Sur un théorème de W. Sierpiński

par

J. Popruženko (Łódź)

W. Sierpiński a démontré le théorème suivant:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une suite* $\{f_n\}$ *de fonctions d'une variable réelle telle que toute suite partielle* $\{f_{n_k}\}$ *converge dans un ensemble de points au plus dénombrable* ([1], p. 110-112).

Je me propose d'en établir une généralisation.

Soient: λ un nombre ordinal, $W_0 = W(\omega_\lambda)$, $W_1 = W(\omega_{\lambda+1})$, V un sous-ensemble non-vide de W_0, $\mathcal{F}$ une famille de suites de type ω_λ formées de nombres ordinaux distincts $< \omega_\lambda$.

Lemme. *Si* $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \aleph_\lambda$ *et si* $\aleph_\lambda$ *est un aleph régulier, il existe une fonction* $u|W_0$ *satisfaisant à la condition*

(*) *Quels que soient* $p \in V$ *et* $\{\mu_\gamma\}_{\gamma<\omega_\lambda} = (\mu) \in \mathcal{F}$, *l'égalité* $u(\mu_\gamma) = p$ *subsiste pour* $\aleph_\lambda$ *valeurs distinctes de* γ.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{F}$ supposé bien ordonné en type ω_λ, soient

$$(\mu^\varkappa) = \{\mu_\gamma^\varkappa\}_{\gamma<\omega_\lambda} \quad (\varkappa < \omega_\lambda) \tag{1}$$

toutes les suites appartenant à $\mathcal{F}$. On a évidemment

$$\lim_{\gamma\to\omega_\lambda} \mu_\gamma^\varkappa = \omega_\lambda \quad (0 \leqslant \varkappa < \omega_\lambda)\,. \tag{2}$$

En vertu de l'égalité $\aleph_\lambda^3 = \aleph_\lambda = \overline{\omega}_\lambda = \overline{\overline{W}}_0$, il existe une correspondence biunivoque entre tous les éléments ξ de W_0 et tous les triples ordonnés (φ, ψ, χ) qui en puissent être composés. Une telle correspondance supposée établie, les valeurs φ, ψ et χ se définissent de façon univoque en fonctions de la variable ξ de sorte que l'on ait

$$\xi \leftrightarrow \big(\varphi(\xi), \psi(\xi), \chi(\xi)\big) \tag{3}$$

où les fonctions $\varphi, \psi, \chi|W_0$ parcourent d'une façon indépendante tous les éléments de W_0.

η et ι étant deux ordinaux $<\omega_\lambda$, considérons l'ensemble

$$\{\xi\colon \xi \in W_0,\ \varphi(\xi)=\eta,\ \psi(\xi)=\iota\}$$

défini conformément à (3). En désignant ses éléments par $\xi_\nu^{\eta\iota}$ $(0\leqslant\nu<\omega_\lambda)$, on le représente sous la forme d'une suite transfinie:

$$\xi_0^{\eta\iota}<\xi_1^{\eta\iota}<\ldots<\xi_\nu^{\eta\iota}<\ldots\qquad(0\leqslant\nu<\omega_\lambda)\,. \tag{4}$$

Cela étant, définissons la fonction $s|W_0$ comme il suit.

Posons $s(0)=\mu_0^0$ et soit $0<\xi<\omega_\lambda$; les valeurs $s(\zeta)$ supposées remplissant les relations $s(0)<s(1)<\ldots<s(\zeta)<\ldots<\omega_\lambda$ pour $\zeta<\xi$, définissons $s(\xi)$ en posant

$s(\xi)=$ le premier terme de la suite $(\mu^{\varphi(\xi)})$ de (1) qui dépasse tous les $s(\zeta)$ précédemment déterminés.

D'après (2) et la régularité supposée de $\aleph_\lambda$, donc aussi de ω_λ, un tel terme existe.

La fonction $s|W_0$ se trouve ainsi définie et l'on a selon la définition même: $s(\xi)=a\in W_0$ et $s(\xi)\neq s(\xi')$ lorsque $\xi\neq\xi'$.

Soit $h|W_0$ une fonction univoque quelconque remplissant la condition $h(W_0)=V$. Définissons la fonction $u|W_0$ en posant

$$u(\alpha)=h\{\psi[s^{-1}(\alpha)]\}\quad\text{lorsque}\quad \alpha\in s(W_0) \tag{5}$$

et

$$u(\alpha)=p_0\quad\text{lorsque}\quad \alpha\in W_0\setminus s(W_0)\,, \tag{6}$$

p_0 étant un élément fixe de V arbitrairement choisi.

Cette fonction satisfait à la condition $(*)$.

En effet, soient $p\in V$ et $\iota_0\in W_0$ tels que $h(\iota_0)=p$ et soit η_0 une valeur de la variable $\varkappa$ (formule (1)). Selon la définition de s, les valeurs $s(\xi_\nu^{\eta_0\iota_0})$, $0\leqslant\nu<\omega_\lambda$, se trouvent parmi les termes de la ligne (μ^{η_0}), soit $s(\xi_\nu^{\eta_0\iota_0})=\mu_{\gamma_\nu}^{\eta_0}$.

Selon (5), on a

$$u(\mu_{\gamma_\nu}^{\eta_0})=h\{\psi[s^{-1}(\mu_{\gamma_\nu}^{\eta_0})]\}=h[\psi(\xi_\nu^{\eta_0\iota_0})]=h(\iota_0)=p\,.$$

Les $\mu_{\gamma_\nu}^{\eta_0}$ étant d'après (4) distincts deux à deux, cette égalité prouve, en vertu de (2), la propriété $(*)$. Notre Lemme est démontré.

Théorème. *Si*

$$2^{\aleph_\lambda}=\aleph_{\lambda+1}\,, \tag{7}$$

où $\aleph_\lambda$ est un aleph régulier, il existe une suite transfinie de type ω_λ formée de fonctions $f_a|W_1$ telles que:

1° $f_a(W_1)=V$ *pour* $0\leqslant a<\omega_\lambda$;

2° *Quels que soient l'élément $p\in V$ et la suite d'indices croissants $(\beta)=\{a_\gamma\}_{\gamma<\omega_\lambda}$, la suite $\{f_{a_\gamma}(\theta)\}_{\gamma<\omega_\lambda,\theta\in W_1}$ contient $\aleph_\lambda$ termes égaux à p, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles de θ dont le nombre ne peut surpasser $\aleph_\lambda$.*

Démonstration. L'hypothèse (7) implique l'existence d'une suite transfinite de type $\omega_{\lambda+1}$:

$$\sigma^0,\ \sigma^1,\ \ldots,\ \sigma^\theta,\ \ldots\qquad(\theta<\omega_{\lambda+1}) \tag{8}$$

se composant de toutes les suites croissantes $\sigma^\theta=\{\sigma_\gamma^\theta\}_{\gamma<\omega_\lambda}$ formées de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$; de plus, il en résulte:

$$\bar{\theta}=\aleph_\lambda\quad\text{lorsque}\quad \omega_\lambda\leqslant\theta<\omega_{\lambda+1}\,. \tag{9}$$

Désignons par $\mathcal{F}^\theta$ la famille de toutes les suites σ^ϱ de (8) où $0\leqslant\varrho<\theta$. Notre Lemme lui étant applicable lorsque θ satisfait à (9), il s'ensuit qu'il existe dans ce cas une fonction $u^\theta(a)$ satisfaisant à $(*)$ (la propriété $(*)$ s'énonce alors: quels que soient $p\in V$ et $\sigma^\varrho=\{\sigma_\gamma^\varrho\}_{\gamma<\omega_\lambda}$ appartenant à $\mathcal{F}^\theta$, l'égalité $u^\theta(\sigma_\gamma^\varrho)=p$ subsiste pour $\aleph_\lambda$ valeurs distinctes de γ).

Soit $\{p_\theta\}_{\theta<\omega_\lambda}$ une suite transfinie se composant de tous les éléments de V; comme $V\subset W_0$, $\overline{\overline{V}}\leqslant\overline{\overline{W}}_0=\overline{\omega}_\lambda$, une telle suite existe.

Cela étant, posons

$$\begin{cases} f_a(\theta)=u^\theta(a) & \text{pour}\quad 0\leqslant a<\omega_\lambda,\ \omega_\lambda\leqslant\theta<\omega_{\lambda+1}\,,\\ f_a(\theta)=p_\theta & \text{pour}\quad 0\leqslant a<\omega_\lambda,\ 0\leqslant\theta<\omega_\lambda\,.\end{cases} \tag{10}$$

Les fonctions $f_a|W_1$ définies par (10) satisfont aux conditions du Théorème.

En effet, 1° est une conséquence évidente de $(*)$, (6) et (10).

Afin d'établir 2°, donnons-nous un (β) et un p. Soit $\theta=\theta^0$ un indice $<\omega_{\lambda+1}$ pour lequel $(\beta)=\sigma^{\theta^0}$ et dont l'existence résulte de la définition de la suite (8).

Considérons une valeurs $\theta\geqslant\max(\theta^0,\omega_\lambda)$. D'après (9) et (10), première ligne, on a $u^\theta(a_\gamma)=f_{a_\gamma}(\theta)$, d'où il résulte en vertu de la condition $(*)$ du Lemme que l'égalité $f_{a_\gamma}(\theta)=p$ est vraie pour $\aleph_\lambda$ valeurs distinctes de γ.

Il n'en ne pourrait donc être autrement que pour certains $\theta<\max(\theta^0,\omega_\lambda)$. D'après (9), ceci achève la démonstration de 2°.

Notre Théorème est ainsi démontré.

Si l'on y pose $\lambda=0$, $V=\{0,1\}$ et si l'on remplace θ par x_θ, on retrouve le résultat de Sierpiński cité au début.

Travail cité

[1] W. Sierpiński, *Remarque sur les suites infinies de fonctions*, Fund. Math. 18 (1932), p. 110-113.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 9. 7. 1962