Sur une équation aux différences finies et une caractérisation fonctionnelle des polynômes

par

M. Kuczma (Kraków)

Le sujet de cette note est l'équation aux différences finies

$$g(x+1)-g(x) = \varphi(x)\,, \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée. Nous démontrerons ici un théorème sur l'existence et l'unicité des solutions convexes d'ordres supérieurs de l'équation (1). Ce théorème nous permettra de donner une caractérisation fonctionnelle des polynômes.

Au § 1 nous exposons les définitions et les résultats dont nous profiterons dans la suite. Le § 2 contient le résultat principal concernant l'équation (1). Il se rattache au résultat de W. Krull [4] et sa démonstration est même analogue. Enfin, au § 3 nous en déduisons la caractérisation annoncée des polynômes.

Dans tout le travail nous ne considérons que des fonctions réelles d'une variable réelle.

§ 1. Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle (a, b).

DÉFINITION 1. L'expression $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ définie par les relations récurrentes

$$[x_1; f] = f(x_1)\,,$$

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, \ldots, x_{n+1}; f]-[x_1, \ldots, x_n; f]}{x_{n+1}-x_1}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

($x_1, \ldots, x_{n+1}$ distincts, appartenant à (a, b)) sera appelée *différence divisée d'ordre* n de la fonction $f(x)$ pour les points $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

La différence divisée $[x_1, \ldots, x_{n+1}; f]$ peut aussi être écrite sous la forme

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{U(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)}{V(x_1, \ldots, x_{n+1})}\,,$$

où

$$U(x_1, \ldots, x_{n+1}; f) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

et $V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = U(x_1, \ldots, x_{n+1}; x^n)$ est le déterminant de Vandermonde (v. [12], [14]).

Définition 2. L'expression $\Delta_h^n f(x)$ définie par les relations récurrentes

$$\Delta_h^0 f(x) = f(x),$$
$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h^{n-1} f(x+h) - \Delta_h^{n-1} f(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$(x, x+nh \in (a, b),\ h > 0)$ sera appelée $n^{\text{ième}}$ *différence* de la fonction $f(x)$ pour l'accroissement h.

La différence divisée d'ordre n et la $n^{\text{ième}}$ différence d'une fonction $f(x)$ sont liées par la relation

$$\Delta_h^n f(x_1) = n!\,h^n [x_1, \ldots, x_{n+1}; f], \tag{2}$$

où

$$x_{i+1} = x_1 + ih, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Définition 3. Nous désignerons par $\mathcal{M}(a, b)$ la classe des fonctions mesurables dans l'intervalle (a, b) et par $C^n(a, b)$ la classe des fonctions possédant une $n^{\text{ième}}$ dérivée continue dans (a, b) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ainsi $C^0(a, b)$ est la classe des fonctions continues dans (a, b).

Définition 4. Nous désignerons par $M_+^n(a, b)$ la classe des fonctions $f(x)$ telles que

$$[x_1, \ldots, x_{n+2}; f] \geqslant 0 \tag{4}$$

pour tous les $x_1, \ldots, x_{n+2}$ distincts, appartenant à (a, b). Nous désignerons par $M_-^n(a, b)$ la classe des fonctions $f(x)$ telles que

$$[x_1, \ldots, x_{n+2}; f] \leqslant 0 \tag{5}$$

pour tous les $x_1, \ldots, x_{n+2}$ distincts, appartenant à (a, b). Enfin nous posons

$$M^n(a, b) = M_+^n(a, b) \cup M_-^n(a, b). \tag{6}$$

Les fonctions de la classe $M^n(a, b)$ seront appelées *fonctions convexes d'ordre n* (¹) dans (a, b).

Les fonctions convexes d'ordre n ont été introduites par T. Popoviciu [14], qui a aussi démontré beaucoup de leurs propriétés. Les fonctions de la classe $M^0(a, b)$ ne sont que les fonctions monotones dans l'intervalle (a, b). Les fonctions de la classe $M^1(a, b)$ sont les fonctions convexes ou concaves au sens ordinaire dans (a, b).

(¹) Pour abréger, l'expression „fonction convexe d'ordre n" sera employée pour toutes les fonctions de la classe $M^n(a, b)$. T. Popoviciu [14] appelle les fonctions de la classe $M_+^n(a, b)$ „non concaves d'ordre n" et les fonctions de la classe $M_-^n(a, b)$ „non convexes d'ordre n". On remarquera ici le manque d'une expression uniforme pour les fonctions convexes et concaves, l'expression „fonctions monotones" se rapportant aux fonctions croissantes aussi bien qu'aux fonctions décroissantes.

Définition 5. Nous désignerons par $J_+^n(a, b)$ la classe des fonctions $f(x)$ telles que

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \geqslant 0$$

pour tout x et $h > 0$, $x, x+(n+1)h \in (a, b)$. Nous désignerons par $J_-^n(a, b)$ la classe des fonctions $f(x)$ telles que

$$\Delta_h^{n+1} f(x) \leqslant 0$$

pour tout x et $h > 0$, $x, x+(n+1)h \in (a, b)$. Enfin nous posons

$$J^n(a, b) = J_+^n(a, b) \cup J_-^n(a, b).$$

Les fonctions de la classe $J^n(a, b)$ seront appelées *fonctions convexes d'ordre n au sens de Jensen* (cf. [14], chapitre IV).

Il résulte de (2) et (3) que

$$M^n(a, b) \subset J^n(a, b), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mais nous avons un résultat plus précis:

Lemme 1 ([14]; voir aussi [2], [11]). *On a*

$$\mathcal{M}(a, b) \cap J^n(a, b) = M^n(a, b), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Notons encore les propriétés suivantes des fonctions convexes d'ordre n (voir [14]):

Lemme 2. *Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ appartiennent à la classe $M_+^n(a, b)$ (resp. $M_-^n(a, b)$) et c_1, c_2 sont des constantes non négatives, alors la fonction $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ appartient aussi à la même classe.*

Lemme 3. *Si les fonctions $f_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, appartiennent toutes à la classe $M_+^n(a, b)$ (resp. $M_-^n(a, b)$) et la limite $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ existe, alors celle-ci appartient aussi à la même classe.*

Lemme 4. *Si $f(x) \in M_+^n(a, b)$, on a $-f(x) \in M_-^n(a, b)$ et réciproquement.*

Les propriétés suivantes ([14], p. 39-41) sont moins élémentaires:

Lemme 5. *On a*

$$M^n(a, b) \subset C^{n-1}(a, b), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Lemme 6. *Si $f(x) \in M^{n+1}(a, b)$, $n \geqslant 1$, alors $f'(x) \in M^n(a, b)$ et réciproquement: si $f(x) \in C^1(a, b)$ et $f'(x) \in M^n(a, b)$, alors $f(x) \in M^{n+1}(a, b)$.*

Définition 6. Nous désignerons par $P^n(a, b)$ la classe des polynômes de degré n au plus, restreints à l'intervalle (a, b).

Lemme 7 ([14], p. 4). *On a*

$$M_+^n(a, b) \cap M_-^n(a, b) = P^n(a, b).$$

LEMME 8 (voir [1]). *Si* $f(x) \in M^n(a, b)$, $n \geqslant 1$, *alors* $\Delta_h^1 f(x) \in M^{n-1}(a, b-h)$.

COROLLAIRE. *Si* $f(x) \in M^n(a, b)$ *et* $0 \leqslant r \leqslant n$, *alors* $\Delta_h^r f(x) \in M^{n-r}(a, b-rh)$.

LEMME 9. *Si pour chaque* k *on a* $f_k(x) \in M_+^1(a, b)$ $\big(f_k(x) \in M_-^1(a, b)\big)$ *et si la suite* $f_k(x)$ *est convergente dans* (a, b), *alors elle est convergente presque uniformément dans* (a, b) (²).

Ce lemme résulte facilement du théorème 3 du travail [13].

§ 2. Nous passons maintenant à l'étude de l'équation (1). Toutes nos considérations concerneront un intervalle (a, ∞), où $a \geqslant -\infty$. x_0 désigne un certain point fixé de l'intervalle (a, ∞). Dans la suite de ce travail nous omettrons, en désignant les classes de fonctions, l'intervalle (a, ∞). Ainsi nous écrirons p. ex. C^n, M^n, J^n au lieu de $C^n(a, \infty)$, $M^n(a, \infty)$, $J^n(a, \infty)$, etc.

Notons d'abord le résultat connu suivant (voir [12]):

LEMME 10. *Si* $\varphi(x) \in P^n$, *l'équation* (1) *a exactement une solution* $g(x) \in P^{n+1}$ *qui satisfait à la condition* $g(x_0) = 0$.

Pour une fonction intégrable $f(x)$ arbitraire nous introduisons une nouvelle fonction $f^*(x)$ à l'aide de la formule (v. [4])

$$f^*(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - (x - x_0) \int_{x_0}^{x_0+1} f(t)\,dt\,. \tag{7}$$

LEMME 11. *Si* $f(x) \in M^n$, *alors* $f^*(x) \in M^{n+1}$.

Cela résulte des lemmes 6 et 7.

LEMME 12. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ *converge presque uniformément dans* (a, ∞), *alors la série* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(x)$ *converge aussi presque uniformément dans* (a, ∞) *et* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(x) = f^*(x)$.

C'est une simple conséquence de la forme de (7).

LEMME 13. *Si les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $g(x)$ *sont intégrables et* $g(x)$ *satisfait à l'équation* (1), *alors la fonction* $g^*(x)$ *satisfait à l'équation*

$$g^*(x+1) - g^*(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

et à la condition $g^*(x_0) = 0$.

(²) C'est-à-dire $f_k(x)$ converge uniformément dans tout intervalle fermé $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$.

Cela résulte aussi immédiatement de la forme de (7).

Nous introduisons encore la suite des polynômes $p_k(x)$ définis par les relations

$$p_1(x) = x - x_0\,, \qquad p_{k+1}(x) = p_k^*(x)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME 1. *Si* $\varphi(x) \in M^n$, $n \geqslant 0$, *et si elle satisfait à la condition*

$$\lim_{x\to\infty} \Delta_1^n \varphi(x) = 0\,, \tag{9}$$

alors pour tout nombre réel y_0 *il existe exactement une fonction* $g(x)$ *qui appartient à la classe* M^n (*de plus, si* $\varphi(x) \in M_-^n$, *on a* $g(x) \in M_+^n$ *et réciproquement*), *satisfait à l'équation* (1) *et à la condition*

$$g(x_0) = y_0\,, \tag{10}$$

où x_0 *est un certain point fixé de l'intervalle* (a, ∞). *La fonction* $g(x)$ *s'exprime par la formule*

$$\begin{aligned} g(x) = {} & y_0 + q_n(x) - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ \psi(x+k) - \psi(x_0+k) - \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1}(x) [\psi^{(i)}(x_0+k+1) - \psi^{(i)}(x_0+k)] \Big\}\,, \end{aligned} \tag{11}$$

où $q_n(x) \in P^n$ *est un polynôme satisfaisant à l'équation*

$$q_n(x+1) - q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \tag{12}$$

et à la condition

$$q_n(x_0) = 0 \tag{13}$$

(*v. lemme* 10), *les polynômes* $p_i(x)$ *sont définis par les relations* (8) *et*

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i\,. \tag{14}$$

(*Pour* $n = 0$, $\psi(x) = \varphi(x)$ *et dans la formule* (11) *on omet* $q_n(x)$ *et la somme* $\sum_{i=1}^{n-1}$).

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème par la méthode de l'induction mathématique. Nous démontrerons aussi que pour $n \geqslant 1$ la série figurant au second membre de (11) converge presque uniformément dans (a, ∞).

Notre théorème est connu pour $n = 0$ ([8]; v. aussi [4], [7], [9], [10]) et pour $n = 1$ ([3]; v. aussi [5], [6], [10]); dans le cas $n = 1$ la convergence presque uniforme de la série (11) résulte des lemmes 2, 7 et 9. Supposons que le théorème soit vrai (et que la série (11) converge presque uniformément dans (a, ∞)) pour un $n-1 \geqslant 1$.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de la classe M^n satisfaisant à la condition (9). Notre démonstration se composera de trois parties. D'abord, nous démontrerons l'existence d'une fonction $g(x) \in M^n$ satisfaisant à l'équation (1) et à la condition (10), ensuite nous établirons l'unicité de cette fonction $g(x)$ et enfin la formule (11).

I. Comme $n \geqslant 2$, il existe une dérivée $\varphi'(x) \in M^{n-1}$ (lemmes 5 et 6). Posons $\delta(x) = \Delta_1^{n-1}\varphi(x)$. En vertu du lemme 8 (v. en particulier le corollaire) $\delta(x) \in M^1$. En outre nous avons

$$\Delta_1^{n-1}\varphi'(x) = \delta'(x) . \tag{15}$$

En vertu de (9), $\lim_{x\to\infty}\Delta_1^1\delta(x) = 0$. De la formule des accroissements finis et de (15) il résulte ($\delta'(x)$ étant une fonction monotone) que $\lim_{x\to\infty}\delta'(x) = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to\infty}\Delta_1^{n-1}\varphi'(x) = 0 . \tag{16}$$

Soit $\psi(x)$ la fonction définie par la formule (14). En vertu des lemmes 7, 2 et 4 nous avons $\psi(x) \in M^n$. De plus, $\Delta_1^{n-1}\varphi(x)$ et $\Delta_1^{n-1}\psi(x)$ sont identiques à une constante additive près (notamment $\Delta_1^{n-1}\varphi(x) = \Delta_1^{n-1}\psi(x) + \varphi^{(n-1)}(x_0)$), donc $\Delta_1^{n-1}\varphi'(x) = \Delta_1^{n-1}\psi'(x)$ et par conséquent

$$\lim_{x\to\infty}\Delta_1^{n-1}\psi'(x) = 0 .$$

Evidemment $\psi'(x) \in M^{n-1}$. De l'hypothèse d'induction il résulte qu'il existe une fonction $d(x) \in M^{n-1}$ satisfaisant à l'équation

$$d(x+1) - d(x) = \psi'(x) . \tag{17}$$

Comme (v. (14))

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \psi'(t)\,dt ,$$

donc en vertu du lemme 13 la fonction $d^*(x)$ satisfait à l'équation

$$d^*(x+1) - d^*(x) = \psi(x) \tag{18}$$

et à la condition

$$d^*(x_0) = 0 . \tag{19}$$

De (18), (12) et (14) il résulte que la fonction

$$g(x) = y_0 + q_n(x) + d^*(x) \tag{20}$$

satisfait à l'équation (1), et de (13) et (19) il s'ensuit que la fonction (20) satisfait à la condition (10). Enfin, des lemmes 7, 11 et 2 il résulte que $g(x) \in M^n$.

II. Pour démontrer l'unicité supposons qu'il existe deux fonctions, $g_1(x)$ et $g_2(x)$, appartenant à la classe M^n, satisfaisant à l'équation (1) et telles que

$$g_1(x_0) = g_2(x_0) . \tag{21}$$

Alors les dérivées $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$ existent, appartiennent à la classe M^{n-1} et satisfont à l'équation

$$g'(x+1) - g'(x) = \varphi'(x) .$$

Puisque la fonction $\varphi'(x)$ appartient à la classe M^{n-1} et satisfait à la condition (16), donc en vertu de l'hypothèse d'induction les fonctions $g_1'(x)$ et $g_2'(x)$ doivent être identiques à une constante additive près:

$$g_1'(x) = g_2'(x) + c .$$

En tenant compte de (21) nous en obtenons

$$g_2(x) = g_1(x) + c(x - x_0) . \tag{22}$$

Mais, comme les fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$ satisfont toutes les deux à l'équation (1), nous avons

$$g_1(x+1) - g_1(x) = g_2(x+1) - g_2(x) . \tag{23}$$

En mettant (22) dans (23) nous obtenons $c = 0$, c'est-à-dire $g_1(x) = g_2(x)$.

III. Nous allons maintenant démontrer que la fonction $g(x)$ s'exprime par la formule (11) (et que la série qui y figure converge presque uniformément dans (a, ∞)). En vertu de (20) (v. la première partie de la démonstration) il suffit de démontrer que

$$d^*(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\psi(x+k) - \psi(x_0+k) - \sum_{i=0}^{n-1} p_{i+1}(x)[\psi^{(i)}(x_0+k+1) - \psi^{(i)}(x_0+k)]\Big\} . \tag{24}$$

Or la fonction $d(x)$ satisfait à l'équation (17) et appartient à M^{n-1}. De plus nous tirons de (14)

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i . \tag{25}$$

La formule (25) est tout à fait analogue à (14), les fonctions $\psi'(x)$ et $\varphi'(x)$ y figurant au lieu des fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(x)$. Alors en vertu de l'hypothèse d'induction

$$(26)\qquad d(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\psi'(x+k)-\psi'(x_0+k)-\\ -\sum_{i=0}^{n-2}p_{i+1}(x)[\psi^{(i+1)}(x_0+k+1)-\psi^{(i+1)}(x_0+k)]\Big\},$$

et la série au second membre de (26) est convergente presque uniformément dans (a, ∞). Alors, en vertu du lemme 12

$$(27)\qquad d^*(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\psi(x+k)-\psi(x_0+k)-(x-x_0)[\psi(x_0+k+1)-\psi(x_0+k)]-\\ -\sum_{i=0}^{n-2}p_{i+1}^*(x)[\psi^{(i+1)}(x_0+k+1)-\psi^{(i+1)}(x_0+k)]\Big\},$$

et la série au second membre de (27) est convergente presque uniformément dans (a, ∞). En tenant compte de (8) nous obtenons de (27) la formule (24).

Enfin notons que si $\varphi(x)\in M_-^n$, alors on a aussi $\psi(x)\in M_-^n$ et, en vertu des lemmes 4, 2, 3 et 7 et de la formule (11), $g(x)\in M_+^n$. De même, si $\varphi(x)\in M_+^n$, alors $g(x)\in M_-^n$.

Ainsi le théorème est complètement démontré.

§ 3. Ensuite, nous allons démontrer le

THÉORÈME 2. *La classe des fonctions $f(x)\in M^n$ pour lesquelles*

$$(28)\qquad \Delta_1^{n+1}f(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad x\in(a, \infty),$$

est identique à la classe P^n des polynômes de degré n au plus.

Démonstration. Il est évident (voir aussi lemme 7) que chaque fonction $f(x)\in P^n$ appartient aussi à M^n et satisfait à (28). Nous allons maintenant prouver que si une fonction $f(x)\in M^n$ satisfait à l'équation (28), alors $f(x)\in P^n$.

Posons $g_j(x) = \Delta_1^j f(x)$, $j = 0, \dots, n$. En vertu du lemme 8, $g_j(x)\in M^{n-j}$. Nous démontrerons que pour chaque $0\leqslant j\leqslant n$ la fonction $g_j(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n-j$.

La fonction $g_n(x)$ appartient à la classe M^0 et satisfait à l'équation

$$\Delta_1^1 g_n(x) = g_n(x+1)-g_n(x) = 0\,.$$

En vertu du théorème 1 la fonction $g_n(x)$ est constante, c'est-à-dire elle est un polynôme de degré zéro.

Supposons que la fonction $g_{j+1}(x)\in P^{n-j-1}$, $j<n$. Alors

$$(29)\qquad \Delta_1^{n-j}g_{j+1}(x)\equiv 0\,.$$

De la définition des fonctions $g_i(x)$ il résulte que

$$(30)\qquad \Delta_1^1 g_j(x) = g_j(x+1)-g_j(x) = g_{j+1}(x)\,.$$

Comme $g_j(x)\in M^{n-j}$ et $g_{j+1}(x)\in P^{n-j-1}$, il résulte de (30) et (29) en vertu du théorème 1 que $g_j(x)\in P^{n-j}$.

En vertu du principe d'induction il en résulte que $g_j(x)\in P^{n-j}$ pour $j = 0, \dots, n$. En particulier pour $j = 0$ nous en obtenons

$$f(x) = g_0(x)\in P^n,$$

c.q.f.d.

Le théorème ci-dessus donne une certaine caractérisation fonctionnelle des polynômes de degré $\leqslant n$. On peut obtenir la caractérisation fonctionnelle des polynômes de degré exact n à l'aide de la condition supplémentaire que $\Delta_1^n f(x)\neq 0$. Par contre, la classe des fonctions $f(x)\in\bigcup_{k=0}^{\infty}M^k$ et telles que pour un n (dépendant de f) la relation (28) est remplie, est plus large que la classe $\bigcup_{k=0}^{\infty}P^k$. Si

$$(31)\qquad f(x)\in M^n$$

et

$$(32)\qquad \Delta_1^{r+1}f(x) = 0 \quad \text{dans} \quad (a, \infty),$$

où

$$(33)\qquad r\leqslant n\,,$$

alors $f(x)\in P^r$. En effet, de (32) et (33) il résulte que l'on a aussi $\Delta_1^{n+1}f(x) = 0$ dans (a, ∞). Mais si les relations (31) et (32) sont remplies et $r>n$, alors il peut arriver que $f(x)$ ne soit pas un polynôme. Par exemple la fonction

$$f(x) = [x]+\tfrac{1}{2}(x-[x])\,,$$

où $[x]$ désigne le plus grand nombre entier ne dépassant pas x, satisfait à (31) et (32) avec $n = 0$ et $r = 1$, mais elle n'est pas un polynôme.

On sait (voir p. ex. [11]) que

$$(34)\qquad \mathcal{M}\cap J_+^n\cap J_-^n = P^n.$$

((34) résulte aussi des lemmes 1 et 7). En d'autres termes, *une fonction mesurable $f(x)$ telle que*

$$(35)\qquad \Delta_h^{n+1}f(x) = 0 \quad \textit{dans} \quad (a, \infty)$$

pour chaque $h > 0$ est un polynôme de degré n au plus. Notre théorème 2 est dans un certain sens plus fort. Il permet de remplacer dans la formule (35) le signe d'égalité par celui d'une inégalité faible ($\leqslant$ ou $\geqslant$) pour tous les h sauf un. (Dans ce travail on a demandé l'égalité (35) pour $h = 1$, mais cette condition n'est pas essentielle. Dans les théorèmes 1 et 2 on peut remplacer l'accroissement $h = 1$ par un autre accroissement arbitraire $h > 0$.)

Travaux cités

[1] R. P. Boas and D. V. Widder, *Functions with positive differences*, Duke Math. J. 7 (1940), p. 496-503.

[2] Z. Ciesielski, *Some properties of convex functions of higher orders*, Ann. Polon. Math. 7 (1959), p. 1-7.

[3] W. Krull, *Bemerkungen zur Differenzengleichung* $g(x+1)-g(x) = \varphi(x)$, Math. Nachr. 1 (1948), p. 365-376.

[4] — *Bemerkungen zur Differenzengleichung* $g(x+1)-g(x) = \varphi(x)$, *II*, ibidem 2 (1949), p. 251-262.

[5] M. Kuczma, *O równaniu funkcyjnym* $g(x+1)-g(x) = \varphi(x)$, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego, Mat. Fiz. Chem., 4 (1958), p. 27-38.

[6] — *On convex solutions of the functional equation* $g[a(x)]-g(x) = \varphi(x)$, Publ. Math. Debrecen 6 (1959), p. 40-47.

[7] — *Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis*, Bull. Sci. Math. (2), 84 (1960), p. 98-102.

[8] — *Sur une équation fonctionnelle*, Mathematica, Cluj, 3 (26), (1961), p. 79-87.

[9] — *On the Schröder equation*, Rozprawy Matematyczne 34, 1963.

[10] — *Remark on a difference equation*, Roczniki P. T. M., Seria I. Prace Matematyczne (sous presse).

[11] S. Kurepa, *A property of a set of positive measure and its application*, Journal Math. Soc. Japan 13 (1961), p. 13-19.

[12] N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Berlin 1924.

[13] W. Orlicz and Z. Ciesielski, *Some remarks on the convergence of functionals on bases*, Studia Math. 16 (1958), p. 335-352.

[14] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, Cluj, 8 (1934), p. 1-85.

Reçu par la Rédaction le 11. 3. 1963

On maximally resolvable spaces

by

J. G. Ceder (Santa Barbara, Calif.)

In [2] E. Hewitt posed the problem of determining the largest number of disjoint, dense subsets possible in a topological space. As one result in this direction, W. Sierpiński [8] has proved that a metric space X each non-void open subset of which constains $\geqslant \boldsymbol{m} \geqslant \aleph_0$ points, is the union of $\boldsymbol{m}$ disjoint sets each of which contains at least $\boldsymbol{m}$ points of each non-void open set in X. It is the purpose of this note to generalize Sierpiński's result in two ways, one way of which will enable us to extend some of Hewitt's results in [2] so as to determine the largest possible number of disjoint, dense subsets in certain spaces, including locally compact Hausdorff spaces and first countable spaces.

In the sequel, we will consider ordinals and cardinals as defined, for example, in J. L. Kelley ([4], appendix), so that each ordinal is equal to the set of its predecessors and a cardinal is an ordinal which is not equipollent with any smaller ordinal (1). The cardinal number of a set A will be denoted by $|A|$. The symbols $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ will always denote specific cardinals and the Greek letters α, β, γ, etc. will denote general ordinals. A subset A of topological space is said to be $\boldsymbol{m}$*-dense* if $|A \cap U| = \boldsymbol{m}$ for each non-void open subset U of X.

Our first generalization of Sierpiński's result is

THEOREM 1. *Let X be any topological space with an infinite base $\mathfrak{B}$ such that $|\mathfrak{B}| \leqslant \boldsymbol{n} \leqslant \boldsymbol{m}$. Then, if A is an $\boldsymbol{m}$-dense subset of X, A is the union of $\boldsymbol{m}$ disjoint, $\boldsymbol{n}$-dense subsets of X.*

Proof. We will first take the case when $|\mathfrak{B}| = \boldsymbol{n}$ and induct on the cardinals $\boldsymbol{m} \geqslant \boldsymbol{n}$.

For $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} = |\mathfrak{B}|$, let us well-order $\mathfrak{B}$ so that $\mathfrak{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha<\boldsymbol{n}}$. Since $|B_\alpha \cap A| = \boldsymbol{n}$ for each $\alpha < \boldsymbol{n}$, we can by a result of K. Kuratowski ([5], Lemma 1) find a disjoint family $\{H_\alpha\}_{\alpha<\boldsymbol{n}}$ such that $H_\alpha \subseteq B_\alpha \cap A$ and $|H_\alpha| = \boldsymbol{n}$ for each $\alpha < \boldsymbol{n}$. Since $|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}| = \boldsymbol{n}$, we can put each $H_\alpha = \bigcup_{\alpha<\boldsymbol{n}} H_{\alpha,\beta}$ where $|H_{\alpha,\beta}| = \boldsymbol{n}$ and the sets $H_{\alpha,\beta}$ are disjoint. For $0 < \beta < \boldsymbol{n}$

(1) For facts about ordinal and cardinal arithmetic we employ in the sequel the reader is referred to Sierpiński [9].