then it is clear that $\mathrm{BP}^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{BP}^\alpha_\beta$. (The case of a singular α need no discussion since in that case the α-free B.a. is also the α^+-free B.a. where α^+ is the next cardinal after α.) If $\beta > 0$ then the power of BP^α_β is at most that of the family of all subsets of $\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{BP}^\alpha_\gamma$ which are of power $<\alpha$. This, in case $\overline{\overline{\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{BP}^\alpha_\gamma}} \geqslant \alpha$, is $\sum_{\lambda<\alpha}(\overline{\overline{\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{BP}^\alpha_\gamma}})^\lambda$, where the summation is over all cardinals $<\alpha$ (cardinal summation and exponentiation), and in case $\alpha > \overline{\overline{\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{PB}^\alpha_\gamma}}$ it is $2^{\bigcup_{\gamma<\beta}\mathrm{BP}^\alpha_\gamma}$. We distinguish two cases:

(i) $\delta > \alpha$. Then $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha_0}} = \delta$, $(\sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta)^\beta = \sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta$ whenever $\beta < \alpha$, hence $\sum_{\beta<\alpha}(\sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta)^\beta = \sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta$. Consequently $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha_\beta}} \leqslant \sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta$ for all $\beta < \alpha$ and therefore $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha}} \leqslant \sum_{\beta<\alpha}\delta^\beta$. If we assume the general continuum hypothesis this sum would be either δ or δ^+. (It will be δ if δ is not of the form $\bigcup_{\lambda<\gamma}\beta_\lambda$ where $\gamma < \alpha$ and $\beta_\lambda < \delta$ for all $\lambda < \gamma$.)

(ii) $\alpha > \delta$. Here if we assume the general continuum hypothesis it is easily seen that $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha_\beta}} \leqslant \alpha$ for all $\beta < \alpha$ hence $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha}} \leqslant \alpha$. Without the general continuum hypothesis the estimate is more complicated: Let $f(\delta, \beta)$ be defined by $f(\delta, 0) = \delta$, $f(\delta, \beta+1) = 2^{f(\delta,\beta)}$ and $f(\delta, \beta) = \sum_{\gamma<\beta}f(\delta, \gamma)$ if $\beta = \bigcup\beta > 0$. If, for no $\beta < \alpha$, $f(\delta, \beta) \geqslant \alpha$, then $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha}} \leqslant \alpha$. Otherwise, if β_0 is the first $\beta < \alpha$ for which $f(\delta, \beta) \geqslant \alpha$, then $\overline{\overline{\mathrm{BP}^\alpha}} \leqslant \sum_{\gamma<\alpha}f(\delta, \beta_0)^\gamma$.

We get the following

THEOREM. *If α and δ are infinite cardinals and α is regular, then the α-free B.a. on δ generators is at least of power* $\mathrm{Max}(\alpha, \delta)$. *Assuming the general continuum hypothesis it is of power α if $\alpha > \delta$ and either of power δ or δ^+ if $\alpha \leqslant \delta$.*

References

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, revised edition, Am. Math. Soc. Colloquium Publications 30, Providence 1948.

[2] — *On the structures of abstract algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935), pp. 433-454.

[3] H. Gaifman, *Two contributions to the theory of Boolean algebras*, Thesis, University of California, Berkeley 1962.

[4] — *Free complete Boolean algebras*, and *Complete Boolean algebras* and *Boolean polynomials*, abstracts in Am. Math. Soc. Notices 8 (1961), p. 356 and p. 510.

[5] A. Hales, *On the nonexistence of free complete Boolean algebras*, Thesis, California Institute of Technology, Pasadena 1962.

[6] R. S. Peirce, *Distributivity and the normal completion of Boolean algebras*, Pacific J. Math. 8 (1958), pp. 133-140.

[7] L. Rieger, *On the free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras*, Fund. Math. 38 (1951), pp. 35-52.

[8] R. Sikorski, *Boolean algebras*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

Reçu par la Rédaction le 4. 1. 1963

Ein eindimensionales Kompaktum im E^3, das sich nicht lagetreu in die Mengersche Universalkurve einbetten läßt

von

H. G. Bothe (Berlin)

1. Vorbemerkungen. E^3 sei der dreidimensionale euklidische Raum, den wir auf ein festes kartesisches Koordinatensystem bezogen denken. Der *Einheitswürfel* W_e ist die Menge aller Punkte $p = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, für die $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$ gilt ($i = 1, 2, 3$). Um die Mengersche Universalkurve U zu definieren, bezeichnen wir mit D_i die Vereinigung aller offenen Intervalle $(k/3^i, (k+1)/3^i)$, wo k alle ganzen Zahlen zwischen 1 und 3^i durchläuft, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen und mit R_i die Menge aller Punkte aus W_e, von deren Koordinaten wenigstens zwei zu D_i gehören. Es ist dann $U = W_e \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$. Jeder eindimensionale metrische Raum läßt sich homöomorph in U einbetten ([2], Kap. XII).

Es soll hier ein in E^3 enthaltenes eindimensionalen Kompaktum X konstruiert werden, zu dem es keinen Homöomorphismus h von E^3 auf sich mit der Eigenschaft $h(X) \subseteq U$ gibt.

2. Eine Eigenschaft von U. *Ist C eine zahme einfach geschlossene Kurve in E^3 und $\varepsilon > 0$, so gibt es einen Homöomorphismus h von E^3 auf sich, der jeden Punkt von C um weniger als ε verrückt mit der Eigenschaft $h(C) \cap U = 0$.*

Beweis. Es sei δ eine beliebige positive Zahl. Da C zahm ist, gibt es einen Homöomorphismus h_1 von E^3 auf sich, der jeden Punkt von C um weniger als δ verrückt und für den $C_1 = h_1(C)$ ein einfach geschlossenes Polygon ist (Approximation von Homöomorphismen in den E^3 durch semilineare Abbildungen; siehe [3]). Man findet leicht einen zweiten Homöomorphismus h_2 von E^3 auf sich, der jeden Punkt von C_1 um weniger als δ verrückt und für den $C_2 = h_2(C_1)$ ein Polygon ist, dessen sämtliche Strecken zu Koordinatenachsen parallel sind. Mit R_i^* wollen wir die Menge aller der Punkte bezeichnen, deren sämtliche Koordinaten in $D_i \cup (E^1 \setminus [0, 1])$ liegen. Die Vereinigung $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i^*$ ist dann eine offene dichte Teilmenge von E^3. Der Homöomorphismus h_3 sei schließlich eine

Translation von E^3, die alle Punkte um weniger als δ verrückt und die Eckpunkte von C_2 in zu R^* gehörende Punkte überführt. Aus der Definition der Mengen R_i und R_i^* und der Tatsache, daß alle Strecken von $C_3 = h_3(C_2)$ zu Koordinatenachsen parallel sind, folgt dann, daß $C_3 = h_3h_2h_1(C)$ zu U fremd ist. Wählt man $\delta = \varepsilon/3$, so hat $h = h_3h_2h_1$ alle geforderten Eigenschaften.

Als einfache Folgerung hieraus ergibt sich folgende Bemerkung, die wir später verwenden werden:

(A) *Ist A ein in E^3 enthaltenes Kompaktum, das sich durch einen Homöomorphismus von E^3 auf sich auf eine Teilmenge von U abbilden läßt, so gibt es zu jeder zahmen einfach geschlossenen Kurve C und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Homöomorphismus h von E^3 auf sich, der die Punkte von C um weniger als ε verrückt mit der Eigenschaft $h(C) \cap A = 0$.*

3. Konstruktion von X. Es sei W_e der Einheitswürfel in E^3 und F_e die durch $\xi_3 = 0$ bestimmte Seitenfläche von W_e. Ist $n \geqslant 1$ eine ganze Zahl, so verstehen wir unter der *n-Unterteilung* $\mathfrak{W}_e^{(n)}$ von W_e die Menge aller Würfel, die sich ergeben, wenn man W_e durch achsenparallele Ebenen in Würfel der Kantenlänge $1/n$ zerschneidet. $\mathfrak{W}_e^{(n)}$ besteht also aus n^3 achsenparallelen abgeschlossenen Würfeln der Kantenlänge $1/n$, die paarweise keinen inneren Punkt gemeinsam haben und deren Vereinigung W_e ergibt.

Es sei z das Zentrum von F_e und z' das Zentrum der F_e gegenüberliegenden Seitenfläche von W_e ($z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; $z' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$) und B ein polygonaler Bogen, der z mit z' verbindet und mit Ausnahme seiner Endpunkte z, z' ganz im Innern von W_e verläuft. Einen solchen Bogen wollen wir verknotet nennen, falls er durch Ergänzung mit einem auf der Oberfläche von W_e gelegenen polygonalen Bogen B', der ebenfalls die Endpunkte z und z' besitzt, in ein verknotetes einfach geschlossenes Polygon übergeht. Diese Definition ist von der Auswahl der Bogens B' unabhängig (siehe [4], Seite 5). Es sei n eine ungerade Zahl. Wir wollen einen Bogen B der soeben beschriebenen Art zur Unterteilung $\mathfrak{W}_e^{(n)}$ gehörend nennen, falls es eine Folge $W_1, W_2, \ldots, W_k$ von Würfeln aus $\mathfrak{W}_e^{(n)}$ mit den Mittelpunkten $z_1, z_2, \ldots, z_k$ gibt, so daß B gleich dem Streckenzug

$$[z, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_k, z']$$

wird und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) z ist Mittelpunkt einer Seitenfläche von W_1; z' ist Mittelpunkt einer Seitenfläche von W_k.

(b) $W_i \cap W_{i+1}$ ist eine gemeinsame Seitenfläche von W_i und W_{i+1}.

(c) Aus $W_i \cap W_j \neq 0$ folgt $|i-j| \leqslant 2$.

Sicher gibt es verknotete Bogen, die zu einer Unterteilung $\mathfrak{W}_e^{(n)}$ von W_e gehören. Wir wollen jetzt ein für allemal einen festen verknoteten Bogen B_e wählen, der zu $\mathfrak{W}_e^{(m)}$ gehört. Auch die Zahl m soll im folgenden fest beibehalten werden. Wie oben seien $W_1, W_2, \ldots, W_k$ die Würfel aus $\mathfrak{W}_e^{(m)}$, für deren Mittelpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die Gleichung $B_e = [z, z_1] \cup \ldots \cup [z_k, z']$ gilt und die den Bedingungen (a), (b) und (c) genügen. Es sei $Y_e = W_e \backslash (W_1 \cup \ldots \cup W_k)$ und $T_e = W_e \backslash Y_e$ gesetzt. Mit S^3 bezeichnen wir wie üblich die dreidimensionale Sphäre, die aus E^3 durch Hinzufügen von einem Punkt entsteht. Dann ist die Menge $\overline{S^3 \backslash Y_e} = \overline{T}_e \cup \overline{(S^3 \backslash W_e)}$ ein Vollring, d.h. eine zum Volltorus homöomorphe Menge (siehe hierzu [5], § 3, insbesondere Hilfssatz 1). Dieser Vollring ist in S^3 verknotet (siehe hierzu [5], § 6 und § 7). Ist C ein in $E^3 \backslash Y_e$ enthaltenes einfach geschlossenes unverknotetes Polygon, so gibt es nach [5], Seite 164, Satz 1, ein in $S^3 \backslash Y_e$ gelegenes zur abgeschlossenen Vollkugel homöomorphes Polyeder, das C umfaßt. Daraus ergibt sich leicht, daß es in $E^3 \backslash Y_e$ ein zur abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphes endliches Polyeder gibt, dessen Rand gerade C ist.

Die beiden Basen der "Röhre" T_e — die Seitenflächen der Würfel W_1 bzw. W_k also, auf denen die Punkte z bzw. z' liegen — seien D_e bzw. D_e' genannt. Die Mengen W_e, F_e, Y_e, T_e, D_e, D_e' und die Zahl m sind feste Objekte, die im folgenden nicht abgeändert werden sollen. Auf folgende beiden Eigenschaften von Y_e und T_e werden wir später zurückgreifen:

(B) *Ist C ein einfach geschlossenes unverknotetes Polygon in $E^3 \backslash Y_e$, so gibt es ein in $E^3 \backslash Y_e$ gelegenes zur abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphes endliches Polyeder, das von C berandet wird.*

(C) *Ist B ein Bogen in T_e, der einen Punkt aus D_e mit einem Punkt aus D_e' verbindet, so gibt es einen Punkt p auf B, der nicht durch eine in T_e enthaltene Strecke mit einem Punkt aus D_e oder aus D_e' verbunden werden kann.*

Die Behauptung (B) wurde oben bewiesen. Die Behauptung (C) ist einfach einzusehen (B_e war ja verknotet), kann aber auch durch genügend komplizierte Wahl von B_e trivial erreicht werden.

Es sei nun W ein beliebiger achsenparalleler Würfel. Genau wie oben beim Einheitswürfel W_e betrachten wir auch hier n-Unterteilungen $\mathfrak{W}^{(n)}$ von W, d.h. Unterteilungen von W in n^3 kongruente achsenparallele Würfel, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben. Ist $\mathfrak{K}$ eine Menge von in $\mathfrak{W}^{(r)}$ enthaltenen Würfeln und $n \geqslant 1$, so sei $\mathfrak{K}^{(n)}$ (die n-Unterteilung von $\mathfrak{K}$) die Menge aller Würfel aus $\mathfrak{W}^{(r \cdot n)}$, die in Würfeln aus $\mathfrak{K}$ enthalten sind. Offenbar ist $\mathfrak{W}^{(r \cdot n)} = (\mathfrak{W}^{(r)})^{(n)}$.

Uns interessiert zunächst $\mathfrak{W}^{(3)}$. Wir wollen die Würfel aus $\mathfrak{W}^{(3)}$ so numerieren, daß W_0 der Zentralwürfel ist, d.h. der Würfel von $\mathfrak{W}^{(3)}$, der mit W den gleichen Mittelpunkt hat, $W_1, \ldots, W_6$ mit W_0 eine Seitenfläche gemeinsam haben, während $W_7, \ldots, W_{26}$ mit W_0 nur eine gemeinsame Kante oder einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Die gemeinsame Seitenfläche von W_i mit W_0 sei mit F_i bezeichnet ($i = 1, \ldots, 6$). Zu jedem Index $i = 1, \ldots, 6$ wählen wir eine Ähnlichkeitsabbildung f_i von E^3 auf sich, die W_e auf W_i und F_e auf F_i abbildet. Wir setzen $Y_i = f_i(Y_e)$ und

$$V(W) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_6 \cup W_7 \cup \ldots \cup W_{26}\,.$$

$V(W)$ ist Vereinigung von gewissen Würfeln aus $\mathfrak{W}^{(3m)}$, und wir bezeichnen die Menge dieser in $V(W)$ enthaltenen Würfel aus $\mathfrak{W}^{(3m)}$ mit $\mathfrak{B}(W)$. Es ist also $\mathfrak{B}(W) \subseteq \mathfrak{W}^{(3m)}$ und $V(W) = \bigcup_{W' \in \mathfrak{B}(W)} W'$.

Um X zu definieren, setzen wir

$$X_0 = W_e; \qquad \mathfrak{X}_0 = \mathfrak{W}_e^{(1)} = \{W_e\},$$
$$X_1 = V(W_e); \qquad \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{B}(W_e),$$
$$X_{i+1} = \bigcup_{W \in \mathfrak{X}_i} V(W); \qquad \mathfrak{X}_{i+1} = \bigcup_{W \in \mathfrak{X}_i} \mathfrak{B}(W) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Für jedes i ist X_i ein in W_e enthaltenes Kompaktum, $\mathfrak{X}_i$ eine Teilmenge von $\mathfrak{W}^{(m_i)}$ ($m_i = 3^i m^i$) und es gilt $X_i = \bigcup_{W \in \mathfrak{X}_i} W$. Weiterhin gilt $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_i \supseteq X_{i+1} \supseteq \ldots$ Wir setzen

$$X = \bigcap_{i=0}^{\infty} X_i\,.$$

4. $\dim X = 1$. Zunächst sieht man unmittelbar, daß X alle Kanten des Würfels W_e enthält also mindestens eindimensional ist. Um zu zeigen, daß X höchstens eindimensional ist, genügt es nach [1], Seite 208, zu beweisen, daß X keine zusammenhängende offene Teilmenge von E^3 zerlegt.

Um das nachzuweisen, benützen wir die folgenden leicht zu bestätigenden Tatsachen: Ist W ein achsenparalleler Würfel, so ist $W \setminus V(W)$ zusammenhängend. Sind W_1 und W_2 zwei kongruente achsenparallele Würfel, die sich längs einer gemeinsamen Seitenfläche berühren, so ist $\big(W_1 \setminus V(W_1)\big) \cup \big(W_2 \setminus V(W_2)\big)$ zusammenhängend. Wir nennen eine Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{W}^{(n)}$ *stark zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Würfeln W und W' von $\mathfrak{K}$ stets eine Folge $W = W_1, W_2, \ldots, W_l = W'$ von zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Würfeln gibt, in der je zwei aufeinanderfolgende Würfel eine gemeinsame Seitenfläche haben. Es gilt dann: Ist $\mathfrak{K}$ eine stark zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{W}^{(n)}$, so ist die Menge $\bigcup_{W \in \mathfrak{K}} \big(W \setminus V(W)\big)$ zusammenhängend.

Es sei M eine offene zusammenhängende Teilmenge des E^3. Wir haben zu zeigen, daß $M \setminus X$ zusammenhängend ist. Sind $K_1, K_2, \ldots$ die Komponenten des Durchschnittes $W_e \cap M$, so sieht man leicht, daß es genügt den Zusammenhang der Mengen $K_i \setminus X$ nachzuweisen. (Man

denke daran, daß $W_e \setminus X$ auf der Oberfläche von W_e dicht liegt.) Es seien p und q zwei Punkte aus $K_i \setminus X$ und B ein in K_i gelegener Bogen, der p mit q verbindet. Wir setzen ϱ gleich dem Abstand von B und $W_e \setminus K_i$ und wählen den Index j so groß, daß p und q nicht in X_j liegen und die Würfel aus $\mathfrak{X}_j$ einen Durchmesser haben, der kleiner als ϱ ist. Setzen wir $m_j = 3^j m^j$, so ist $\mathfrak{X}_j$ eine Teilmenge der m_j-Unterteilung $\mathfrak{W}_e^{(m_j)}$ von W_e. Es seien W' und W'' Würfel aus $\mathfrak{W}^{(m_j)}$, die p bzw. q enthalten. Da p und q nicht zu X_j gehören, liegen W' und W'' nicht in $\mathfrak{X}_j$. Sind z' bzw. z'' die Mittelpunkte von W' bzw. W'', so liegen die Strecken $[p, z']$ und $[q, z'']$ in $K_i \setminus X_j$ (W' und W'' sind ja in K_i enthalten). Es sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Würfel aus $\mathfrak{W}^{(m_j)}$, die den Bogen B schneiden. Sicher ist $\mathfrak{K}$ stark zusammenhängend und $\bigcup_{W \in \mathfrak{K}} W$ in K_i enthalten. Die Menge $\bigcup_{W \in \mathfrak{K}} \big(W \setminus V(W)\big)$ ist also eine zusammenhängende Teilmenge von K_i, die z' und z'' enthält. Außerdem ist $\bigcup_{W \in \mathfrak{K}} \big(W \setminus V(W)\big)$ in $K_i \setminus X_{j+1}$ enthalten, so daß p und q in einer zusammenhängenden Teilmenge von $K_i \setminus X$ liegen.

5. X ist nicht in U einbettbar. Um zu zeigen, daß es keinen Homöomorphismus von E^3 auf sich gibt, der X auf eine Teilmenge von U abbildet, wenden wir die Bemerkung (A) aus Abschnitt 2 an. Danach genügt es, eine zahme einfach geschlossene Kurve C und ein positives ε so anzugeben, daß kein Homöomorphismus h von E^3 auf sich existiert, der jeden Punkt von C um weniger als ε verrückt und für den $h(C) \cap X = 0$ gilt. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{6}$ und nehmen für C das Polygon

$$C = [x, y] \cup [y, u] \cup [u, v] \cup [v, x]\,,$$

wobei $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$, $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $u = (\frac{1}{2}, 2, 2)$ und $v = (\frac{1}{2}, 2, -1)$ zu setzen ist.

Nun nehmen wir an, h wäre ein Homöomorphismus von E^3 auf sich, der die Punkte von C um weniger als ε verrückt und für den $h(C) \cap X = 0$ ist. Diese Annahme gilt es zu einem Widerspruch zu führen. Da der Abstand $\varrho\big(h(C), X\big)$ positiv ist, können wir unter Berücksichtigung des Approximationssatzes von Homöomorphismen in den E^3 annehmen, daß $C^* = h(C)$ ein endliches Polygon ist. C^* ist dann also ein unverknotetes einfach geschlossenes Polygon.

Durch die Punkte $x^* = h(x)$ und $y^* = h(y)$ wird C^* in die beiden Bogen $B_0 = h([x, y])$ und $B' = \overline{C^* \setminus B_0}$ zerlegt. Dabei gilt $\varrho(W_e, B') \geqslant \frac{5}{6}$. Wir betrachten jetzt die Menge $\mathfrak{B}_0$ aller zu X fremden polygonalen Bogen mit den Endpunkten x^* und y^*, die B' zu einem unverknoteten einfach geschlossenen Polygon ergänzen und die ganz in der durch $\frac{1}{3} \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \leqslant \xi_2 \leqslant \frac{2}{3}$ definierten „Säule“ enthalten sind. Da der Bogen B_0 zu $\mathfrak{B}_0$ gehört, ist die Menge $\mathfrak{B}_0$ nicht leer. Man sieht sofort, daß jeder Bogen aus $\mathfrak{B}_0$ den Würfel W_e schneidet.

Da die Bogen B aus $\mathfrak{B}_0$ zu X fremd sind, gibt es zu jedem dieser Bogen eine Zahl n, für die B zu X_n fremd ist. Es sei n_0 die kleinste Zahl, für die ein Bogen aus $\mathfrak{B}_0$ zu X_{n_0} fremd ist. Es gilt also für $n < n_0$ und jeden Bogen B aus $\mathfrak{B}_0$ stets $B \cap X_n \neq 0$, während für wenigstens einen Bogen B_1 aus $\mathfrak{B}_0$ der Durchschnitt $B_1 \cap X_{n_0}$ leer ist. (Da jeder Bogen aus $\mathfrak{B}_0$ die Menge $W_e = X_0$ schneidet, ist $n_0 \geqslant 1$.) Es sei $\mathfrak{B}_1$ die Menge aller Bogen aus $\mathfrak{B}_0$, die zu X_{n_0} fremd sind.

Wir erinnern jetzt an einige bei der Konstruktion der Menge X im Abschnitt 3 eingeführte Bezeichnungen. Es sei W ein Würfel aus $\mathfrak{X}_j$ und $\mathfrak{W}^{(3)}$ die 3-Unterteilung von W. Wie früher bezeichnen wir mit W_0 den Zentralwürfel aus $\mathfrak{W}^{(3)}$ und mit $W_1, \ldots, W_6$ die Würfel aus $\mathfrak{W}^{(3)}$, die mit W_0 genau eine gemeinsame Seitenfläche haben. Mit f_i $(i = 1, \ldots, 6)$ wurden dann gewisse Ähnlichkeitsabbildungen bezeichnet, die W_e in W_i überführen und für die

$$W \cap X_{j+1} = V(W) = (W \setminus \bigcup_{i=0}^{6} W_i) \cup \bigcup_{i=1}^{6} f_i(Y_e) = W \setminus \big(\mathring{W}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{6} f_i(T_e)\big)$$

wird. ($\mathring{W}_0$ ist die Menge der inneren Punkte von W_0.) Die Mengen $f_i(T_e)$ wollen wir die „Röhren" des Würfels W nennen. Jeder Würfel aus einer Menge $\mathfrak{X}_j$ besitzt also 6 Röhren. Die Mengen $f_i(D_e)$ und $f_i(D_e')$ wollen wir die innere bzw. die äußere Basis der Röhre $f_i(T_e)$ nennen. Die innere Basis von $f_i(T_e)$ ist also der Durchschnitt von $f_i(T_e)$ mit W_0, während die äußere Basis der Durchschnitt von $f_i(T_e)$ mit der Oberfläche von W ist.

Ist T eine Röhre eines Würfels aus $\mathfrak{X}_j$ und H ein Bogen, der einen Punkt der äußeren Basis von T mit einem Punkt der inneren Basis von T verbindet und mit Ausnahme seiner Endpunkte ganz im Innern von T liegt, so sagen wir, daß H die Röhre T *durchläuft*. Ist B ein Bogen, der einen die Röhre T durchlaufenden Teilbogen besitzt, so sagen wir, daß B die Röhre T *durchdringt*. Wir beweisen nun folgende Behauptung:

Jeder Bogen aus $\mathfrak{B}_1$ durchdringt eine Röhre eines zu $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ gehörenden Würfels.

Es sei also B ein beliebiger Bogen aus $\mathfrak{B}_1$. Ist W ein Würfel aus $\mathfrak{X}_{n_0-1}$, der von B geschnitten wird, dessen Röhren aber nicht von B durchdrungen werden, so sieht man sofort, daß B zum Zentralwürfel der 3-Unterteilung von W fremd ist und die Komponenten des Durchschnittes $B \cap W$ in den einzelnen Röhren von W liegen. Jede dieser Komponenten enthält einen Punkt der äußeren Basis der sie enthaltenden Röhre T und ist zur inneren Basis von T fremd. Es ist nun nicht schwer, einen Bogen B^* aus $\mathfrak{B}_1$ zu konstruieren, der zu W fremd ist, nur solche Würfel aus $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ schneidet, die schon von B geschnitten werden und der nur solche Röhren von zu $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ gehörenden Würfeln durchdringt, die auch von B durchdrungen werden. Man kann — anschaulich gesprochen — die in den einzelnen Röhren von W gelegenen Teile von B aus diesen Röhren „hinausdrücken". Indem man dieses Verfahren eventuell mehrmals anwendet, gelangt man zu einem Bogen B_1 aus $\mathfrak{B}_1$, der nur noch die Würfel von $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ schneidet, die eine von B durchdrungene Röhre enthalten. Da jedoch jeder Bogen aus $\mathfrak{B}_1$ — insbesondere also B_1 — einen Würfel aus $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ schneidet, muß B eine Röhre eines zu $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ gehörenden Würfels durchdringen, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Jeder Bogen aus $\mathfrak{B}_1$ enthält nur endlich viele Teilbogen, die eine Röhre eines zu $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ gehörenden Würfels durchlaufen. Ist B ein Bogen aus $\mathfrak{B}_1$, so sei $r(B)$ die Anzahl dieser Teilbogen (sicher ist stets $r(B) \geqslant 1$). Wir setzen $r_0 = \min r(B)$, wobei B die ganze Menge $\mathfrak{B}_1$ durchläuft und bilden die Menge $\mathfrak{B}_2$ aller Bogen B aus $\mathfrak{B}_1$, für die $r(B) = r_0$ ist.

Es sei T_0 eine Röhre eines Würfels W aus $\mathfrak{X}_{n_0-1}$, die von einem Bogen aus $\mathfrak{B}_2$ durchdrungen wird und B ein beliebiger Bogen aus $\mathfrak{B}_2$, der T_0 durchdringt. Mit W' sei der Würfel der 3-Unterteilung von W bezeichnet, der T_0 enthält. Nach der Behauptung (B) aus Abschnitt 3 gibt es ein Polyeder $P(B)$, das zur abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph ist, die Menge $W' \setminus T_0$ nicht schneidet und dessen Rand die Vereinigung von B mit dem oben definierten Bogen B' ist. Wir denken uns das Polyeder $P(B)$ so gewählt, daß es sich simplizial in möglichst wenige Dreiecke zerlegen läßt. Die minimale Anzahl der dabei benötigten Dreiecke hängt nur von B ab und sei mit $d(B)$ bezeichnet. Damit haben wir jedem Bogen B aus $\mathfrak{B}_2$, der die Röhre T_0 durchdringt eine Zahl $d(B)$ zugeordnet. Wir betrachten nun einen Bogen B_2 aus $\mathfrak{B}_2$, der die Röhre T_0 durchdringt und für den die Zahl $d(B_2)$ minimal wird. Für jeden Bogen B aus $\mathfrak{B}_2$, der T_0 durchdringt soll also $d(B) \geqslant d(B_2)$ gelten. Den Widerspruch zu der am Anfang dieses Abschnittes gemachten Annahme werden wir nun erhalten, indem wir einen Bogen B aus $\mathfrak{B}_2$ konstruieren, der T_0 durchdringt und für den $d(B) < d(B_2)$ ist.

Wir nehmen an, daß die Dreiecke $D_1, \ldots, D_t$ $(t = d(B_2))$ eine simplziale Zerlegung des Polyeders $P(B_2)$ bilden. Aus der Behauptung (C) aus Abschnitt 3 folgt dann, daß eines der Dreiecke D_i eine auf B_2 gelegene Kante haben und ganz in T_0 liegen muß. Es sei etwa D_1 ein solches Dreieck. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall. $D_1 \cap B_2$ ist zusammenhängend. In diesem Falle ist $D_1 \cap B_2$ eine Kante von D_1 oder die Vereinigung zweier Kanten von D_1. Das Polyeder $\overline{P(B_2) \setminus D_1}$ ist dann wieder zur abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph und sein Rand läßt sich in der Form $B \cup B'$ darstellen, wobei B' der am Anfang dieses Abschnitts definierte Bogen ist, und B mit B' nur die Endpunkte x^* und y^* gemeinsam hat. Man sieht sofort, daß B zu $\mathfrak{B}_2$ gehört und die Röhre T_0 durchdringt. Weiterhin ist unmittelbar klar, daß $d(B)$ kleiner als $d(B_2)$ sein muß.

2. Fall. $D_1 \cap B_2$ ist nicht zusammenhängend. Dann besteht dieser Durchschnitt aus einer Kante von D_1 und dem dieser Kante gegenüberliegenden Eckpunkt p. L sei der kleinste Teilbogen von B_2, der K und p enthält. Die Endpunkte von L sind p und ein Endpunkt q von K, und die Strecke $[p, q]$ ist eine Kante von D_1. Wir betrachten nun den Bogen $B = (B_2 \setminus L) \cup [p, q]$. Es ist nicht schwer nachzuweisen, daß B zu $\mathfrak{B}_2$ gehört. Um zu zeigen, daß B die Röhre T_0 durchdringt, bemerken wir folgendes: B kann höchsten soviele Teilbogen besitzen, die eine von T_0 verschiedene Röhre eines zu $\mathfrak{X}_{n_0-1}$ gehörenden Würfels durchlaufen, wie B_2 selbst. Da jedoch $r(B_2) = r_0$ war und $r(B) \geqslant r_0$ sein muß, folgt hieraus unmittelbar, daß B ebensoviele Teilbogen enthält, die T_0 durchlaufen, wie B_2 selbst. Da natürlich $d(B) < d(B_2)$ ist, ist der Beweis hiermit beendet.

Literaturverzeichnis

[1] P. S. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), S. 161-238.

[2] K. Menger, *Kurventheorie*, Leipzig 1932.

[3] E. E. Moise, *Affine structures 'n 3-manifolds IV*, Ann. of Math. 55 (1952), S. 215-222.

[4] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, Sitzungsber, d. Heidelberger Akademie 1949, 3. Abhandlung, S. 1-50.

[5] — *Knoten und Vollringe*, Acta Mathematica 90 (1953), S. 131-286.

Reçu par la Rédaction le 19. 1. 1963

On a class of order-types generalizing ordinals

by

M. Slater (Chicago)

1. Introduction. The class Ω of ordinals T may be characterized by the following properties:

(i) The right half of every Dedekind cut of T has a first term,

(ii) T has a first term.

It does not appear that anyone has investigated those order types for which (i) holds but (ii) does not. In this paper normal forms are given for such types, their possible factorizations are investigated, and various properties generalizing those of ordinals are given.

2. Definitions and notation. Let $T = (T, <)$ be a linearly ordered set. We define a Dedekind cut of T to be a pair (A, B) such that $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cup B = T$, and for $a \in A$, $b \in B$, $a < b$. We write $T = A + B$. We say a *cut* (A, B) *is of type* J, G, L or R according as both, neither, only the first or only the second of the following conditions holds:

(i) A has a last term;

(ii) B has a first term.

For each $s \in T$ we define $L(s)$ to be the set of predecessors of s in T, and $L[s] = L(s) \cup \{s\}$. Similarly for $R(s)$ and $R[s]$. A subset A of T is an *initial* (*final*) *segment* of T iff $A = L(t)$ $(A = R[t])$ for some $t \in T$.

Ordinals will be denoted by Greek letters. If

$$\alpha = \omega^{a_r} a_r + \ldots + \omega^{a_0} a_0$$

in Cantor normal form (see [3], p. 320), we shall typically write $\alpha = (a_i, a_i, r)$. We define functions φ and ψ on Ω by setting

$$\varphi 0 = -\infty, \qquad \psi 0 = -\infty,$$
$$\varphi\alpha = a_r \quad (\alpha > 0), \qquad \psi\alpha = a_0 \quad (\alpha > 0).$$

We shall use the following valuation-like properties of φ:

(i) $\varphi(\alpha+\beta) = \max(\varphi\alpha, \varphi\beta)$.

(ii) $\varphi(\alpha\beta) = \varphi\alpha + \varphi\beta$.

(iii) $\alpha + \beta = \beta$ iff $\varphi\alpha < \varphi\beta$.