une suite infinie d'ensembles $E_i \epsilon F$ pour $i=1,2,\ldots$, telle que $E \subset E_1+E_2+\ldots$ pour $E \epsilon F$.*

Démonstration du théorème I. Comme j'ai démontré (l. cit. p. 153) il existe une famille F de puissance du continu d'ensembles infinis distincts de nombres naturels ayant deux à deux un nombre fini $\geqslant 0$ d'éléments communs. Je dis que la famille F satisfait au théorème I. En effet, soit $E_1+E_2+\ldots+E_n$ une somme finie d'ensembles E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ de la famille F. Supposons que $E \subset E_1+$ $+E_2+\ldots+E_n$, ce qui donne $E=EE_1+EE_2+\ldots+EE_n$. L'ensemble E étant infini, un au moins des ensembles EE_i $(i=1,2,\ldots,n)$ est infini, contrairement à la définition de la famille F. Le théorème I est ainsi démontré.

Démonstration du théorème II. Soit F une famille infinie d'ensembles infinis distincts de nombres naturels et soit S la somme de tous les ensembles de la famille F. S est donc un ensemble infini de nombres naturels; soit $S=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Il vient $E \subset S$ pour $E \epsilon F$. Pour $i=1,2,\ldots$, on a $a_i \epsilon S$ et vu la définition de l'ensemble S, il existe (au moins un) ensemble de la famille F, soit E_i, tel que $a_i \epsilon E_i$. On a donc $S \subset E_1+E_2+\ldots$, et à plus forte raison, $E \subset E_1+E_2+\ldots$ pour $E \epsilon F$. Le théorème II se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'il résulte tout de suite du théorème II que *si F est une famille indénombrable d'ensembles infinis distincts de nombres naturels, il existe un ensemble E de la famille F et une suite infinie E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ d'ensembles de la famille F autres que E et tels que $E \subset E_1 + E_2 + \ldots$*

Il en résulte que dans le théorème I le terme finie ne peut pas être remplacé par dénombrable.

Reçu par la Rédaction le 3. 1. 1964

Invariant Borel sets

by

Dana Scott (Stanford)

Let $N = 0, 1, 2, \ldots,$ be the set of non-negative integers, and let Γ be a group of permutations of N. Each permutation of N induces in the obvious way a permutation of the product space 2^N which is continuous in the usual product topology on 2^N. With this topology 2^N is of course homeomorphic to Cantor's Discontinuum, and so the theory of Borel subsets of 2^N is well understood. We shall let the whole group Γ act on 2^N and ask which subsets of 2^N invariant under Γ are Borel. The main result presented in Section 1 shows that, under suitable conditions on Γ, *every minimal Γ-invariant subset of 2^N is a Borel set*. By a *minimal Γ-invariant set* we understand a non-empty set invariant under the action of Γ which includes no smaller such set. In other words, the orbits under Γ of single points of 2^N are exactly the minimal Γ-invariant sets.

In Section 2 we shall apply the main result to solve a problem of Kuratowski and will thereby show that several kinds of interesting subsets of the space of all sets of rational numbers are actually Borel sets. Previously it was only clear that these sets were analytic sets. The method applied to this problem is then generalized to give a useful, more abstract result.

In Section 3 it is shown, with the aid of the abstract result of Section 2, that certain subsets of the (complete metric) space of all closed subsets of Cantor's Discontinuum are likewise Borel sets. The interesting question (proposed to the author by David Freedman of the University of California, Berkeley) of whether these conclusions extend to the space of closed cubsets of an arbitrary compact metric space will be discussed, but unfortunately the methods of this paper do not seem to give the answer.

The author has to admit that metamathematical considerations originally led to the main result. Indeed the main theorem is a generalization of the author's result about the possibility of characterizing countable relational structures up to isomorphism using sentences from a certain infinitary first-order language. Further information about the metamathematical results can be found in [4]. For the sake of the author's