Dualzerlegungen in totalgeordneten Mengen

von

E. Harzheim (Köln)

§ 1. Einleitung. Nach Sierpiński [8] und Gillman [2] ist jede totalgeordnete Menge der Mächtigkeit $\aleph_\nu$ ähnlich einer Teilmenge der lexikographisch geordneten Menge H_ν aller transfiniten Folgen $(a_0, a_1, \ldots, a_\varkappa, \ldots)$, $\varkappa < \omega_\nu$, von Ziffern $0, 1$ der Länge ω_ν, zu denen es jeweils eine Zahl $\lambda < \omega_\nu$ gibt, so daß $a_\lambda = 1$ and $a_\varkappa = 0$ für $\varkappa > \lambda$ ist. (Siehe auch [5]!). In der vorliegenden Arbeit werden gewisse Eigenschaften von lexikographischen Darstellungen totalgeordneter Mengen durch $0, 1$-Folgen untersucht, wobei wesentlich der Begriff Dualzerlegung gebraucht wird. Die wichtigsten Ergebnisse sind in den Sätzen 3 und 5 enthalten.

Definitionen. Unter einem *Stück (Segment)* einer totalgeordneten Menge M verstehen wir eine Teilmenge von M, die mit zwei Elementen $a < b$ auch alle $x \in M$ enthält, die $a < x < b$ genügen. Sind dann S_1 und S_2 zwei disjunkte nichtleere Stücke, so sind alle Elemente von S_1 vor denen von S_2 gelegen oder umgekehrt; wir schreiben dafür $S_1 < S_2$ bzw. $S_2 < S_1$, während das Zeichen $\subset$ die mengentheoretische Inklusion (im weiten Sinne) ausdrückt.

Ist λ eine Ordinalzahl, so sei $W(\lambda)$ die Menge aller Ordinalzahlen, die $<\lambda$ sind. Ist k eine Kardinalzahl, so sei $\omega(k)$ die zu k gehörige Anfangszahl.

Ist f: a_μ, $\mu < \lambda$, eine (transfinite) Folge, so nennen wir λ die *Länge von* f und bezeichnen λ auch mit $l(f)$. (Ist $\lambda = 0$, so ist f die leere Folge). Für $\varkappa \leqslant \lambda$ nennen wir die Folge a_μ, $\mu < \varkappa$, einen *Abschnitt* und im Falle $\varkappa < \lambda$ einen echten Abschnitt von f, genauer den $\varkappa$-*Abschnitt von* f; für $\varkappa > \lambda$ sei der $\varkappa$-Abschnitt von f gleich f definiert. Wir bezeichnen a_μ auch mit $f(\mu)$.

Wenn jedes a_μ, $\mu < \lambda$, eine der Zahlen $0, 1$ ist, nennen wir f auch eine $0, 1$-*Folge*. In diesem Falle nennen wir die Teilfolge der Glieder von f, die $=0$ (bzw. $=1$) sind, die 0-*Folge* (bzw. 1-*Folge*) von f.

Ist f: a_μ, $\mu < \lambda$, eine $0, 1$-Folge, so definieren wir den Begriff *Wechselzahl von* f wie folgt: Man bilde alle maximalen Stücke S des Abschnitts $W(\lambda)$, über denen f konstant ist. Die vermöge der aus $W(\lambda)$

übertragenen Ordnung) wohlgeordnete Menge $S(f)$ dieser Stücke S hat eine eindeutig bestimmte Ordnungszahl $w(f)$ als Ordnungstyp:

(1) $$S(f) = \{S_\varkappa \mid \varkappa < w(f)\} ;$$

diese Zahl $w(f)$ nennen wir die Wechselzahl von f. Genauer schreiben wir für $S_\varkappa$ auch $S_\varkappa(f)$.

Fast unmittelbar ergibt sich:

(2) *Ist für eine $0,1$-Folge f die Wechselzahl $w(f) \geqslant \lambda$, wo λ Limeszahl ist, so hat sowohl die 0-Folge wie auch die 1-Folge von f eine Länge $\geqslant \lambda$.*

Denn für $\lambda = \omega_0$ ist dies klar, und dann auch für jede Limeszahl λ, da eine solche ja rechtes Vielfaches von ω_0 ist.

§ 2. Hilfssätze über Dualzerlegungen.

Definition. *Wir nennen eine Menge Z von Stücken einer totalgeordneten Menge M eine Dualzerlegung* (¹) *von M, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

1) $M \in Z$.

2) *Jedes $S \in Z$ mit einer Mächtigkeit $\overline{\overline{S}} \geqslant 2$ ist gleich der Vereinigungsmenge zweier nicht leerer Stücke S^1, S^2 aus Z, die $S^1 < S^2$ erfüllen. Dabei seien S^1, S^2 eindeutig bestimmt; also wenn S^1, S^2, S^3, S^4 nicht leere Stücke aus Z sind und $S = S^1 \cup S^2 = S^3 \cup S^4$, $S^1 < S^2$, $S^3 < S^4$ gilt, soll folgen $S^1 = S^3$ (und $S^2 = S^4$).*

3) *Ist $S^0 \supset S^1 \supset S^2 \supset \ldots \supset S^\nu \supset \ldots$ eine fallende (transfinite) Folge von Stücken aus Z, so gehöre auch der Durchschnitt $\bigcap S^\nu$ zu Z.*

Daß es immer solche Dualzerlegungen gibt, läßt sich unter Verwendung des Auswahlaxioms (dieses werden wir im Folgenden stets ohne besondere Erwähnung benutzen) etwa so einsehen (vgl. auch [6], Theorem 3): Man stellt M, wofern $\overline{\overline{M}} > 1$ ist, dar als Vereinigung zweier disjunkter nicht leerer Stücke $S[0] < S[1]$, stellt dann $S[\nu]$ $(\nu = 0, 1)$, falls $\overline{\overline{S[\nu]}} > 1$, dar als Vereinigung zweier nicht leerer Stücke $S[\nu, 0] < S[\nu, 1]$. Hat man allgemein bereits ein $S[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda]$ definiert und enthält dieses mindestens zwei Elemente, so zerlege man es in zwei nicht leere disjunkte Stücke

$$S[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda] = S[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda, 0] \cup S[a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots \mid \varkappa < \lambda, 1],$$

wobei das erste Stück auf der rechten Seite dem zweiten vorangehe. Sind für eine Folge von Ziffern $0, 1$: a_ν, $\nu < \mu$, wo μ Limeszahl ist, Stücke $S[a_0] \supset S[a_0, a_1] \supset \ldots \supset S[a_0, \ldots, a_\lambda, \ldots \mid \lambda < \nu] \supset \ldots$ definiert, die eine fallende Folge bilden, so bilde man den Durchschnitt $\bigcap\limits_{\nu<\mu} S[a_0, \ldots, a_\lambda, \ldots \mid \lambda < \nu]$

(¹) Hierzu wesensgleiche Begriffsbildungen sind bei Novak [6] und Padmavally [7] eingeführt worden.

und bezeichne ihn mit $S[a_0, \ldots, a_\nu, \ldots \mid \nu < \mu]$. Enthält er mindestens zwei Elemente, so wird er weiter zerlegt usw. Die um M vermehrte Menge aller so induktiv definierten $S[a_0, \ldots, a_\nu, \ldots]$ ist dann eine Dualzerlegung von M (²).

Unter einer *Dualschachtelung in Z* verstehen wir eine jede Folge $M, S[a_0], S[a_0, a_1], \ldots, S[a_0, \ldots, a_\nu, \ldots \mid \nu < \mu], \ldots, \mu < \tau$, von Stücken aus Z, die (wie schon aus der Indizierung zu ersehen ist) streng monoton fällt (im Sinne von $\supset$), und deren Durchschnitt entweder leer ist oder nur ein Element enthält. Die zugehörige Ziffernfolge $a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \nu < \tau$ (falls τ Limeszahl ist) bzw. $a_0, \ldots, a_\nu, \ldots, \nu < \tau - 1$ (falls τ keine Limeszahl ist), nennen wir die *Dualfolge* der betreffenden Dualschachtelung. Die Menge aller Dualfolgen zu sämtlichen Dualschachtelungen in (dem festen) Z sei mit $D(Z)$, kurz D, bezeichnet.

Nach Definition von $D(Z)$ ergibt sich, daß keine der Folgen aus $D(Z)$ ein Abschnitt einer anderen solchen Folge ist. (Die leere Folge gehört offenbar genau dann zu $D(Z)$, wenn $\overline{\overline{M}} \leqslant 1$ ist, und dann besteht $D(Z)$ auch nur aus der leeren Folge). Man kann mithin die Menge $D(Z)$ nach dem Prinzip der ersten Differenzen ordnen.

Die Frage nach der Kennzeichnung sämtlicher Dualfolgenmengen zu sämtlichen totalgeordneten Mengen beantwortet dann der folgende

Hilfssatz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß es zu einer Menge F von $0,1$-Folgen eine Dualzerlegung Z einer totalgeordneten Menge M mit $D(Z) = F$ gibt, ist, daß F folgende drei Eigenschaften hat:*

1) *Keine Folge aus F ist ein Abschnitt von einer anderen Folge aus F, (so daß man also F nach ersten Differenzen ordnen kann).*

2) *Wenn $a_0, \ldots, a_\nu, \ldots, \nu < \lambda$, eine Folge aus F ist, so gibt es zu jedem $\nu < \lambda$ eine Folge $\beta_0, \ldots, \beta_\mu, \ldots$ in F von der Länge $\geqslant \nu + 1$ mit $a_\mu = \beta_\mu$ für $\mu < \nu$ und $\beta_\nu = 1 - a_\nu$.*

3) *Ist g: $\gamma_0, \ldots, \gamma_\nu, \ldots, \nu < \lambda$, irgendeine $0,1$-Folge, wo λ Limeszahl ist, und ist jeder echte Abschnitt von g auch Abschnitt einer Folge aus F, so ist g auch noch Abschnitt einer Folge aus F.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen folgt leicht aus der Konstruktion von $D(Z)$ aus den Dualschachtelungen. Um zu zeigen, daß die drei Bedingungen hinreichend sind, definiert man zu jeder $0,1$-Folge $a_0, \ldots, a_\nu, \ldots, \nu < \lambda$, die Menge

$$T[a_0, \ldots, a_\nu, \ldots \mid \nu < \lambda] = \{f \in F \mid f(\nu) = a_\nu \text{ für } \nu < \lambda\}.$$

Für $\lambda = 0$ ist sie $= F$. Jede solche Menge ist trivialerweise ein Stück von F, und die Menge Z aller solchen Stücke erfüllt dann, wie man verifiziert,

(²) Übrigens ist die Existenz einer Dualzerlegung von M äquivalent damit, daß sich M spaltbar ordnen läßt. (Vgl. [4], Satz 2!).

die Bedingungen einer Dualzerlegung der Menge F selbst, und F ist die Menge aller Dualfolgen zu Z.

Ist G irgendeine nichtleere Menge von nichtleeren $0,1$-Folgen, von denen keine ein Abschnitt einer anderen ist, so definieren wir als *obere Grenzfolge zu* G diejenige $0,1$-Folge g_0, die eindeutig bestimmt ist durch die nachstehenden Bedingungen (i), (ii), wenn man nach ersten Differenzen ordnet:

(i) $g_0 \geqslant g$ für jedes $g \in G$.

(ii) Ist g' eine $0,1$-Folge und $g' \geqslant g$ für jedes $g \in G$, so ist $g_0 < g'$ oder g_0 ein Abschnitt von g'.

Man konstruiert g_0 wie folgt (woraus sich dann Existenz und Eindeutigkeit herleiten): Es sei m_0 das Maximum der ersten Glieder der $g \in G$, also $m_0 = \max\{g(0) \mid g \in G\}$; dann sei m_1 das Maximum der $g(1)$, $g \in G$, für die $g(0) = m_0$ und $g(1)$ noch definiert ist usw. Mittels transfiniter Induktion erhält man so eine $0,1$-Folge $m_0, m_1, \ldots$, die der Bedingung für g_0 genügt.

Analog ist der Begriff *untere Grenzfolge zu* G definiert. Man kann dann mit der Bedingung 3) von Hilfssatz 1 zeigen, daß jede Dualfolgenmenge $D(Z)$ abgeschlossen ist.

HILFSSATZ 2. *Für reguläre ω_ν sind folgende Aussagen äquivalent:*

(A) *Es gibt in der Menge $D(Z)$ einer Dualzerlegung Z der totalgeordneten Menge M eine Folge f, deren 0-Folge (bzw. 1-Folge) eine Länge $\geqslant \omega_\nu$ hat.*

(B) *M enthält eine Teilmenge vom Typ ω_ν^* (bzw. ω_ν).*

(C) *$D(Z)$ enthält eine Teilmenge vom Typ ω_ν^* (bzw. ω_ν).*

Zusatz: *Ersetzt man in* (A), (B), (C) *die Zahl ω_ν durch eine beliebige Ordnungszahl, so folgt auch noch* (A)$\to$(B) *und* (B)$\to$(C). (*Für singuläre ω_ν gilt jedoch* (C)$\to$(A) *nicht mehr, wofür man sich etwa mit $M = W(\omega_{\omega_0})$ ein Gegenbeispiel machen kann*).

Beweis. Es gebe eine Folge f: $a_0, \ldots, a_\varkappa, \ldots$, $\varkappa < \lambda$, in $D(Z)$, deren 0-Folge eine Länge $\geqslant \omega_\nu$ hat. Dann gibt es eine Teilfolge

$$a_{\varkappa_0}, a_{\varkappa_1}, \ldots, a_{\varkappa_\mu}, \ldots, \qquad \mu < \omega_\nu,$$

von f, so daß alle diese $a_{\varkappa_\mu} = 0$ sind. Man betrachte dann die Stücke

$$S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_0}] \supset S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_1}] \supset \ldots \supset S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_\mu}] \supset \ldots, \qquad \mu < \omega_\nu.$$

Jedes Stück $S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_\mu}]$ enthält nach Konstruktion ein Element, das größer ist als alle Elemente von $S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_{\mu+1}}]$. Wählt man dann aus jedem $S[a_0, \ldots, a_{\varkappa_\mu}]$ ein solches Element, so bilden diese eine Teilmenge von M vom Ordnungstyp ω_ν^*. Im Falle, daß die 1-Folge von f eine Länge $\geqslant \omega_\nu$ hat, ergibt sich entsprechend die Existenz einer Teilmenge von M vom Typ ω_ν, so daß also aus (A) (B) folgt.

Aus (B) folgt (C). Denn ordnet man jedem $x \in M$ die (vermöge $\supset$ geordnete) Menge aller Stücke aus Z zu, die x enthalten, so ist jedem $x \in M$ eine Dualschachtelung, und damit deren zugehörige Dualfolge zugeordnet, wir wollen diese fortan mit $f[x]$ bezeichnen. Ist $x < y$ in M, so ist auch $f[x] < f[y]$ in $D(Z)$, M also ähnlich einer Teilmenge von $D(Z)$, so daß aus (B) (C) folgt.

Schließlich folgt aus (C) (A). Denn es sei etwa $f_0 < f_1 < \ldots < f_\varkappa < \ldots$, $\varkappa < \omega_\nu$, eine wohlgeordnete Teilmenge von D vom Typ ω_ν. Dann betrachte man ihre obere Grenzfolge f:

$$f\colon\ m_0, m_1, \ldots, m_\varkappa, \ldots, \qquad \varkappa < \lambda.$$

Als erstes ergibt sich dann: $\lambda = l(f)$ ist eine Limeszahl. Denn sonst hätte f das Aussehen: $m_0, \ldots, m_{\lambda-1}$. Nach Konstruktion von f gäbe es dann ein $f_\varkappa$ mit $\varkappa < \omega_\nu$, das $f_\varkappa(\tau) = m_\tau = f(\tau)$ für $\tau \leqslant \lambda - 1$ erfüllt mit Widerspruch zu $f > f_\varkappa$. Spezieller folgt:

(3) *Die kleinste zu $l(f)$ konfinale Zahl ω_γ ist $= \omega_\nu$.*

Denn man wähle eine gegen $l(f)$ konvergierende Folge von Ordinalzahlen $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_\tau < \ldots$, $\tau < \omega_\gamma$. Es sei $\{f_\varkappa \mid \varkappa < \omega_\nu\} = F$, und für jedes $\tau < \omega_\gamma$ sei g_τ eine Folge aus F, die $g_\tau(\sigma) = m_\sigma$ für $\sigma < \beta_\tau$ erfüllt, — eine solche existiert ja nach Konstruktion von f. Die Menge der g_τ, $\tau < \omega_\gamma$, ist dann eine zu F konfinale Teilmenge von F. Da $\overline{F} = \omega_\nu$ regulär ist, muß dann $\omega_\gamma = \omega_\nu$ sein.

Ist nun $\delta_\varkappa$ die kleinste Zahl, so daß $f(\delta_\varkappa) \neq$ (also $>$) $f_\varkappa(\delta_\varkappa)$ ist, so ist wegen $f_\varkappa < f$ natürlich $f(\delta_\varkappa) = 1$. Da nun die Menge der $\delta_\varkappa$ (nach Konstruktion von f) mit $W(\lambda)$ und dann wegen (3) mit ω_ν konfinal ist, hat die 1-Folge von f eine Länge $\geqslant \omega_\nu$. Da f Abschnitt einer Folge aus D ist, ist die Behauptung erfüllt. Entsprechend folgt der Beweis für Teilmengen F vom Typ ω_ν^*, womit alles bewiesen ist.

Unmittelbare Folgerungen aus (2) und Hilfssatz 2 sind die nächsten beiden Hilfssätze:

HILFSSATZ 3. *Für jede Limeszahl λ gilt: Gibt es in $D(Z)$ eine Folge, deren Wechselzahl $\geqslant \lambda$ ist, so gibt es in M eine Untermenge vom Typ λ und eine Untermenge vom Typ λ^*.*

HILFSSATZ 4. *Ist ω_ν regulär, so gilt: Ist Z eine beliebige Dualzerlegung von M, so enthält M genau dann eine Untermenge vom Typ ω_ν oder ω_ν^*, wenn ein $f \in D(Z)$ existiert mit $l(f) \geqslant \omega_\nu$.*

Verstehen wir unter $\overline{\overline{M}}{}^{+}$ die nächstgrößere Kardinalzahl zu $\overline{\overline{M}}$, so gilt über die möglichen Längen der Folgen einer Dualzerlegung

HILFSSATZ 5. *Es ist $\sup\{l(f) \mid f \in D(Z)\} < \omega(\overline{\overline{M}}{}^{+})$ für jede Dualzerlegung Z von M.*

Wegen Hilfssatz 4 ist nämlich jedes $l(f) < \omega(\overline{\overline{M}}^+)$, und dann gilt dies auch noch für das Supremum der $l(f)$, da man sonst leicht $\overline{\overline{M}}^+$ viele Elemente aus M auswählen könnte.

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen beliebigen Repräsentationen einer totalgeordneten Menge durch $0,1$-Folgen und solchen Repräsentationen, die sich aus einer Dualzerlegung ergeben, ergibt der folgende

HILFSSATZ 6. *Es sei M eine Menge von $0,1$-Folgen, von denen keine ein Abschnitt einer anderen sei, so daß man also M lexikographisch (nach ersten Differenzen) ordnen kann. Dann gibt es in der so geordneten Menge M eine Dualzerlegung Z, so daß die $0,1$-Folge $f[a] \in D(Z)$, die dem $a \in M$ zugeordnet ist, eine Teilfolge von a ist, und so daß M ähnlich ist zu der lexikographisch geordneten Menge der $f[a]$, $a \in M$ vermöge $a \to f[a]$.*

Beweis. Ist $a \in M$ die Folge $\alpha_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, so ordnen wir a eine Folge $f[a]$ zu, gegeben durch $f(0), f(1), \ldots$, vermöge folgender Vorschrift. Es sei $\varkappa_0$ die kleinste Zahl, zu der es in M eine Folge $\beta_\varkappa$ gibt, die $\alpha_\varkappa = \beta_\varkappa$ für $\varkappa < \varkappa_0$ und $\alpha_{\varkappa_0} \neq \beta_{\varkappa_0}$ erfüllt. Dann sei $f(0) = \alpha_{\varkappa_0}$. Ist allgemein $f(\sigma) = \alpha_{\varkappa_\sigma}$ für alle $\sigma < \tau$ definiert, so verfüge man über $f(\tau)$ wie folgt: Es sei $\varkappa_\tau$ die kleinste Zahl, die größer ist als alle $\varkappa_\sigma$, $\sigma < \tau$, und zu der es in M eine Folge $\gamma_\varkappa$ gibt, die $\alpha_\varkappa = \gamma_\varkappa$, $\varkappa < \varkappa_\tau$, und $\alpha_{\varkappa_\tau} \neq \gamma_{\varkappa_\tau}$ erfüllt, falls es überhaupt solche gibt, und es sei dann $f(\tau) = \alpha_{\varkappa_\tau}$. Existiert keine solche Zahl $\varkappa_\tau$, so sei $f(\sigma)$ nur für die $\sigma < \tau$ erklärt. Die Folge $f(0), f(1), \ldots$ $\ldots, f(\sigma), \ldots$ aller so definierten $f(\sigma)$ sei dann die der Folge a: $\alpha_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$, zugeordnete Bildfolge $f[a]$, welche dann natürlich Teilfolge von a ist.

Ist nun $a < b$ in M, wo a die Folge $\alpha_\varkappa$, $\varkappa < l(a)$, und b die Folge $\beta_\varkappa$, $\varkappa < l(b)$, ist, so sei μ die kleinste Zahl, so daß $\alpha_\mu \neq$ (also dann $<$) β_μ. Es seien $\alpha_{\varkappa_0}, \alpha_{\varkappa_1}, \ldots$ bzw. $\beta_{\lambda_0}, \beta_{\lambda_1}, \ldots$ die Folgen $f[a]$ bzw. $f[b]$. Dann ist $\varkappa_\nu = \lambda_\nu$ und $\alpha_{\varkappa_\nu} = \beta_{\lambda_\nu}$ für $\varkappa_\nu < \mu$. Weiter muß dann noch $\alpha_{\varkappa_\varrho}$ existieren, wo ϱ die kleinste Zahl ist, die größer als jedes ν ist, für das $\varkappa_\nu < \mu$. Dieses $\varkappa_\varrho$ ist dann $\geqslant \mu$, und es folgt wegen der Bedeutung von μ, daß $\varkappa_\varrho \leqslant \mu$, also $= \mu$ ist. Also ist $\alpha_{\varkappa_\varrho} = \alpha_\mu$. Entsprechend ist $\beta_{\varkappa_\varrho} = \beta_\mu$. Aus $\alpha_\mu < \beta_\mu$ folgt dann also $f[a] < f[b]$.

Wir müssen nun noch eine Dualzerlegung Z mit den behaupteten Eigenschaften angeben. Dazu sei F' die Menge aller $f[x]$, $x \in M$. Man bilde nun (wie beim Beweise von Hilfssatz 1) für jedes λ zu jeder $0,1$-Folge $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_\nu, \ldots$, $\nu < \lambda$, die Menge

$$S[\delta_0, \ldots, \delta_\nu, \ldots \mid \nu < \lambda] = \{f \in F' \mid f(\nu) = \delta_\nu \text{ für } \nu < \lambda\}.$$

Jede dieser Mengen ist ein Stück von F' und die Menge dieser Stücke ist eine Dualzerlegung Z' von F', wie man verifiziert. Die zu Z' gehörige Dualfolgenmenge D umfaßt natürlich F'. Da M ähnlich zu F' ist, ist dann auch D noch Dualfolgenmenge einer Dualzerlegung Z von M, womit alles bewiesen ist.

Aus dem eingangs erwähnten Satze von Sierpiński und Gillman ergibt sich dann speziell

HILFSSATZ 7. *Es gibt eine Dualzerlegung Z der totalgeordneten Menge M, so daß $l(f) \leqslant \omega(\overline{\overline{M}})$ ist für alle $f \in D(Z)$. Dabei gilt für jedes $x \in M$, daß $l(f[x]) < \omega(\overline{\overline{M}})$ ist oder daß die Folge $f[x]$ von einer Stelle an nur noch den Wert 0 annimmt.*

Denn ist $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$, so ist M ähnlich einer Teilmenge M' von H_ν, und auf dieses ist Hilfssatz 6 anwendbar.

§ 3. Zusammenhänge zwischen Folgenlängen und Wechselzahlen. Wir beweisen nun zwei Sätze über die Wechselzahlen der Folgen einer Dualzerlegung, die den allgemeineren Satz 3 einleiten.

SATZ 1. *Es sei M eine totalgeordnete Menge der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_{\nu+1}$, die keine Untermenge vom Typ $\omega_{\nu+1}$ und keine vom Typ $\omega^*_{\nu+1}$ enthalte. Es sei c die kleinste Kardinalzahl, die $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$ erfüllt. Ist dann eine Dualzerlegung Z in M vorgegeben, so gibt es Dualfolgen in $D(Z)$, deren Wechselzahl $\geqslant \omega(c)$ ist.*

Es folgt darüber hinaus, daß die Menge D' der Dualfolgen in $D(Z)$, deren Wechselzahl $< \omega(c)$ ist, eine Mächtigkeit $\overline{\overline{D'}} \leqslant \aleph_\nu$ hat.

Beweis. Ist f: α_μ, $\mu < \lambda$, eine Dualfolge aus D, $w(f)$ ihre Wechselzahl, so sei f_σ folgendermaßen definiert: Es sei $\sigma' = \min\{\sigma, w(f)\}$. Wir bilden dann die Vereinigungsmenge Σ der σ' ersten Stücke $S_\varkappa$ von $W(\lambda)$, über denen f konstant ist (vgl. (1)!): $\Sigma = \bigcup_{\varkappa < \sigma'} S_\varkappa(f)$. Sodann sei f_σ die Folge der α_μ, $\mu \in \Sigma$. Es sei ferner $D_\sigma = \{f_\sigma \mid f \in D\}$.

Dann enthält D_0 nur die leere Folge. Weiter ist $\overline{\overline{D_1}} \leqslant \aleph_\nu$. Denn ist f_1 eine Folge aus D_1, so sind die Glieder von f_1 alle gleich 0 bzw. alle gleich 1. Demgemäß ist also D_1 die Vereinigungsmenge zweier Mengen $D_1(0)$ und $D_1(1)$ von Folgen, wo die Folgen aus $D_1(0)$ nur aus Ziffern 0 und die Folgen aus $D_1(1)$ nur aus Ziffern 1 bestehen. Dabei muß das Supremum γ_0 der Längen der Folgen aus $D_1(0)$ der Bedingung $\gamma_0 < \omega_{\nu+1}$ genügen. Denn andernfalls gäbe es zu jedem $\beta < \omega_{\nu+1}$ eine Dualfolge in $D(Z)$, die mit β vielen Ziffern 0 anfinge. Dann gäbe es aber auch eine Dualschachtelung $S[0] \supset S[0,0] \supset S[0,0,0] \supset \ldots$, deren Dualfolge eine 0-Folge mit einer Länge $\geqslant \omega_{\nu+1}$ hätte. Dann enthielte nach Hilfssatz 2 M eine Teilmenge vom Typ $\omega^*_{\nu+1}$ gegen die Voraussetzung. Entsprechend ist das Supremum γ_1 der Längen der Folgen aus $D_1(1)$ kleiner als $\omega_{\nu+1}$. Daraus folgt dann $\overline{\overline{D_1}} \leqslant \overline{\overline{D_1(0)}} + \overline{\overline{D_1(1)}} \leqslant \aleph_\nu + \aleph_\nu = \aleph_\nu$. Es ist also die Gleichung

$$\overline{\overline{D_\sigma}} \leqslant \aleph_\nu \tag{4}$$

für $\sigma = 0, 1$ erfüllt. Es gelte nun (4) für alle $\sigma < \tau$, wo τ eine Zahl mit $1 < \tau < \omega(c)$ sei. Ist dann τ keine Limeszahl, so ist $\overline{\overline{D_\tau}} \leqslant \overline{\overline{D_{\tau-1}}} \cdot \aleph_\nu \leqslant \aleph_\nu$, denn ist eine Folge aus D_τ vorgegeben, so entsteht sie aus einer gewissen

Folge von $D_{\tau-1}$, indem man an diese nur Ziffern 0 bzw. nur Ziffern 1 anhängt, und zwar ist, wie man analog zu vorhin folgert, die Menge aller Folgen aus D_τ, die so aus einer festen Folge von $D_{\tau-1}$ entstehen, von einer Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\nu$, so daß also in der Tat $\overline{\overline{D_\tau}} \leqslant \overline{\overline{D_{\tau-1}}} \cdot \aleph_\nu$ ist.

Ist jedoch τ Limeszahl, dann ist jede Folge f_τ aus D_τ durch den Komplex $[f_0, f_1, \ldots, f_\sigma, \ldots]$, $\sigma < \tau$, eindeutig bestimmt, so daß also $\overline{\overline{D_\tau}} \leqslant \aleph_\nu^{\overline{\overline{\tau}}} = \aleph_\nu$ ist, da ja $\overline{\overline{\tau}} < c$.

Es gilt also (4) für jedes $\sigma < \omega(c)$. Dann ist aber $\overline{\overline{D'}} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{\sigma<\omega(c)} D_\sigma}} \leqslant c \cdot \aleph_\nu = \aleph_\nu$, womit wegen $\overline{\overline{D}} \geqslant \overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_{\nu+1}$ der Satz bewiesen ist.

Im Falle einer regulären Limeskardinalzahl ergibt sich

Satz 2. *Es sei M totalgeordnet, $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$, wo $\aleph_\nu$ regulär und ν eine Limeszahl sei. M enthalte keine Untermenge von einem der Typen ω_ν, ω_ν^*. Ferner sei c die kleinste Kardinalzahl, so daß ein Produkt von c vielen Kardinalzahlen, die alle $<\aleph_\nu$ sind, $\geqslant \aleph_\nu$ ist. Ist dann eine Dualzerlegung Z von M und eine Zahl $a < \omega(c)$ vorgegeben, so gilt für die Menge D' der Dualfolgen, deren Wechselzahl $<a$ ist, $\overline{\overline{D'}} < \aleph_\nu$. (Bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese ist $c = \aleph_\nu$)*

Der Beweis verläuft ganz analog zu dem von Satz 1 Wie dort werden die Mengen D_σ definiert, und mittels transfiniter Induktion ergibt sich $\overline{\overline{D_\sigma}} < \aleph_\nu$ für jedes $\sigma < \omega(c)$, woraus $\overline{\overline{D'}} \leqslant \overline{\overline{\bigcup_{\sigma<a} D_\sigma}} < \aleph_\nu$ folgt.

Als Anwendung der Sätze 1 und 2 ergibt sich dann folgender Satz, der eine Teilaussage eines Satzes von Erdös und Rado [1] ist:

Bei Gültigkeit der Kontinuumhypothese enthält jede unendliche totalgeordnete Menge M, die keine wohl- oder inverswohlgeordnete Teilmenge der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}$ hat, und für die $\overline{\overline{M}}^-$ (= das Supremum aller Kardinalzahlen, die $<\overline{\overline{M}}$ sind) regulär ist, zu jeder Kardinalzahl $k < \overline{\overline{M}}$ eine wohl- und eine inverswohlgeordnete Teilmenge der Mächtigkeit k.

Denn ist $\overline{\overline{M}} = \aleph_{\nu+1}$ und $\aleph_\nu$ regulär, so ist wegen der Kontinuumhypothese das c von Satz 1 gleich $\aleph_\nu$, und es existiert eine Dualfolge, deren Wechselzahl $\geqslant \omega_\nu$ ist, woraus die Aussage folgt. Ist $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$ eine reguläre Limeskardinalzahl, so ist wegen der Kontinuumhypothese das c von Satz 2 gleich $\aleph_\nu$ und mit Satz 2 ergibt sich die Behauptung.

Wir können nun die Sätze 1 und 2 noch wesentlich allgemeiner gestalten, indem wir eine Aussage über beliebige Realisationen von M durch 0,1-Folgen machen, nicht nur über solche Realisationen, die wir mittels einer Dualzerlegung von M erhalten. Es gilt nämlich:

Satz 3. *Es sei M irgendeine Menge von 0,1-Folgen, von denen keine ein Abschnitt einer anderen sei, in der also eine lexikographische Ordnung vorliegt.*

1) *Ist dann $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_{\nu+1}$ und in M keine Untermenge von einem der Typen $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+1}^*$, sowie c die kleinste Kardinalzahl, für die $\aleph_\nu^c > \aleph_\nu$ ist, so gibt es höchstens $\aleph_\nu$ viele Folgen in M, deren Wechselzahl $<\omega(c)$ ist.*

2) *Ist $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_\nu$, wo $\aleph_\nu$ eine reguläre Limeskardinalzahl ist, ist ferner in M keine Untermenge von einem der Typen ω_ν, ω_ν^* enthalten sowie c wie bei Satz 2 definiert, so hat für jedes $a < \omega(c)$ die Menge M' der Folgen von M, deren Wechselzahl $<a$ ist, eine Mächtigkeit $<\aleph_\nu$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 6 gibt es eine Dualzerlegung Z von M, so daß für jedes $x \in M$ die zugeordnete Folge $f[x] \in D(Z)$ Teilfolge von x ist. Da nun die Wechselzahl der Teilfolge von einer Folge $\leqslant$ der Wechselzahl der letzteren ist, folgen die Aussagen 1) bzw. 2) aus Satz 1 bzw. 2 (wegen $\overline{\overline{M'}} \leqslant \overline{\overline{D'}}$).

Es erhebt sich im Anschluß an die Sätze 1, 2 und 3 die Frage, ob die Voraussetzungen dieser Sätze alle notwendig sind, und ob die gemachten Aussagen die bestmöglichen sind. Hierzu bringen wir noch einige Beispiele und Ergänzungen.

Beispiel 1. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 braucht es keine Dualfolge zu geben, deren Wechselzahl $>\omega(c)$ ist, denn ist M etwa die der Größe nach geordnete Menge der Irrationalzahlen aus dem Intervall $(0,1)$, also $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_1$, und betrachtet man die Dualzerlegung, die durch die Teilpunkte $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}; \ldots; \ldots$ usw. bestimmt wird, so hat jede Dualfolge die Länge ω_0 und mithin eine Wechselzahl $\leqslant \omega_0 = \omega(c)$.

Es gilt jedoch

Satz 4. *Es sei M totalgeordnet und $\overline{\overline{M}} = \aleph_\nu$, wo $\aleph_\nu$ regulär sei. Es gebe keine Untermenge von M von einem der Ordnungstypen ω_ν, ω_ν^*. In M sei eine Dualzerlegung Z gegeben, und es gelte für jedes $\lambda < \omega_\nu$ die Beziehung $\overline{\overline{D(\lambda)}} < \aleph_\nu$, wo $D(\lambda)$ die Menge aller λ-Abschnitte der Folgen aus $D(Z)$ sei. Ist dann $a \leq \omega_\nu$ vorgegeben, so gilt für $D' = \{f \in D(Z) \mid w(f) < a\}$ die Abschätzung $\overline{\overline{D'}} < \aleph_\nu$.*

Beweis. Wir übernehmen die Bezeichnung D_σ der Beweise von Satz 1 und 2. Es sei ferner $l(D_\sigma) = \sup\{l(f) \mid f \in D_\sigma\}$ gesetzt. Dann gilt für alle $\sigma < \omega_\nu$

$$\overline{\overline{D_\sigma}} < \aleph_\nu \quad \text{und} \quad l(D_\sigma) < \omega_\nu. \tag{5}$$

Denn (5) gilt für $\sigma = 0$ bzw. 1, wie sich bei Satz 1 und 2 ergab. Es sei dann (5) für alle $\sigma < \tau$ erfüllt, wobei $1 < \tau < \omega_\nu$ sei. Ist dann τ keine Limeszahl, so ist D_τ die Vereinigungsmenge von $\overline{\overline{D_{\tau-1}}} < \aleph_\nu$ vielen Mengen, deren Mächtigkeit je $<\aleph_\nu$ ist, also $\overline{\overline{D_\tau}} < \aleph_\nu$, da dieses regulär ist; ferner ist dann $l(D_\tau)$ das Supremum von $\overline{\overline{D_{\tau-1}}} < \aleph_\nu$ vielen Zahlen, die $<\omega_\nu$ sind, also selbst $<\omega_\nu$.

Ist τ Limeszahl, so ist $l(D_\tau) = \sup\{l(D_\sigma) \mid \sigma < \tau\} < \omega_\nu$ aus demselben Grunde. Daraus folgt weiter, daß D_τ äquivalent ist zu einer Teilmenge eines gewissen $D(\lambda)$ mit $\lambda < \omega_\nu$, woraus wegen der Voraussetzung $\overline{\overline{D_\tau}} < \aleph_\nu$ folgt. Mittels transfiniter Induktion ergibt sich also (5) für jedes $\sigma < \omega_\nu$, woraus die Behauptung folgt.

Im Anschluß an Satz 2 erhebt sich die Frage, was man für singuläre Limeskardinalzahlen aussagen kann. Hierzu bringen wir

BEISPIEL 2. Ist $\aleph_\nu$ singulär, so gibt es eine totalgeordnete Menge F der Mächtigkeit $\aleph_\nu$, die keine Untermengen der Typen ω_ν, ω_ν^* enthält, und in F eine Dualzerlegung Z, so daß jede Dualfolge aus $D(Z)$ eine Wechselzahl $\leqslant 3$ hat. (Daß die Zahl 3 nicht unterboten werden kann, ist leicht zu sehen.)

Beweis. Das singuläre ω_ν ist darstellbar in der Form

$$\omega_\nu = \sum_{\mu<\omega_\gamma} \omega_{a_\mu},$$

wo ω_γ und jedes ω_{a_μ}, $\mu<\omega_\gamma$, kleiner als ω_ν sind, dabei soll die Folge der a_μ mit μ streng monoton wachsen. Es werde dann für jedes $\mu<\omega_\gamma$ eine Menge F wie folgt definiert:

Für eine $0,1$-Folge f gelte $f \in F_\mu$ genau dann, wenn gilt: f beginnt mit μ vielen Ziffern 1, dahinter folgen weniger als ω_{a_μ} viele — aber mindestens eine — Ziffern 0, und hinter diesen noch genau eine Ziffer 1, oder wenn gilt: f ist die Folge, die mit μ vielen Ziffern 1 beginnt, hinter denen dann genau noch ω_{a_μ} viele Ziffern 0 folgen.

Dann sei $F = \bigcup_{\mu<\omega_\gamma} F_\mu \cup \{f_1\}$, wo f_1 die Folge ist, die aus ω_γ vielen Ziffern 1 besteht. Der Ordnungstyp der lexikographisch geordneten Menge F ist dann

$$\overline{F} = \sum_{\mu<\omega_\gamma} \overline{F_\mu} + \overline{\{f_1\}} = \sum_{\mu<\omega_\gamma} (1+\omega_{a_\mu}^*)+1 .$$

Daraus folgt, daß F ein erstes und ein letztes Element hat und ohne Lücken ist. Mit Hilfssatz 1 verifiziert man dann, daß F eine Dualfolgenmenge, z. B. zu der lexikographisch geordneten Menge F selbst, ist. Ferner hat F keine Untermenge vom Typ ω_ν oder ω_ν^* (vgl. [1], Lemma 1!), so daß F also der Aussage von Beispiel 2 genügt.

Man kann Satz 1 wegen Hilfssatz 4 auch so formulieren:

SATZ 1. *Es sei M totalgeordnet, $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_{\nu+1}$, und eine Dualzerlegung Z von M vorgegeben. Ist dann $l(f)<\omega_{\nu+1}$ für jedes $f \in D$, so gilt für alle f mit Ausnahme von höchstens $\aleph_\nu$ vielen die Beziehung $w(f) \geqslant \omega(c)$.*

Man kann dann umgekehrt fragen, was sich bei Kenntnissen über die Werte $w(f)$ über die Werte $l(f)$ aussagen läßt. Hierzu erwähnen wir folgenden

SATZ 5. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Weiter gelte: Jede Dualfolge $f \in D$ erfülle $w(f) \leqslant \omega(c)+1$. Dann folgt: $\Omega = \sup\{l(f) \mid f \in D\} < \omega_{\nu+1}$.*

Diese Aussage ist scharf, denn es gibt eine Dualzerlegung einer Menge M, die den Voraussetzungen von Satz 1 genügt, und bei der jede Dualfolge eine Wechselzahl $\leqslant \omega(c)+2$ hat, wobei aber $\Omega = \omega_{\nu+1}$ ist.

Wir wollen die Hauptaussage von Satz 5 hier nicht beweisen, da in [3], Satz 1 diese Aussage in allgemeinerer Fassung bewiesen wird. Wir wollen hier lediglich noch ein Beispiel dafür geben, daß unter den Voraussetzungen von Satz 1 die obere Grenze Ω der Längen der Dualfolgen gleich $\omega_{\nu+1}$ sein kann, obwohl $w(f) \leqslant \omega(c)+2$ ist für alle $f \in D$:

BEISPIEL 3. Es sei N die Menge aller $0,1$-Folgen der Länge ω_ν. Dann ist $\overline{\overline{N}} = 2^{\aleph_\nu} \geqslant \aleph_{\nu+1}$. Man bilde eine Wohlordnung von N nach dem Typ $\omega(\overline{\overline{N}})$:

$$N = \{n_0, \ldots, n_\varkappa, \ldots\}, \qquad \varkappa < \omega(\overline{\overline{N}}) .$$

Ferner definieren wir für jedes $\varkappa<\omega_{\nu+1}$ eine Menge $F_\varkappa$ wie folgt: $F_\varkappa$ enthalte die Folge $[a_0, \ldots, a_\mu, \ldots]$, $\mu<\varkappa$, wo alle $a_\mu = 0$ sind, und weiterhin enthalte $F_\varkappa$ alle Folgen $[\beta_0, \ldots, \beta_\mu, \ldots, \beta_\lambda]$, wo $\lambda<\varkappa$, $\beta_\lambda = 1$ und $\beta_\mu = 0$ ist für alle $\mu<\lambda$. Bildet man dann für $\varkappa<\omega_{\nu+1}$ die Menge $M_\varkappa$ aller Folgen, die man erhält, indem man an die Folge $n_\varkappa$ je die Folgen aus $F_\varkappa$ anhängt und setzt man für $\varkappa \geqslant \omega_{\nu+1}$ $M_\varkappa = \{n_\varkappa\}$, so ist, wie man mit Hilfssatz 1 verifiziert, die lexikographisch geordnete Menge $M = \bigcup_{\varkappa<\omega(\overline{\overline{N}})} M_\varkappa$ eine Menge von Dualfolgen zu einer Dualzerlegung von M; jede Wechselzahl ist $\leqslant \omega(c)+2$, aber es ist $\sup\{l(f) \mid f \in M\} = \omega_{\nu+1}$, wobei jedoch $l(f)<\omega_{\nu+1}$ für jedes $f \in M$ gilt, so daß also auch M keine Untermengen der Typen $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+1}^*$ enthält.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös and R. Rado, *A problem on ordered sets*, J. London Math. Soc. 28 (1953), S. 426-438.

[2] L. Gillman, *Some remarks on η_α-sets*, Fund. Math. 43 (1956), S. 77-82.

[3] E. Harzheim, *Mehrfach wohlgeordnete Mengen und eine Verschärfung eines Satzes von Lindenbaum*,

[4] W. Kinna und K. Wagner, *Über eine Abschwächung des Auswahlpostulates*, Fund. Math. 42 (1955), S. 75-82.

[5] E. Mendelson, *On a class of universal ordered sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), S. 712-713.

[6] J. Novak, *On partition of an ordered continuum*, Fund. Math. 39 (1952), S. 53-64.

[7] K. Padmavally, *Generalisation of the order type of rational numbers*, Rev. Mat. Hisp. Amer. (4) 14 (1954), S. 50-73.

[8] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), S. 56-67.

Reçu par la Rédaction le 7. 8. 1962