Now, if we are given any sentence σ of L_1, then, by (A) and (B), σ is logically valid if and only if $\{(\sim\sigma)'\} \cup \Sigma$ is inconsistent, i.e. if and only if $\sim(\sim\sigma)'$ can be derived formally from Σ. This establishes the completeness of L_1:

THEOREM. *V_1 is recursively enumerable.*

From the Theorem and the Compactness Theorem (3.4) for L_1 follows at once the

COROLLARY. *If S is any recursively enumerable set of L_1-sentences, then the set of (semantical) logical consequences of S is recursively enumerable.*

It should be noted that the Theorem given us effectively a procedure for enumerating a certain set of sentences. However, our knowledge that this set coincides with V_1 is of course based on set theory, since V_1 can only be defined in set theory, and indeed on the Axiom of Choice, which is used is the proof of (B).

In conclusion, we shall describe somewhat roughly still another consequence of (A) and (B). Suppose that the definition of the set V_1 has been formalized in the set theory of Gödel's monograph on the Continuum Hypothesis. By replacing throughout this definition the notion of arbitrary set by that of constructible set (in the sense of Gödel's monograph) we obtain the definition of a second set V_1^c. In other words V_1^c is the V_1 of a man who considers only constructible sets. Now, suppose we obtain the definition of the set $V_1'^c$ analogously from the following definition of the set V_1':

$$V_1' = \{\sigma / \sim(\sim\sigma)' \text{ is derivable from } \Sigma\}.$$

Since the definition of V_1' involves only elementary number theory, which is unchanged by the passage to constructible sets, we can conclude (as has been remarked in general by Kreisel) that $V_1'^c = V_1'$. We argued above from (A) and (B) that $V_1 = V_1'$. Carrying out the same argument within the universe of constructible sets we conclude that $V_1^c = V_1'^c$. Hence the

THEOREM. $V_1 = V_1^c$.

Thus, if we can show on the basis of ordinary set theory by assuming the Generalized Continuum Hypothesis that a particular L_1-sentence is logically valid, then we can also do so without that assumption. The author was in fact led to the Theorems above in part by an attempt to eliminate the G. C. H. from the proof of a certain recent result of C. C. Chang (a generalization of Beth's theorem on definability). The method just outlined does indeed work for one part of Chang's result. However, it would take too long to describe here the details.

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1963

Sur l'ensemble des points de divergence des séries entières continues sur la circonférence du cercle de converegnce

par

J. Staniszewska (Łódź)

J. Śladkowska [3] a démontré que pour un ensemble arbitraire $E \subset \Phi$, où E est de classe $G_{\delta\sigma}$ et Φ est un ensemble de classe F_σ de mesure logarithmique zéro, il existe une fonction continue et périodique dont la série de Fourier est divergente sur l'ensemble E et convergente sur son ensemble complémentaire.

Me basant sur ce résultat, je construis dans ce travail une série entière continue ayant des propriétés semblables.

Je vois d'abord rappeler certaines définitions et notations:

1. Un ensemble E de nombres réels a pour mesure logarithmique *zéro*, si pour un nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ il existe une suite dénombrable de segments ouverts recouvrant l'ensemble E, de longueurs l_j, $l_j < 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1/l_j)} < \varepsilon .$$

2. Nous appelons l'ensemble E de nombres réels *périodique de période a*, si sa fonction caractéristique est périodique de période a.

3. Nous désignerons par $s_k(\varphi, f)$ [resp. $\tilde{s}_k(\varphi, f)$] la $k^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier (resp. de la série conjuguée de Fourier) de la fonction $f(\varphi)$ au point φ.

4. Par $S_k(\varphi, H)$, en abrégé $S_k(\varphi)$, nous désignerons la $k^{\text{ième}}$ somme partielle de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = H(z)$ (convergente pour $|z| < 1$) en $z = e^{i\varphi}$. Lorsque la fonction $H(z)$ peut être prolongée à une fonction continue dans $|z| \leqslant 1$ (et de valeurs finies), une telle série est dite *série entière continue*.

Dans la suite nous définissons pour $|\varphi| \leqslant \pi$ et $a < \pi/2$ la fonction

$$f(\varphi, a, m) = \begin{cases} (a - |\varphi|)\sin m|\varphi| & \text{pour} \quad |\varphi| \leqslant a, \\ 0 & \text{pour} \quad |\varphi| > a. \end{cases}$$

Pour les φ restants nous définissons cette fonction comme périodique à de période 2π.

Lemme 1. *Nous avons*

$$(1)\qquad \left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi+t,a,m)}{t}\cos kt\,dt\right| <$$

$$<\begin{cases} 2\dfrac{a^2}{|\varphi|} & \textit{pour}\quad \pi\geqslant|\varphi|\geqslant a,\\[2mm] a(4\pi+11)+2a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi} & \textit{pour}\quad |\varphi|<\dfrac{\pi}{2|m-k|}\quad \textit{et}\quad m\neq k,\\[2mm] a(4\pi+11) & \textit{pour}\quad |\varphi|\geqslant\dfrac{\pi}{2|m-k|}\quad \textit{et}\quad m\neq k,\\[2mm] a(4\pi+9)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi}+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{a}{\varphi} & \textit{pour}\quad |\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2(m+k)}\\ & \qquad\textit{et}\quad m=k,\\[2mm] a(4\pi+9)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{a}{\varphi} & \textit{pour}\quad |\varphi|>\dfrac{\pi}{2(m+k)}\quad \textit{et}\quad m=k.\end{cases}$$

Démonstration. Nous utiliserons ci-dessous des inégalités évidentes. Pour tous les α et β tels que $0<\alpha<\beta<\pi$ ainsi que p positif arbitraires on a

$$(a)\qquad \left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin pt}{t}\,dt\right|<\pi,$$

$$(b)\qquad \left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\cos pt}{t}\,dt\right|<\begin{cases}2 & \text{pour}\quad \alpha\geqslant\dfrac{\pi}{2p},\\[2mm] 2+\ln\dfrac{\pi}{2p\alpha} & \text{pour}\quad \alpha<\dfrac{\pi}{2p}.\end{cases}$$

Pour démontrer le lemme nous allons considérer les cas suivants:

1. $a<\varphi\leqslant\pi$,
2. $0\leqslant\varphi\leqslant a$.

La fonction $f(\varphi,a,m)$ étant paire, l'intégrale considérée dans notre lemme est une fonction impaire, donc il suffit de tenir compte de ces deux cas.

1. Pour $a<\varphi\leqslant\pi-a$ nous pouvons estimer a fonction sous le signe intégrale par la fonction linéaire $t\cdot a/\varphi$.

Pour $\pi-a<\varphi\leqslant\pi$ nous allons estimer la fonction sous le signe intégrale dans les deux intervalles d'intégration distincts par deux fonctions linéaires. La fonction dont la valeur absolue est plus grande est égale à at/φ. La somme des longueurs des intervalles d'intégration dans chaque cas est égale à $2a$.

2. La fonction

$$g(\varphi,a)=\begin{cases}a-|\varphi| & \text{pour}\quad |\varphi|<a,\\ 0 & \text{pour}\quad |\varphi|\geqslant a\end{cases}$$

sera représentée comme la somme de deux fonctions,

$$g(\varphi,a)=h(\varphi,a,b)+g\left(\varphi+\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$$

pour a et b arbitraires telles que $0\leqslant b\leqslant a$, où

$$h(\varphi,a,b)=\begin{cases}2\left(\varphi+\dfrac{a-b}{2}\right) & \text{pour}\quad \dfrac{b-a}{2}<\varphi\leqslant 0,\\ a-b & \text{pour}\quad 0<\varphi\leqslant b,\\ -\varphi+a & \text{pour}\quad b<\varphi\leqslant a,\\ 0 & \text{pour}\quad a<\varphi.\end{cases}$$

Comme $f(\varphi,a,m)=g(\varphi,a)\sin m|\varphi|$, en tenant compte de (pour $b=\varphi$)

$$\left|\frac{g\left(t+\dfrac{a+\varphi}{2},\dfrac{a+\varphi}{2}\right)\sin m|\varphi+t|}{t}\cos kt\right|\leqslant 1$$

nous avons

$$(2)\qquad \left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi+t,a,m)}{t}\cos kt\,dt\right|<2a+\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(\varphi+t,a,\varphi)\sin m|\varphi+t|}{t}\cos kt\,dt\right|.$$

Pour estimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\varphi+t,a,\varphi)\sin m|\varphi+t|}{t}\cos kt\,dt$$

nous allons distinguer deux sous-cas: 2a. $a/2\leqslant\varphi\leqslant a$ et 2b. $0\leqslant\varphi<a/2$.

Dans le cas 2a nous avons

$$(3)\qquad \left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\varphi+t,a,\varphi)\sin m|\varphi+t|}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$=\left|-\int_{(-\varphi-a)/2}^{-\varphi}\frac{2\left(t+\dfrac{a+\varphi}{2}\right)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt+\right.$$

$$+\int_{-\varphi}^{\varphi-a}\frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi+t)\cos kt}{t}\,dt+\int_{\varphi-a}^{0}\frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt+$$

$$\left.+\int_{0}^{a-\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)\cos kt}{t}\right|=$$

$$= \left| \int_{\varphi}^{(\varphi+a)/2} \frac{2\left(\frac{a+\varphi}{2}-t\right)\sin m(\varphi-t)}{t}\cos kt\,dt - \int_{-\varphi+a}^{\varphi} \frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi-t)}{t}\cos kt\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_{0}^{a-\varphi} \frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt + \int^{a-\varphi} \frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{a-\varphi}{2}\cdot\frac{a-\varphi}{\varphi} + (a-\varphi)\frac{2\varphi-a}{a-\varphi} +$$

$$+ \left|\int_{0}^{a-\varphi}\frac{\cos kt}{t}[(a-\varphi)2\sin mt\cos m\varphi]dt\right| + \left|\int_{0}^{a-\varphi}\sin m(\varphi+t)\cos kt\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{(a-\varphi)^2}{2\varphi} + (2\varphi-a) + 2\pi(a-\varphi) + (a-\varphi) < 2\pi a\,.$$

L'estimation

$$\left|\int_{0}^{a-\varphi}\frac{\cos kt}{t}[(a-\varphi)2\sin mt\cos m\varphi]dt\right| \leqslant 2\pi(a-\varphi)$$

a été obtenue en tenant compte de l'inégalité auxiliaire (a).

Dans le cas 2b nous avons

(4) $$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\varphi+t,a,\varphi)\sin m|\varphi+t|}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$= \left| - \int_{(-\varphi-a)/2}^{-\varphi} \frac{2\left(t+\frac{a+\varphi}{2}\right)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt + \right.$$

$$+ \int_{-\varphi}^{0}\frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt + \int_{0}^{\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt +$$

$$\left. + \int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{\varphi}^{(\varphi+a)/2}\frac{2\left(\frac{a+\varphi}{2}-t\right)\sin m(\varphi-t)}{t}\cos kt\,dt - \int_{0}^{\varphi}\frac{(a-\varphi)\sin m(\varphi-t)\cos kt}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)\cos kt}{t}dt + \int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{\varphi}^{(\varphi+a)/2}\frac{2\left(\frac{a+\varphi}{2}-t\right)\sin m(\varphi-t)\cos kt}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| + \left|\int_{0}^{\varphi}\frac{\cos kt}{t}2(a-\varphi)\cos m\varphi\sin mt\,dt\right| +$$

$$+ \left|\int_{0}^{\varphi}\sin m(\varphi+t)\cos kt\,dt\right| \leqslant |J_1+J_4| + 2\pi(a-\varphi)+\varphi \leqslant |J_1+J_4| + a(2\pi+1)\,,$$

en vertu de l'inégalité auxiliaire (a).

Les intégrales J_1+J_4 nous allons estimer en considérant deux cas:

(i) $a-\varphi < \frac{a+\varphi}{2}$,

(ii) $a-\varphi \geqslant \frac{a+\varphi}{2}$.

Dans le cas (i) nous avons

(5) $$|J_1+J_4| = \left|\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos kt}{t}[2a\sin m\varphi\cos mt - 2\varphi\cos m\varphi\sin mt]dt + \right.$$

$$-\int_{\varphi}^{a-\varphi}[2\sin m(\varphi-t)\cos kt + \sin m(\varphi+t)\cos kt]dt +$$

$$\left. + \int_{a-\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{2\left(\frac{a+\varphi}{2}-t\right)\sin m(\varphi-t)}{t}\cos kt\,dt\right|$$

$$\leqslant \left|a\sin m\varphi\left(\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos(m+k)t}{t}dt + \int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos|m-k|t}{t}dt\right)\right| +$$

$$+\varphi 2\pi + 3(a-2\varphi) + \frac{3\varphi-a}{a-\varphi}\cdot\frac{3\varphi-a}{2}$$

$$\leqslant a|\sin\varphi|\left(\left|\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos(m+k)t}{t}dt\right| + \left|\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos|m-k|t}{t}dt\right|\right) + a(2\pi+4)\,.$$

En tenant compte de l'inégalité auxiliaire (b) nous obtiendrons

(6) $$\left|\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos(m+k)t}{t}dt\right| < \begin{cases} 2 & \text{pour} \quad \varphi \geqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)}, \\ 2+\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi} & \text{pour} \quad \varphi < \dfrac{\pi}{2(m+k)}, \end{cases}$$

(7) $$\left|\int_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos|m-k|t}{t}dt\right| < \begin{cases} 2 & \text{pour } \varphi \geqslant \dfrac{\pi}{2|m-k|} \text{ où } m\neq k, \\ 2+\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi} & \text{pour } \varphi < \dfrac{\pi}{2|m-k|} \text{ où } m\neq k. \end{cases}$$

En vertu de (5), (6) et (7) nous obtenons dans le cas (i) l'estimation

$$(8)\qquad |J_1+J_4| \leqslant \begin{cases} a(2\pi+8)+a|\sin m\varphi|\left(\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi}+\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi}\right) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)}, \\ a(2\pi+8)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \dfrac{\pi}{2(m+k)} < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2|m-k|}, \\ a(2\pi+8) \qquad \text{pour} \quad \varphi > \dfrac{\pi}{2|m-k|}, \end{cases}$$

où $m \neq k$. Dans le cas (ii) nous avons

$$|J_1+J_4| = \Bigg|\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2} \frac{\cos kt}{2}[2a\sin m\varphi\cos mt - 2\cos m\varphi\sin mt]\,dt +$$

$$-\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}[2\sin m(\varphi-t)\cos kt+\sin m(\varphi+t)\cos kt]\,dt +$$

$$+\int\limits_{(a+\varphi)/2}^{a-\varphi}\frac{(-\varphi-t+a)\sin m(\varphi+t)\cos kt}{t}\,dt\Bigg|$$

$$\leqslant \Bigg|a\sin m\varphi\Bigg(\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt+\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos|m-k|t}{t}\,dt\Bigg)\Bigg| +$$

$$+2\pi\varphi+3\frac{a-\varphi}{2}+\frac{2}{a+\varphi}\,\frac{(a-3\varphi)^2}{4}$$

$$\leqslant a|\sin m\varphi|\Bigg(\Bigg|\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt\Bigg|+\Bigg|\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos|m-k|t}{t}\,dt\Bigg|\Bigg)+a(2\pi+2).$$

En tenant compte encore de l'inégalité auxiliaire (b) nous obtiendrons dans le cas (ii) l'estimation

$$(9)\qquad |J_1+J_4| \leqslant \begin{cases} a(2\pi+6)+a|\sin m\varphi|\left(\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi}+\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi}\right) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)}, \\ a(2\pi+6)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \dfrac{\pi}{2(m+k)} < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2|m-k|}, \\ a(2\pi+6) \qquad \text{pour} \quad \varphi > \dfrac{\pi}{2|m-k|}. \end{cases}$$

où $m \neq k$.

Pour $m = k$ nous avons dans les cas (i) et (ii) deux possibilités:

c. $\varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)}$, d. $\varphi > \dfrac{\pi}{2(m+k)}$.

Dans le cas c:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\Bigg|\int\limits_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt\Bigg| < 2+\ln\frac{\pi}{2(m+k)\varphi}\,; \\ &\Bigg|\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt\Bigg| < 2+\ln\frac{\pi}{2(m+k)\varphi}\,. \end{aligned}$$

Dans le cas d:

$$(11)\qquad \Bigg|\int\limits_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt\Bigg| < 2\,, \qquad \Bigg|\int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{\cos(m+k)t}{t}\,dt\Bigg| < 2\,;$$

ainsi que dans c et d

$$(12)\qquad \int\limits_{\varphi}^{a-\varphi}\frac{1}{t}\,dt = \ln\frac{a-\varphi}{\varphi}, \qquad \int\limits_{\varphi}^{(a+\varphi)/2}\frac{1}{t}\,dt = \ln\frac{a+\varphi}{2\varphi}.$$

Si $m = k$, dans les cas (i), (ii) nous obtiendrons

$$(13)\qquad |J_1+J_4| \leqslant \begin{cases} a(2\pi+6)+a|\sin m\varphi|\left(\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi}+\ln\dfrac{a}{\varphi}\right) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)}, \\ a(2\pi+6)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{a}{\varphi} \qquad \text{pour} \quad \varphi > \dfrac{\pi}{2(m+k)}. \end{cases}$$

Enfin, en tenant compte de (2), (4), (8), (9) et (13), nous avons l'estimations suivante:

$$\Bigg|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi+t,a,m)}{t}\cos kt\,dt\Bigg| \leqslant \begin{cases} a(4\pi+11)+2a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{\pi}{2|m-k|\varphi} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2|m-k|}, \text{ et } m \neq k. \\ a(4\pi+11) \quad \text{pour} \quad \varphi \geqslant \dfrac{\pi}{2|m-k|} \text{ et } m \neq k, \\ a(4\pi+9)+a|\sin m\varphi|\left(\ln\dfrac{\pi}{2(m+k)\varphi}+\ln\dfrac{a}{\varphi}\right) \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2(m+k)} \text{ et } m = k, \\ a(4\pi+9)+a|\sin m\varphi|\ln\dfrac{a}{\varphi} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad \varphi > \dfrac{\pi}{2(m+k)} \text{ et } m = k. \end{cases}$$

ce qui achève la dèmonstration du lemme 1.

LEMME 2. *Pour tout ensemble E périodique de période 2π, $E \in G_\delta$ et tel que $\bar{E}$ est de mesure logarithmique zéro, situé sur la circonférence du cercle unité, il existe une fonction continue et périodique $F(\varphi)$ telle que la fonction conjuguée $\widetilde{F}(\varphi)$ est aussi continue, et*

1. $|s_k(\varphi)| \leqslant A$ *et* $|\tilde{s}_k(\varphi)| \leqslant A$ *pour tout* φ *et* $k = 0, 1, 2, \ldots$,
2. *la suite* $\{s_k(\varphi)\}$ *est divergente pour tout* $\varphi \in E$,
3. *les suites* $\{s_k(\varphi)\}$ *et* $\{\tilde{s}_k(\varphi)\}$ *sont convergentes pour tout* $\varphi \notin E$.

COROLLAIRE. *$F(\varphi)$ et $\widetilde{F}(\varphi)$ sont les parties réelle et imaginaire de la série de puissances continues*

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n,$$

dont les sommes partielles sont bornées dans leur ensemble pour $z = e^{i\varphi}$ et qui est divergente pour chaque $\varphi \in E$ et convergente pour chaque $\varphi \notin E$.

Démonstration. Pour plus de clarté, il est indispensable de rappeler la construction indiquée dans le travail [3].

ε étant un nombre arbitraire positif plus petit que 1/4. Il existe en vertu de l'hypothèse pour ε un système dénombrable de segments ouverts $B^{(m)}$ de longueurs $2\beta^{(m)}$, où $\beta^{(m)} < 2^{-8}$, $m = 1, 2, \ldots$, tels que leur somme recouvre pas $\bar{E}$ et que

$$\sum_m \big(1/\log(1/2\beta_m)\big) < \varepsilon\ (^1).$$

Rangeons les segments $B^{(m)}$ en une suite selon la règle suivante: nous mettons dans la classe $\mathfrak{B}_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, les nombres $\beta^{(m)}$ qui vérifient les inégalités $2^{-(l+1)} \leqslant \beta^{(m)} < 2^{-l}$. Toute classe $\mathfrak{B}_l$ se compose d'un nombre fini d'éléments $\beta^{(m)}$. Quelques unes de ces classes peuvent être vides.

Désignons ensuite par $\{l_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, une suite partielle de la suite $\{l\}$ telle que $\mathfrak{B}_{l_j} \neq 0$ et $\mathfrak{B}_l = 0$ pour $l \neq l_j$, $j = 1, 2, \ldots$

En posant $\mathfrak{B}_{l_j} = \mathfrak{B}_j^*$, $j = 1, 2, \ldots$, nous obtenons un ensemble de classes $\{\mathfrak{B}_j^*\}$ non vides. Les éléments de la classe $\mathfrak{B}_j^*$ sont les nombres $\beta^{(m)}$ tels que $2^{-(l_j+1)} \leqslant \beta^{(m)} < 2^{-l_j}$.

Soit $k_j \geqslant 1$ le nombre d'éléments de la classe $\mathfrak{B}_j^*$.

Désignant les éléments $\beta^{(m)}$ de la classe $\mathfrak{B}_1^*$ par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_1}$, ceux de la classe $\mathfrak{B}_2^*$ par $\beta_{k_1+1}, \beta_{k_1+2}, \ldots, \beta_{k_1+k_2}$ etc., nous pouvons ranger tous les éléments $\beta^{(m)}$ en une suite $\{\beta_n\}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_1}, \beta_{k_1+1}, \ldots, \beta_{k_1+k_2}, \beta_{k_1+k_2+1}, \ldots$

Remarquons que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{l_j} < \varepsilon.$$

---

(1) Le symbole log désigne dans ce travail le logarithme de base 2, tandis que ln est le logarithme naturel.

Ensuite définissons une suite de nombres naturels $\{m_n\}$:

$$\begin{array}{llll}
m_1 = 2^{p_1}, & m_2 = 2^{p_1+1}, & \ldots, & m_{k_1} = 2^{p_1+k_1-1}, \\
m_{k_1+1} = 2^{p_2}, & m_{k_1+2} = 2^{p_2+1}, & \ldots, & m_{k_1+k_2} = 2^{p_2+k_2-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m_{k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1} = 2^{p_j}, & & \ldots, & m_{k_1+k_2+\ldots+k_j} = 2^{p_j+k_j-1}
\end{array}$$

où (2) $p_1 = [1\tfrac{1}{2}l_1]$, $\quad p_j = \max\{[1\tfrac{1}{2}l_j], p_{j-1}+k_{j-1}\}$, $\quad j = 2, 3, \ldots$

On démontre dans [3] que

1° La suite $\{m_n\}$ ne croît pas plus lentement que la progression géométrique $\{2^n\}$;

2° $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log m_n \beta_n} < 4\varepsilon$;

3° la suite $\{\alpha_n\}$ où $\alpha_n = m_n \beta_n^2$ tend vers zéro, de telle façon que $\alpha_n > \beta_n$ et $\alpha_n/\beta_n \to \infty$;

4° pour $\eta > 0$ arbitraire il existe un $\delta > 0$ tel que si $\beta_n < \delta$ alors $\alpha_n + \pi/6m_n < \eta$ et δ ne dépend ni des nombres l_j, k_j ni même de ε à condition que l'on prennue $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Soit maintenant $(a, a+2\pi]$ un intervalle dont les extrémités n'appartiennent pas à $\bar{E}$. Posons $E_a = E \cdot (a, a+2\pi)$. L'ensemble $E_a \subset \bar{E}_a \subset (a, a+2\pi)$ est de classe G_δ et la mesure logarithmique de $\bar{E}_a$ est zéro.

Construisons ensuite le système de segments B_n recouvrant l'ensemble E_a de la façon suivante.

Soit $E_a = \bigcap_{p=1}^{\infty} G_p$, où $(a, a+2\pi) \supset G_p \supset G_{p+1}$, G_p ouverts. Soit S une composante quelconque de l'ensemble G_p; représentons — la comme la somme d'une quantité dénombrable de segments $\bar{O}_j$ fermés, dont les intérieurs sont disjoints et les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$. (La suite des extrémités de segments $\bar{O}_j$ possède exactement deux points de condensation aux extrémités de la composante S).

Pour chaque segment $\bar{O}_j$ formons un segment ouvert O_j' ayant avec $\bar{O}_j$ le même milieu, tel que $\bar{O}_j \subset O_j'$ et que O_j' soit contenu dans le segment dont les extrémités sont les milieux des segments adjacents à $\bar{O}_j$.

En prenant $\eta_j = \frac{1}{2}|O_j' - \bar{O}_j|$ et en choisissant pour η_j, en vertu de 4°, le nombre correspondant δ_j, divisons le segment $\bar{O}_j$ en un nombre fini de segments fermés J_{jk}, dont la longueur ne dépasse pas δ_j et les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$. En procédant de même avec chaque segment $\bar{O}_j$, on peut représenter la composante S comme la somme d'une quantité dénombrable de segments fermés J_{jk}, dont les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$ et les longueurs sont inférieures aux

---

(2) $[x]$ désigne le plus grand nombre entier $\leqslant x$.

nombres correspondants δ_j. En répétant le même procédé avec chaque composante de l'ensemble G_p on peut représenter celui-ci comme la somme d'une quantité dénombrable de segments J_{jk} fermés, d'intérieurs disjoints, ayant les propriétés énumérées plus haut.

Rangeons tous ces segments en une suite simple $\{J_l\}$; alors $G_p = \bigcup_l J_l$.

Considérons l'ensemble $J_l\bar{E}_a$; c'est un ensemble fermé de mesure logarithmique zéro, par conséquent au nombre $\varepsilon/2^{l+p}$ on peut faire correspondre un système tout au plus dénombrable de segments ouverts $B_{l,m}$ de longueurs $2\beta_{l,m}$ tel que ce système recouvre l'ensemble $J_l\bar{E}_a$ et que

$$(*)\qquad \sum_m \frac{1}{\log(1/2\beta_{l,m})} < \frac{\varepsilon}{2^{l+p}}.$$

Nous multiplions le système $\{B_{l,m}\}$ par l'intérieur J_l^0 du segment J_l et modifions le système ainsi réduit de telle façon que les segments ayant des points intériours communs soient réunis en un seul segment. Le système de segments ainsi modifié vérifie également l'inégalité $(*)$; la démonstration de ce fait est esquissée dans le travail [3].

Elle concerne la somme d'un nombre fini de segments, mais en passant à la limite nous obtenons un résultat analogue pour les sommes dénombrables.

Du système de infini segments ouverts $B_{l,m}$ qui recouvrent l'ensemble fermé $J_l\bar{E}_a$ nous extrayons maintenant, en vertu du théorème de Heine-Borel, un nombre fini de segments qui recouvrent également l'ensemble $J_l\bar{E}_a$. La longueur de chacun d'eux ne dépasse évidemment pas le nombre δ_j correspondant au segment $\bar{O}_j$; ces segments sont disjoints. En faisant une construction analogue pour chaque segment J_l, nous obtiendrons finalement un ensemble dénombrable de segments $\{B_m^{(p)}\}$ de longueurs $2\beta_m^{(p)}$ qui recouvrent conjointement l'ensemble $G_p\bar{E}_a$ et tels que

$$\sum_m \frac{1}{\log(1/2\beta_m^{(p)})} < \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{l+p}} = \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

En outre, chaque point de l'ensemble $G_p\bar{E}_a$ appartient à un seul segment $B_m^{(p)}$. Nous rangeons l'ensemble dénombrable des segments $\{B_m^{(p)}\}$ $(p, m = 1, 2, \ldots)$ en une suite simple $\{B_n\}$ suivant le principe indiqué au début de cette construction (p. 312).

En faisant correspondre au nombre β_n les nombres m_n et a_n au moyen de la méthode décrite dans 3°, nous construisons deux nouveaux segments ouverts: le segment A_n concentrique à B_n de longueur $2a_n$ et le segment $\tilde{A}_n$ de même longueur $2a_n$ mais dont le milieu est déplacé de $\pi/6m_n$ par rapport au milieu commun des segments B_n et A_n.

Le segment B_n étant un certain segment $B_m^{(p)}$ contenu dans un segment $\bar{O}_j$, les segments $A_n = A_m^{(p)}$ et $\tilde{A}_n = \tilde{A}_m^{(p)}$ sont contenus dans $\bar{O}_j$. Il résulte de la construction des segments $B_m^{(p)}$, pour p fixe, que le point arbitraire $\varphi \in (a, a+2\pi]$ appartient à un nombre tout au plus fini de segments $A_m^{(p)}$ et $\tilde{A}_m^{(p)}$. En effet, si φ n'appartient pas à G_p, il n'appartient à aucune composante S et, par suite, à aucun des segments $A_m^{(p)}$ ou $\tilde{A}_m^{(p)}$, qui sont entièrement contenus dans ces composantes. Si, au contraire, φ appartient à G_p, il appartient à une certaine composante S et, par suite, à un ou deux des segments fermés $\bar{O}_j$ et chaque point du segment $\bar{O}_j$ appartient à un nombre tout au plus fini de segments $A_m^{(p)}$ et $\tilde{A}_m^{(p)}$: à ceux dont les milieux sont contenus dans un seul segment $\bar{O}_{r_j}$, adjacent à $\bar{O}_j$, et à ceux dont les milieux sont contenus dans le segment $\bar{O}_j$ même.

Le système de segments ouverts B_n ainsi obtenu recouvre évidemment l'ensemble E_a, puisque les segments $B_m^{(p)}$ de chaque suite (pour p fixé) ont cette propriété et il possède les propriétés suivantes:

α. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lg(1/2\beta_n)} < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon < \tfrac{1}{4}$;

β. si $\varphi \in E_a$; φ appartient à un nombre infini de segments B_n;

γ. si $\varphi \in (a, a+2\pi] - E_a$, φ appartient à un nombre tout au plus fini de segments A_n et $\tilde{A}_n$.

En désignant par φ_n le centre commun de B_n et A_n nous avons

$$\{B_n\};\quad \{(\varphi_n - \beta_n, \varphi_n + \beta_n)\},$$
$$\{A_n\};\quad \{(\varphi_n - a_n, \varphi_n + a_n)\},$$
$$\{\tilde{A}_n\};\quad \left\{\left(\varphi_n + \frac{\pi}{6m_n} - a_n, \varphi_n + \frac{\pi}{6m_n} + a_n\right)\right\}.$$

Dans la suite nous définissons les suites des fonctions $\{f_n(\varphi)\}$ et $\{g_n(\varphi)\}$ continues sur tout l'axe réel et périodiques de période 2π;

$$(15)\qquad f_n(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon_n(a_n - |\varphi - \varphi_n|)\sin m_n|\varphi - \varphi_n| & \text{pour } \varphi \in (\varphi_n - a_n, \varphi_n + a_n), \\ 0 & \text{pour } \varphi \in (a, a+2\pi] - (\varphi_n - a_n, \varphi_n + a_n), \end{cases}$$

$$g_n(\varphi) = \begin{cases} \varepsilon_n'\left(a_n - \left|\varphi - \varphi_n - \dfrac{\pi}{6m_n}\right|\right)\sin 3m_n\left|\varphi - \varphi_n - \dfrac{\pi}{6m_n}\right| \\ \qquad\qquad \text{pour } \varphi \in \left(\varphi_n + \dfrac{\pi}{6m_n} - a_n, \varphi_n + \dfrac{\pi}{6m_n} + a_n\right), \\ 0 \quad \text{pour } \varphi \in (a, a+2\pi] - \left(\varphi_n + \dfrac{\pi}{6m_n} - a_n, \varphi_n + \dfrac{\pi}{6m_n} + a_n\right); \end{cases}$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{1}{a_n \log a_n m_n}, \qquad \varepsilon_n' = \frac{1}{a_n \log 3a_n m_n}.$$

Posons

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\varphi) + g_n(\varphi)]. \tag{16}$$

Il résulte du travail [3] que $F(\varphi)$ a les propriétés suivantes:

I. La fonction $F(\varphi)$ est continue et périodique de période 2π.

II. Les sommes partielles $s_k(\varphi)$ de la série de Fourier de la fonction $F(\varphi)$ sont bornées dans leur ensemble.

III. La série de Fourier de la fonction $F(\varphi)$ est divergente pour chaque $\varphi \in E$ et convergente pour chaque $\varphi \notin E$.

Démontrons maintenant que la partie imaginaire $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi)$ de la serie $\sum_n (a_n - ib_n) e^{i\varphi n}$ est convergente vers $\tilde{F}(\varphi)$ pour tous les $\varphi \in (a, a+2\pi] - E_a$.

À cet effet démontrons d'abord que $\tilde{F}(\varphi)$ existe pour tous les φ et a les propriétés suivantes:

I'. Elle est continue et périodique de période 2π,

(17) II'. $|\tilde{F}(\varphi)| < (5\pi+12)4\varepsilon$,

III'. $|\tilde{s}_k(\varphi, F)| \leqslant \frac{32}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon + \frac{4\ln 2}{\pi}$ pour tout $k \geqslant 3m_1$ et tout $\varphi \in (a, a+2\pi]$.

Remarquons que les fonctions conjuguées $\tilde{f}_n(\varphi)$ et $\tilde{g}_n(\varphi)$ s'expriment par les formules

$$\tilde{f}_n(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} dt, \quad \tilde{g}_n(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g_n(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} dt. \tag{18}$$

Les intégrales figurant dans (18) sont des intégrales au sens de Riemann, car les fonctions $f_n(\varphi)$ et $g_n(\varphi)$ remplissent la condition de Lipschitz.

En effet, il résulte de théorèmes connus que les fonctions $\tilde{f}_n(\varphi)$, $\tilde{g}_n(\varphi)$ sont continues et leurs séries de Fourier (aux sommes partielles $\tilde{s}_k(\varphi, f_n)$, $\tilde{s}_k(\varphi, g_n)$) sont convergentes, car $f_n(\varphi)$ et $g_n(\varphi)$ remplissent la condition de Hölder avec l'exposant p. ex. $\frac{1}{2}$ donc [5] $\tilde{f}_n(\varphi)$ et $\tilde{g}_n(\varphi)$ remplissent également la condition de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{2}$ et leurs séries de Fourier sont en vers elles partout convergentes en vertu du critère de Dini.

Démontrons ensuite que

$$|\tilde{f}_n(\varphi)| < \frac{5\pi+12}{2\pi \lg \beta_n m_n}, \quad |\tilde{g}_n(\varphi)| < \frac{5\pi+12}{2\pi \lg \beta_n m_n}. \tag{19}$$

Remarquons que

$$|\tilde{f}_n(\varphi)| \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\varphi+t)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right) dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n(t+\varphi)}{t} dt\right|$$
$$\leqslant \frac{2a_n\varepsilon_n}{\pi} + a_n\varepsilon_n(5\pi+11) \leqslant \frac{5\pi+12}{2\lg\beta_n m_n},$$

puis que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_n(\varphi+t)}{t} dt = \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi-\varphi_n, a_n, m_n)}{t} dt.$$

L'estimation demontrée s'obtiendra en vertu du lemme 1 dans le cas $k = 0$ (il est évident qu'alors $k \neq m_n$). L'expression considérée

$$\left|\sin x \ln\frac{\pi}{2x}\right| = \left|\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\pi}\ln\frac{\pi}{2x}\right| \leqslant \frac{\pi}{2e} < \frac{\pi}{4}$$

où $x = m_n(\varphi - \varphi_n) < \pi/2$.

D'une façon analogue nous obtiendrons pour la fonction $\tilde{g}_n(\varphi)$. Donc

$$|\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)| \leqslant \frac{5\pi+12}{\pi \lg \beta_n m_n}.$$

Comme que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lg\beta_n m_n < 4\varepsilon$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)]$ est uniformément convergente. Ses termes sont des fonctions continues, donc sa somme $\tilde{F}(\varphi)$ est continue et $\sum_n [\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)] = \tilde{F}(\varphi)$. En effet, les coefficients de Fourier de la fonction $F(\varphi)$ sont égaux aux sommes des coefficients des fonctions $f_n(\varphi) + g_n(\varphi)$. Donc, ces coefficients de la fonction $\tilde{F}(\varphi)$ sont les sommes des coefficients des fonctions $\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)$. (Ils sont les mêmes que pour les fonctions $f_n(\varphi) + g_n(\varphi)$, mais convenablement déplacés, éventuellement de signe changé). La série $\sum [\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)]$ étant uniformément convergente, les coefficients de la somme de cette série sont égaux aux sommes des coefficients des fonctions $\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)$ et par conséquent, à celles de la fonction $\tilde{F}(\varphi)$. Comme le système trigonométrique est complet, il suit donc que $\sum [\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)] = \tilde{F}(\varphi)$,

$$|\tilde{F}(\varphi)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}_n(\varphi) + \tilde{g}_n(\varphi)| \leqslant \frac{4}{\pi}(5\pi+12)\varepsilon.$$

Soit $F_1(\varphi) = \sum_l f_l(\varphi)$, $F_2(\varphi) = \sum_l g_l(\varphi)$, $\tilde{s}_n(\varphi, F) = \tilde{s}_n(\varphi, F_1) + \tilde{s}_n(\varphi, F_2)$.

Pour démontrer que les sommes partielles $\tilde{s}_k(\varphi, F)$ sont bornées dans leur ensembles, il suffit de prouver que $\tilde{s}_k(\varphi, t)$ et $\tilde{s}_k(\varphi, g)$ le sont aussi bornées.

Il résulte de la convergence uniforme de la série $\sum_{l=1}^{\infty} f_l(\varphi)$ que

$$s_k(\varphi, f) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} f_l(\varphi+t)\widetilde{D}_k(t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_l(\varphi+t)\widetilde{D}_k(t)\,dt$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty}\tilde{s}_k(\varphi, f_l),$$

où

$$D_k(t) = \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

$$(20)\qquad |\tilde{s}_k(\varphi, f_l)| \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\cos ut\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_l(\varphi+t)\sin kt\,dt\right|,$$

mais en vertu de (19)

$$(21)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\,dt\right| \leqslant \frac{5\pi+12}{2\pi\lg\beta_l m_l}\quad \text{pour chaque } \varphi\in(a, a+2\pi],$$

$$(22)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_l(\varphi+t)\sin kt\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}a_l\varepsilon_l 2\pi = \frac{1}{\pi\lg\beta_l m_l}$$

$$\text{pour chaque } f\in(a, a+2\pi].$$

$$(23)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\cos kt\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_l(\varphi+t)\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\cos kt\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| + \frac{1}{\pi\lg\beta_l m_l}.$$

Occupons nous maintenant de la limitation de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt = \frac{\varepsilon_l}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi-\varphi_l, a_l, m_l}{t}\cos kt\,dt,$$

$$(24)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| < 2\frac{a_l^2}{|\varphi-\varphi_l|}\cdot\frac{\varepsilon_l}{\pi} \leqslant 2\frac{a_l\varepsilon_l}{\pi} = \frac{1}{\pi\lg\beta_l m_l}.$$

pour $\pi \geqslant |\varphi-\varphi_l| > a_l$ en vertu du lemme 1.

Enfin, en tenant compte de (20), (21), (22), (23) et (24) nous avons l'estimation

$$(25)\qquad |\tilde{s}_k(\varphi, f_l)| < \frac{5\pi+16}{2\pi\lg\beta_l m_l}$$

pour chaque φ telle que $\pi \geqslant |\varphi-\varphi_l| > a_l$.

Prenons $k \geqslant 3m_1$ et choisissons n de telle façon que $m_n \leqslant k < m_{n+1}$. De la définition de la suite $\{m_n\}$ nous obtenons $m_l/k \leqslant \frac{1}{2}$ pour $l = 1, 2, \ldots, n-1$ et $m_l/k \geqslant 2$ pour $l = n+2, n+3, \ldots$

En fixant que $l \neq n$ et $l \neq n+1$ en vertu du lemme 1 nous aurons l'estimation

$$(26)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_l(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_l}{\pi}a_l(4\pi+11) + a_l\varepsilon_l = \dfrac{5\pi+11}{2\pi\lg\beta_l m_l} \\ \qquad \text{pour } 0 \leqslant \varphi-\varphi_l < \dfrac{\pi}{2|m_l-k|}, \\ \dfrac{\varepsilon_l a_l}{\pi}(4\pi+11) = \dfrac{4a+11}{2\pi\lg\beta_l m_l} \\ \qquad \text{pour } \varphi-\varphi_l \geqslant \dfrac{\pi}{2|m_l-k|} \end{cases}$$

car pour $l > n+1$

$$\left|\sin m_l(\varphi-\varphi_l)\ln\frac{\pi}{2|m_l-k|(\varphi-\varphi_l)}\right| < \left|\sin m_l(\varphi-\varphi_l)\ln\frac{\pi}{m_l(\varphi-\varphi_l)}\right| < \frac{\pi}{2},$$

pour $l < n$

$$\left|\sin m_l(\varphi-\varphi_l)\ln\frac{\pi}{2|m_l-k|(\varphi-\varphi_l)}\right| < \left|\sin m_l(\varphi-\varphi_l)\ln\frac{\pi}{2(k-\frac{1}{2}k)(\varphi-\varphi_l)}\right|$$

$$< \left|\sin\frac{k}{2}(\varphi-\varphi_l)\ln\frac{\pi}{k(\varphi-\varphi_l)}\right| < \frac{\pi}{4}$$

puisque

$$\frac{k}{2}(\varphi-\varphi_l) < (k-m_l)(\varphi-\varphi_l) < \frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas $k = m_n$ et $k = m_{n+1}$ en vertu du lemme 1

$$(27)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_n(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\varepsilon_n a_n(4\pi+9) + \frac{\varepsilon_n a_n}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \frac{\ln 2}{\pi}$$

$$\leqslant \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{5\pi+10}{2\pi\lg\beta_n m_n}$$

pour chaque $\varphi\in(a, a+2\pi]$;

$$(27')\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_{n+1}(\varphi+t)}{t}\cos kt\,dt\right| \leqslant \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{5\pi+10}{2\pi\lg\beta_n m_n}$$

pour chaque $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi]$, car

$$\frac{\ln\dfrac{a_n}{\varphi-\varphi_n}}{\lg a_n m_n} = \frac{\ln\dfrac{1}{m_n(\varphi-\varphi_n)}+\ln m_n a_n}{\lg a_n m_n} = \frac{\ln\dfrac{1}{m_n(\varphi-\varphi_n)}}{\lg a_n m_n}+\ln 2\,.$$

Dans la suite posons

$$\tilde{s}_k(\varphi, F_1) = \sum_{l=1}^{n-1}\tilde{s}_k(\varphi, f_l)+\tilde{s}_k(\varphi, f_n)+\tilde{s}_k(\varphi, f_{n+1})+\sum_{l=n+2}^{\infty}\tilde{s}_k(\varphi, f_l)$$

et designons les sommes ci-dessus respectivement par $\tilde{s}_k^1, \tilde{s}_k^2, \tilde{s}_k^3, \tilde{s}_k^4$.

En vertu des inégalités (20), (21), (22), (23), (24) et (26)

$$(28)\qquad |\tilde{s}_k^1| \leqslant \sum_{l=1}^{n-1}|\tilde{s}_k(\varphi, f_l)|$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{5\pi+12}{2\pi\lg\beta_l m_l}+\frac{1}{\pi\lg\beta_l m_l}+\frac{1}{\pi\lg\beta_l m_l}+\frac{5\pi+11}{2\pi\lg\beta_l m_l}\right)$$

$$\leqslant \frac{5\pi+13}{\pi}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{\lg\beta_l m_l} \leqslant \frac{4}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon\,.$$

$$|\tilde{s}_k^4| \leqslant \sum_{l=k+2}^{\infty}|\tilde{s}_k(\varphi, f_l)| \leqslant \frac{4}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon\,.$$

Evaluons ensuite $|\tilde{s}_k^2|$ et $|\tilde{s}_k^3|$.

Si $m_n/k \leqslant \frac{1}{2}$ nous ajoutons $\tilde{s}_k^2$ à la somme $\tilde{s}_k^1$, ce qui ne modifiera pas l'évaluation, par contre si $\frac{1}{2} < m_n/k \leqslant 1$ nous évaluons $|\tilde{s}_k^2|$ en vertu de (27) comme il suit:

$$(29)\qquad |\tilde{s}_k^2| \leqslant \frac{5\pi+12}{2\pi\lg\beta_n m_n}+\frac{1}{\pi\lg\beta_n m_n}+\frac{1}{\pi^2\lg\beta_n m_n}+\frac{5\pi+10}{2\pi\lg\beta_n m_n}+\frac{\ln 2}{\pi}$$

$$\leqslant \frac{10\pi+25}{2\pi\lg\beta_n m_n}+\frac{\ln 2}{\pi} \leqslant \frac{4}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{\ln 2}{\pi}\,.$$

Si ensuite $m_{n+1}/k \geqslant 2$ en ajoutant $\tilde{s}_k^3$ à la somme $\tilde{s}_k^4$ nous ne modifions pas l'évaluation de $\tilde{s}_k^4$. Par contre si $1 \leqslant m_{n+1}/k < 2$, alors

$$(30)\qquad |\tilde{s}_k^3| \leqslant \frac{10\pi+25}{2\pi\lg\beta_n m_n}+\frac{\ln 2}{\pi} \leqslant \frac{4}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{\ln 2}{\pi}\,.$$

En définitive des formules (28), (29) et (30) il vient

$$(31)\qquad |\tilde{s}_k(\varphi, F_1)| \leqslant \frac{16}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{2\ln 2}{\pi}$$

pour chaque $k \geqslant m_1$ et chaque $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi]$.

Nous obtenons d'une façon analogue l'estimation de pour chaque $k \leqslant 3m_1$ et chaque $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi]$ pour $\tilde{s}_k(\varphi, F_2)$

$$(32)\qquad |\tilde{s}_k(\varphi, F_2)| \leqslant \frac{16}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{2\ln 2}{\pi}\,.$$

Des deux dernières évaluations nous tirons

$$(33)\qquad |\tilde{s}_k(\varphi, F)| \leqslant \frac{32}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{4}{\pi}\ln 2$$

pour chaque $k \geqslant 3m_1$ et chaque $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi]$.

Les $\tilde{s}_k(\varphi, F)$ étant continues et bornées, leur quantité finie pour $k < 3m_1$ est uniformément bornée, par conséquent toutes les sommes $\tilde{s}_k(\varphi, F)$ sont uniformément bornées par le nombre

$$(33')\qquad \max_{\varphi\in(\alpha,\alpha+2\pi]}\left(\max_{0\leqslant k<3m_1}|\tilde{s}_k(\varphi, F)|, \frac{32}{\pi}(5\pi+13)\varepsilon+\frac{4}{\pi}\ln 2\right).$$

Supposons que $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi]-E_\alpha$. En vertu du mode de recouvrement adopté, il résulte que φ appartient à un nombre tout au plus fini de segments A_n et $\tilde{A}_n$, soit $\varphi \notin A_n$ et $\varphi \notin \tilde{A}_n$ pour $n > n_0$. Soit μ un nombre arbitraire positif. La série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lg\beta_n m_n$ est convergente, donc il existe $n_1 \geqslant n_6$ tel que

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{\lg\beta_n m_n} < \frac{\mu}{28}\,.$$

Mais en vertu du critère de Dini nous avons $\tilde{s}_k(\varphi, f_n) \to \tilde{f}_n(\varphi)$ pour $k > k_0$,

$$\sum_{n=1}^{n_1}|\tilde{s}_k(\varphi, f_n)-\tilde{f}_n(\varphi)| < \frac{\mu}{28}\cdot\frac{13\pi-38}{2\pi}\,.$$

Vu (19),

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty}|\tilde{f}_n(\varphi)| \leqslant \frac{5\pi+12}{2\pi}\sum_{n=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{\lg\beta_n m_n} < \frac{5\pi+12}{2\pi}\cdot\frac{\mu}{28}\,.$$

De (24) il s'ensuit que

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty}|\tilde{s}_k(\varphi, f_n)| \leqslant \frac{5\pi+13}{\pi}\sum_{n=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{\lg\beta_n m_n} < \frac{5\pi+13}{\pi}\cdot\frac{\mu}{28}\,.$$

Avec les données précédantes nous pouvons évaluer la différence

$$|\tilde{s}_k(\varphi, F_1) - \tilde{F}_1(\varphi)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{s}_k(\varphi, f_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(\varphi)\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{n_1} |\tilde{s}_k(\varphi, f_n) - \tilde{f}_n(\varphi)| +$$

$$+ \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |\tilde{f}_n(\varphi)| + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |\tilde{s}_k(\varphi, f_n)| \leqslant \frac{\mu}{2} \quad \text{pour} \quad k > k_0.$$

Pareillement

$$|\tilde{s}_k(\varphi, F_2) - \tilde{F}_2(\varphi)| \leqslant \frac{\mu}{2} \quad \text{pour} \quad k > k_0$$

d'où

$$|\tilde{s}_k(\varphi, F) - \tilde{F}(\varphi)| \leqslant |\tilde{s}_k(\varphi, F_1) - \tilde{F}_1(\varphi)| + |\tilde{s}_k(\varphi, F_2) - \tilde{F}_2(\varphi)| \leqslant \mu$$

pour $k > k_0$; ce qui prouve la convergence des séries conjuguées de Fourier au point $\varphi \in (\alpha, \alpha+2\pi] - E_a$.

Etant donné la continuité des fonctions F et des fonctions conjuguées $\tilde{F}$, leurs séries de Fourier sont uniformément sommables par la première moyenne vers ces fonctions. Donc, les premières moyennes des sommes partielles de la série entière $\Sigma(a_n - ib_n)e^{i\varphi_n}$ sont uniformément convergentes (sur la circonférence du cercle unité). En vertu du principe du maximum, elles sont donc uniformément convergentes vers une certaine fonction $H(z)$ continue dans $|z| \leqslant 1$, holomorphe dans $|z| < 1$. Mais dans $|z| < 1$ la fonction $H(z)$ est la somme de la série entière

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n - ib_n) z^n,$$

elle est donc une série entière continue.

Théorème. *Soit un ensèmble E situé sur la circonférence du cercle unité, périodique de période 2π et de classe $G_{\delta\sigma}$. Soit $E \subset \Phi$ où Φ est un ensemble de classe F_σ de mesure logarithmique zéro. Il existe alors une série entière continue ayant les propriétés suivantes:*

1° $|S_k(\varphi)| \leqslant A$ *pour chaque φ et chaque $k = 0, 1, 2, \ldots$*

2° *La suite $\{S_k(\varphi)\}$ est divergente en tout point $\varphi \in E$.*

3° *La suite $\{S_k(\varphi)\}$ est convergente en tout point φ de l'ensemble complémentaire de l'ensemble E à la circonférence.*

Démonstration. Dans le travail [3] il a été démontré que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où $E_n \in G_\delta$, $\bar{E}_n$ est de mesure logarithmique zéro et $E_l E_k = 0$ pour $l \neq k$.

Pour démontrer les propriétés 1°, 2° et 3° il suffit de montrer que

1'° $|s_k(\varphi, F)| < A_1 < +\infty$ et $|\tilde{s}_k(\varphi, F)| < A_2 < +\infty$ pour chaque φ et chaque $k = 0, 1, 2, \ldots$

2'° La suite $\{s_k(\varphi, F)\}$ est divergente pour chaque $\varphi \in E$.

3'° Les suites $\{s_k(\varphi, F)\}$ et $\{\tilde{s}_k(\varphi, F)\}$ sont convergentes pour chaque $\varphi \in CE$.

Le lemme assure l'existence de la fonction $F_n(\varphi)$ continue (avec $\tilde{F}_n(\varphi)$ continue) périodique et telle que la série de Fourier est divergente sur l'ensemble E_n et convergente sur l'ensemble CE_n et que la série conjuguée de Fourier est également convergente sur l'ensemble CE_n et que

$$|s_k(\varphi, F_n)| \leqslant A_1 < +\infty, \qquad |\tilde{s}_k(\varphi, F_n)| \leqslant A_2 < +\infty$$

pour chaque φ et $k = 0, 1, 2, \ldots$

Les fonctions $F_n(\varphi)$ et $\tilde{F}_n(\varphi)$ sont bornées et nous pouvons admettre que

$$(34) \qquad |F_n(\varphi)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\tilde{F}_n(\varphi)| \leqslant 1$$

pour chaque φ et $n = 1, 2, \ldots$ ainsi que

$$(35) \qquad |s_k(\varphi, F_n)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\tilde{s}_k(\varphi, F_n)| \leqslant 1$$

pour chaque φ, $n = 1, 2, \ldots$, et $k = 0, 1, 2, \ldots$

Prenons

$$(36) \qquad F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} F_n(\varphi) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{F}_n(\varphi).$$

Vu (24) les fonctions $F(\varphi)$ et $\tilde{F}(\varphi)$ sont continues et périodiques. Comme dans la démonstration du lemme il suit que $\Sigma\tilde{F}_n = \widetilde{\Sigma F_n}$. En outre

$$(37) \qquad s_k(\varphi, F) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} s_k(\varphi, F_n), \qquad \tilde{s}_k(\varphi, F) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{s}_k(\varphi, F_n),$$

car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} F_n(\varphi + t) \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{F_n(\varphi+t) - F_n(\varphi-t)}{2} \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

sont uniformément convergentes par rapport à t et on peut les intégrer membre à membre. Vu (34) les séries qui figurent dans (37) sont également uniformément convergentes par rapport à φ et k. Il résulte donc comme dans la démonstration du lemme (ce qui est connu de plus longtemps) que F et $\tilde{F}$ sont les parties réelle et imaginaire de la série entière continue dans le cercle unité. Dans le travail [3] il a été prouvé que la suite $\{s_k(\varphi, F)\}$

est divergente pour chaque $\varphi \in E$ et qu'elle est convergente pour chaque $\varphi \notin E$. Il nous reste à démontrer que la suite $\{\tilde{s}_k(\varphi, F)\}$ est convergente pour tout $\varphi \notin E$.

En effet, si $\varphi \notin E$, alors $\varphi \notin E_n$ pour tout n. La suite $\{\tilde{s}_k(\varphi, F_n)\}$ est convergente pour chaque $\varphi \notin E_n$ pour chaque n et $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{s}_k(\varphi, F_n) = \tilde{F}_n(\varphi)$. En passant dans (37) à la limite avec k, ce qui est permis en vertu de la convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{s}_k(\varphi, F_n),$$

nous obtiendrons

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{s}_k(\varphi, F) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tilde{F}_n(\varphi) = \tilde{F}(\varphi)$$

ce qui termine la démonstration.

Travaux cités

[1] P. Erdös, F. Herzog, G. Piranian, *Sets of divergence of Taylor series and of trigonometric series*, Math. Scand. 2 (1954), p. 262-266.

[2] H. Steinhaus, *Sur les défauts de convergence des séries trigonométriques et potentielles*, Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lettres, Série A, Sci. Math., 1919, p. 123-141.

[3] J. Śladkowska, *Sur l'ensemble des points de divergence des séries de Fourier des fonctions continues*, Fund. Math. 49 (1961), p. 272-294.

[4] П. Л. Ульянов, *О расходимости рядов Фурье*, Успехи мат. наук. 12, 3 (75) (1957), p. 75-132.

[5] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge 1959; ed. II, t. I, p. XII+383; t. II, p. VII+354.

Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1963

Concerning some problems raised by A. Lelek

by

L. R. King, J. H. Roberts, and G. M. Rosenstein, Jr.* (Durham)

1. Introduction. A. Lelek raises in [3] a series of questions about fixations in Euclidean n-dimensional space, $\mathcal{E}^n$. We may ask when each of the following properties hold for a collection $\boldsymbol{C}$ of subsets of $\mathcal{E}^n$.

(I) *There exists a* 0-*dimensional compact set* $Z \subseteq \mathcal{E}^n$ *such that* $Z \cap C \neq 0$ *for every* $C \in \boldsymbol{C}$.

(II) *There is an arc* $A \subseteq \mathcal{E}^n$ *such that* $A \cap C \neq 0$ *for every* $C \in \boldsymbol{C}$.

(III) *There exists, for every* $\zeta > 0$, *a finite sequence* $Z_1, \ldots, Z_k$ *of closed and mutually disjoint subsets of* $\mathcal{E}^n$ *such that* $\delta(Z_i) < \zeta$ *for* $i = 1, \ldots, k$ *and* $\big(\bigcup_{i=1}^{k} Z_i\big) \cap C \neq 0$ *for all* $C \in \boldsymbol{C}$.

Let $\boldsymbol{C}^*$ be the union of all sets belonging to $\boldsymbol{C}$. Denote by $A(\boldsymbol{C})$ the set of all points $p \in \mathcal{E}^n$ such that there is a sequence $C_1, C_2, \ldots$ of elements of $\boldsymbol{C}$ such that $\{p\} = \operatorname{Lim} C_i$ (see [2] for the definition of Lim). Lelek asks the following questions:

PROBLEM 1. *Is it true that if* $\boldsymbol{C}^*$ *is a bounded subset of the plane and there exists an* $\varepsilon > 0$ *such that* $\boldsymbol{C}$ *is a disjoint collection of connected sets of diameter greater than* ε, *then* (I) *holds?*

PROBLEM 2. *Is it true that if* $\boldsymbol{C}^*$ *is a bounded subset of the plane and* $\boldsymbol{C}$ *is a disjoint collection of connected sets then* (III) *implies* (I)?

PROBLEM 3. *Is it true that if* $\boldsymbol{C}^*$ *is a subset of the plane,* $\boldsymbol{C}$ *is a disjoint collection of connected sets and* $\dim A(\boldsymbol{C}) \leqslant 0$, *then* (II) *implies* (III)?

In this paper, we give negative answers to these questions by constructing two counter-examples. The collections $\boldsymbol{C}$ and $\boldsymbol{D}$ defined are collections of subsets of the unit square, $\mathcal{J}^2$.

2. Preliminary definitions and results. We first define some subsets of $\mathcal{J}^2$ which will be used in both constructions. Let ϱ be the usual metric on $\mathcal{J}^2$; let $B(x, r)$ $\big(\overline{B}(x, r)\big)$ be the open (closed) ball of radius r

* The authors wish to thank Dr. R. Duda for his suggestions which have made this paper easier to read.

This research was supported by the National Science Foundation U.S.A.