Hence $[c:c'] = \varepsilon \dim K_1 \cdot [c:c':\beta]$, where $\dim K_1 = \sum\{d_i | i < b\}$: and this is the incidence number originally given for S.

Thus we have proved

THEOREM 3. *If each Y_a is the space of a locally finite* CW *complex, then $\underset{a\in A}{L} Y_a$ is the space of a* CW *complex (not, of course, in general a locally finite one).*

Remarks. (i) This shows that a vector space with Dugundji's weak topology [3] is a CW complex. For in specifying the Dugundji topology, we may take a fixed basis of the space, and consider only those finite-dimensional subspaces spanned by subsets of the basis. The space thus becomes an L-product of real lines; and the real line is certainly a locally finite CW complex.

(ii) L is not associative. For if each Y_a is the unit interval, regarded as a CW complex with three cells, $B = \{0,1\}$, A_0 is of cardinal $\aleph_0$ and A_1 is of cardinal c, then the subset

$$E = \{x \,|\, \|x\| \text{ has one member}\}$$

is a subcomplex of the CW complex $L = \underset{a\in A}{L} Y_a$ (and hence has CW topology in it); but as a subset of $R = \underset{a\in A_0}{L} Y_a \times \underset{a\in A_1}{L} Y_a$, E is just the Dowker counter example ([2], p. 563) which does not have the CW topology.

References

[1] D. E. Cohen, *Spaces with weak topology*, Q. J. Math. Oxford (2), 5 (1954), pp. 77-80.

[2] C. H. Dowker, *Topology of metric complexes*, Amer. J. Math. 74 (1952), pp. 555-577.

[3] R. Dugundji, *Note on CW polytopes*, Portugaliae Math. 11 (1952), pp. 7-106.

[4] P. J. Hilton, *Homotopy theory*, C.U.P. 1953.

[5] J. L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand 1955.

[6] A. G. Kurosh, *Theory of groups* (English translation), Vol. I, Chelsea 1956.

[7] S. Lefschetz, *Topics in topology*, Princeton 1942.

Reçu par la Rédaction le 29. 1. 1962

Sur une propriété des ensembles partiellement ordonnés

par

J. Popruženko (Łódź)

Soient E un ensemble quelconque, ϱ une relation binaire définie dans E.

On dit que la relation ϱ établit *un ordre partiel dans E* lorsqu'elle est:

1° *non-réflexive* (c'est-à-dire qu'on ait constamment non $(x\varrho x)$),

2° *transitive*.

On dit que ϱ établit *un ordre dans E* lorsque, en outre, la condition suivante est vérifiée:

3° *Quels que soient $x, y \in E$, $x \neq y$, on a soit $x\varrho y$, soit $y\varrho x$.*

N étant un ensemble partiellement ordonné par la relation σ, soit $f|E$ une fonction telle que $f(E) \subset N$.

Lorsque $f(x) \neq f(y)$ pour $x, y \in E$, $x \neq y$ et $x\varrho y \rightarrow f(x)\sigma f(y)$, nous appellerons f *transformation isomorphe de E dans N*.

Nous dirons alors que les ensembles E et $f(E)$ sont *semblables*, en symbole: $E \simeq f(E)$.

Soit $\varphi \geqslant \omega_0$ un nombre ordinal. Désignons par U_φ l'ensemble de toutes les suites de type φ formées de nombres 0 et 1, ordonné d'après le principe de premières différences, par U_φ^0 le sous-ensemble de U_φ se composant de toutes les suites de la forme $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ où $a_\gamma = 1$ pour un $\gamma \geqslant 0$ et $a_\xi = 0$ pour $\xi > \gamma$.

La relation qui établit l'ordre dans U_φ sera désignée, comme d'habitude, par le symbole $\prec$.

Remarquons que, lorsque $N = U_\varphi$, on a la propriété:

(i) *Si $f(x) = \{a_\xi^{(x)}\}_{\xi<\varphi}$, $x \in E$ et si l'on pose pour un $\psi > \varphi$: $g(x) = \{b_\xi^{(x)}\}_{\xi<\psi}$ où $b_\xi^{(x)} = a_\xi^{(x)}$ pour $\xi < \varphi$ et $b_\xi^{(x)} = 0$ pour $\varphi \leqslant \xi < \psi$, alors les transformations $f|E$, $f(E) \subset U_\varphi$, et $g|E$, $g(E) \subset U_\psi$, sont simultanément isomorphes où non.*

C'est une conséquence immédiate de la définition de la relation $\prec$.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

(T) *Tout ensemble partiellement ordonné de puissance $\aleph_\mu$ est semblable à un sous-ensemble de $U_{\omega_\mu}^0$.*

La démonstration s'appuie sur les deux Lemmes qui vont suivre. Pour les établir, on remarque d'abord que l'espace $U^0_{\omega_\mu}$ est muni des deux propriétés, P^μ_1 et P^μ_2, mises en évidence par W. Sierpiński.

P^μ_1. *Soit* $Q \subset U^0_{\omega_\mu}$, $\overline{\overline{Q}} < \aleph_\mu$. *Si* $\aleph_\mu$ *est un aleph régulier, il existe deux éléments* $a, b \in U^0_{\omega_\mu}$ *satisfaisant à la condition* $a \prec Q \prec b$ [1].

P^μ_2. *Soient* $Q_1, Q_2 \subset U^0_{\omega_\mu}$, $\overline{\overline{Q}}_1 < \aleph_\mu$, $\overline{\overline{Q}}_2 < \aleph_\mu$, $Q_1 \prec Q_2$. *Si* $\aleph_\mu$ *est un aleph régulier, il existe un* $c \in U^0_{\omega_\mu}$ *tel que* $Q_1 \prec c \prec Q_2$.

En effet, pour $\mu = \nu+1$, ces propriétés ont été démontrées dans [2], p. 463-465; la démonstration est valable pour tout $\aleph_\mu$ régulier (v. aussi [1], p. 62).

Cela étant, on passe par induction transfinie aux énoncés:

LEMME I. *Soit* $Q \subset U^0_{\omega_\mu}$, $\overline{\overline{Q}} < \aleph_\mu$. *Si* $\aleph_\mu$ *est un aleph régulier, il existe deux ensembles* A *et* B *tels que:* $A, B \subset U^0_{\omega_\mu}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \aleph_\mu$, $A \prec Q \prec B$.

LEMME II. *Soient* $Q_1, Q_2 \subset U^0_{\omega_\mu}$, $\overline{\overline{Q}}_1 < \aleph_\mu$, $\overline{\overline{Q}}_2 < \aleph_\mu$, $Q_1 \prec Q_2$.
Si $\aleph_\mu$ *est un aleph régulier, il existe un ensemble* C *tel que*:

$$C \subset U^0_{\omega_\mu}, \quad \overline{\overline{C}} = \aleph_\mu, \quad Q_1 \prec C \prec Q_2 .$$

Le passage est immédiat. En effet, dans le cas de P^μ_2, posons $c = c_0$, $Q_2 = Q^0_2$ et soit $0 < \eta < \omega_\mu$. Supposons les élements $\{c_\zeta\}_{\zeta<\eta}$ de $U^0_{\omega_\mu}$ définis de façon à satisfaire aux conditions: $c_\zeta \neq c_{\zeta'}$ pour $\zeta \neq \zeta'$, $Q_1 \prec c_\zeta \prec Q^0_2$. Alors, si l'on pose $Q^\eta_2 = \{c_\zeta\}_{\zeta<\eta} \cup Q^0_2$, on voit d'après $\overline{\eta} < \aleph_\mu$ que les conditions initiales se reproduisent pour Q_1 et Q^η_2. On en conclut qu'il existe un $c = c_\eta \in U^0_{\omega_\mu}$ tel que $Q_1 \prec c_\eta \prec Q^\eta_2$, donc $Q_1 \prec c_\eta \prec Q_2$. Comme $c_\eta \neq c_{\eta'}$ pour $\eta, \eta' < \omega_\mu$, $\eta \neq \eta'$ et comme $\overline{\omega}_\mu = \aleph_\mu$, on aperçoit que l'ensemble C se composant des éléments c_η $(\eta < \omega_\mu)$ vérifie la thèse du Lemme II.

On établit le Lemme I en appliquant le même raisonnement (deux fois répété) à P^μ_1.

Démonstration du théorème (T).

Cas 1. *ω_μ est un nombre ordinal régulier.* Soit ω_φ le nombre ordinal initial tel que $\overline{\omega}_\varphi = \overline{\overline{U^0_{\omega_\mu}}}$ et soient

$$U^0_{\omega_\mu}\colon s_0, s_1, \ldots, s_\tau, \ldots \qquad (\tau < \omega_\varphi) , \tag{1}$$

et

$$E\colon u_0, u_1, \ldots, u_\eta, \ldots \qquad (\eta < \omega_\mu) \tag{2}$$

deux suites transfinies composées de tous les éléments (distincts) des ensembles $U^0_{\omega_\mu}$ et E respectivement.

Définissons une fonction $f|E$ à l'aide du procédé inductif suivant.

[1] Ce qui vent dire: $x \in Q \to a \prec x \prec b$. Les expressions analogues qu'on rencontre dans la suite s'interprètent de la même manière.

Posons

$$f(u_0) = s_0 \tag{3}$$

et soit $0 < \eta < \omega_\mu$. Supposons que les valeurs $f(u_\gamma) \in U^0_{\omega_\mu}$ soient définies pour $\gamma < \eta$ et que l'on ait $f(u_\gamma) \neq f(u_\delta)$ pour $\gamma, \delta < \eta$, $\gamma \neq \delta$ et $u_\gamma \varrho u_\delta \to f(u_\gamma) \prec f(u_\delta)$ pour $\gamma, \delta < \eta$.

Afin de définir la valeur $f(u_\eta)$, considérons le segment $u_0, u_1, \ldots, u_\eta$ de la suite (2). Il n'y a que 4 cas qui soient à priori possibles:

1. On a non$(u_\delta \varrho u_\eta)$ et non$(u_\eta \varrho u_\delta)$ pour $0 \leqslant \delta < \eta$.
2. On a non$(u_\eta \varrho u_\delta)$ pour $0 \leqslant \delta < \eta$ et il existe un $\gamma < \eta$ tel que $u_\gamma \varrho u_\eta$.
3. On a non$(u_\delta \varrho u_\eta)$ pour $0 \leqslant \delta < \eta$ et il existe un $\gamma' < \eta$ tel que $u_\eta \varrho u_{\gamma'}$.
4. On a, pour certains $\gamma', \gamma'' < \eta$: $u_{\gamma'} \varrho u_\eta$ et $u_\eta \varrho u_{\gamma''}$.

Désignons par $\{\gamma'\}$ et $\{\gamma''\}$ les ensembles (non-vides) des indices qui apparaissent dans le cas 4, par $\{u_{\gamma'}\}$ et $\{u_{\gamma''}\}$ ceux des termes correspondants. D'après les propriétés 1°-2° de ϱ, $\{\gamma'\}$ et $\{\gamma''\}$ sont disjoints et remplissent la relation $\{\gamma'\} \varrho \{\gamma''\}$. Il s'ensuit, conformément à notre hypothèse sur les éléments $f(u_\gamma)$:

$$f(\{u_{\gamma'}\}) \prec f(\{u_{\gamma''}\}) . \tag{4}$$

Cela étant, posons

$$f(u_\eta) = s \tag{5}$$

où s désigne un élément de $U^0_{\omega_\mu}$ satisfaisant aux conditions:

(a_1) dans le cas 1: $s \neq f(u_\gamma)_{\gamma<\eta}$, d'ailleurs arbitraire;

(a_2) dans le cas 2: $s \neq f(u_\gamma)_{\gamma<\eta}$, $s \succ f(u_\gamma)$ pour tout γ tel que $\gamma < \eta$, $u_\gamma \varrho u_\eta$;

(a_3) dans le cas 3: $s \neq f(u_\gamma)_{\gamma<\eta}$, $s \prec f(u_{\gamma'})$ pour tout γ' tel que $\gamma' < \eta$, $u_\eta \varrho u_{\gamma'}$;

(a_4) dans le cas 4: $s \neq f(u_\gamma)_{\gamma<\eta}$, $f(\{u_{\gamma'}\}) \prec s \prec f(\{u_{\gamma''}\})$.

Comme l'un — et seulement un — des 4 cas envisagés se présente toujours, la possibilité de définir la fonction (5) se réduit à celle de choisir un $s \in U^0_{\omega_\mu}$ de façon qu'il satisfasse à la condition correspondante (a_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$. Or, comme $\overline{\eta} < \aleph_\mu$, un tel s existe. En effet, dans le cas 1 cela résulte de (1) et de l'inégalité $\aleph_\mu \leqslant \overline{\overline{U^0_{\omega_\mu}}}$; dans les cas 2-3 c'est une conséquence du Lemme I, dans le cas 4 — du Lemme II, rapproché de (4).

Pour préciser s, on peut prendre toujours le premier élément de (1) satisfaisant aux conditions imposées par (a_i).

Conformément à (a_1)-(a_4), on a $f(u_\delta) \neq f(u_\gamma)$ pour $\gamma, \delta \leqslant \eta$, $\gamma \neq \delta$ et $u_\gamma \varrho u_\delta \to f(u_\gamma) \prec f(u_\delta)$ pour $\gamma, \delta \leqslant \eta$.

On définit ainsi par induction, à l'aide des formules (3) et (5), une transformation biunivoque de E dans $U^0_{\omega_\mu}$. Reste à montrer que $u_\eta \varrho u_{\eta'}$ entraîne $f(u_\eta) \prec f(u_{\eta'})$.

Supposons le contraire. Il existe alors (vu (2)) au moins un couple u_ζ, u_ϑ d'éléments de E tels que $u_\zeta \varrho u_\vartheta$ et non $(f(u_\zeta) \prec f(u_\vartheta))$. $f|E$ étant à valeurs distinctes, cela équivaut à l'implication $u_\zeta \varrho u_\vartheta \to f(u_\zeta) \succ f(u_\vartheta)$.

Posons, pour de tels couples, $\lambda = \max(\zeta, \vartheta)$ et soit $\lambda = \lambda_0$ le plus petit nombre ordinal qui puisse être obtenu de cette manière. Ainsi, il existe au moins un couple $u_{\zeta_0}, u_{\vartheta_0}$ tel que:

(6) $$u_{\zeta_0} \varrho u_{\vartheta_0} \to f(u_{\zeta_0}) \succ f(u_{\vartheta_0}),$$

(7) $$\lambda_0 = \max(\zeta_0, \vartheta_0),$$

et

(8) $$u_\zeta \varrho u_\vartheta \to f(u_\zeta) \prec f(u_\vartheta) \quad \text{pour} \quad \zeta, \vartheta < \lambda_0.$$

Si $\lambda = \vartheta_0$, la formule (8) devient: $u_\zeta \varrho u_\vartheta \to f(u_\zeta) \prec f(u_\vartheta)$ pour $\zeta, \vartheta < \vartheta_0$. Comme $f(u_\zeta) \neq f(u_\vartheta)$ pour $\zeta, \vartheta < \vartheta_0$, $\zeta \neq \vartheta$, on aperçoit alors que, pour l'indice $\eta = \vartheta_0$, toutes les conditions de la prémisse hypothétique de notre définition inductive sont remplies. Par conséquent, la détermination de la valeur $f(u_{\vartheta_0})$ s'effectue conformément à la discussion des 4 cas que nous venons de distinquer. Or, comme $u_{\zeta_0} \varrho u_{\vartheta_0}$ et, d'après (7), $\zeta_0 < \vartheta_0$, on est soit dans le cas 2, soit dans le cas 4, ce qui donne, selon (a_2) respectivement (a_4), $f(u_{\vartheta_0}) \succ f(u_{\zeta_0})$, contrairement à (6).

Si $\lambda_0 = \zeta_0$, un raisonnement analogue montre que l'on est soit dans le cas 3, soit dans le cas 4, ce qui conduit en vertu de (a_3)-(a_4) à la même contradiction.

Le théorème (T) est donc vrai en cas de ω_μ régulier.

L'idée de cette démonstration provient de W. Sierpiński [2], p. 189.

Notons la propriété:

(ii) *Soient:* $\omega_\alpha < \omega_\beta$ *deux nombres initiaux réguliers,* $H = \{p_\eta\colon 0 \leqslant \eta < \omega_\beta\}$ *un ensemble partiellement ordonné,* $H_0 = \{p_\eta\colon 0 \leqslant \eta < \omega_\alpha\}$, $g|H_0$ *une fonction telle que* $g(H_0) \subset U^0_{\omega_\beta}$, $H_0 \simeq g(H_0)$.

Alors, en appliquant la construction (a_1)-(a_4) *à partir de* p_{ω_α}, *on prolonge* $g|H_0$ *à tout* H *de façon qu'on ait:* $g(H) \subset U^0_{\omega_\beta}$, $H \simeq g(H)$.

C'est une conséquence immédiate du procédé inductif que nous venons de définir.

Cas 2. *Le nombre* ω_μ *n'est pas régulier.*

ω_μ est alors confinal avec un nombre ordinal $< \omega_\mu$. Il s'ensuit qu'il existe un nombre ordinal $\nu < \mu$ et une suite d'ordinaux croissants $\{\alpha_\iota\}_{\iota < \omega_\nu}$ tels que $\lim\limits_{\iota \to \omega_\nu} \alpha_\iota = \mu$ et $\lim\limits_{\iota \to \omega_\nu} \omega_{\alpha_\iota} = \omega_\mu$, tous les ω_{α_ι} pouvant être supposés réguliers puisque, en cas contraire, on pourrait remplacer ω_{α_ι} par $\omega_{\beta_\iota} = \omega_{\alpha_\iota + 1}$ sans avoir altéré la convergence.

L'ensemble E représenté sous la forme (2), posons $E_\iota = \{u_\eta\colon \eta < \omega_{\alpha_\iota}\}$. On a alors

(9) $$E = \bigcup_{\iota < \omega_\nu} E_\iota, \qquad E_\iota \subset E_\varkappa \quad \text{pour} \quad \iota < \varkappa < \omega_\nu.$$

Désignons, d'une manière générale par $f^\iota_\iota|E_\iota$ une transformation de E_ι dans $U^0_{\omega_{\alpha_\iota}}$, soit

(10) $$f^\iota_\iota(u) = \{a^{(u)}_\xi\}_{\xi < \omega_{\alpha_\iota}} \qquad (u \in E_\iota,\ f^\iota_\iota(u) \in U^0_{\omega_{\alpha_\iota}}),$$

et, lorsque $f^\iota_\iota|E_\iota$ est défini, par $f^\varkappa_\iota|E_\iota$ pour $\varkappa > \iota$ la transformation

(11) $$f^\varkappa_\iota(u) = \{b^{(u)}_\xi\}_{\xi < \omega_{\alpha_\varkappa}} \qquad (u \in E_\iota,\ f^\varkappa_\iota(u) \in U^0_{\omega_{\alpha_\varkappa}})$$

où

(12) $$b^{(u)}_\xi = a^{(u)}_\xi \ \text{pour} \ \xi < \omega_{\alpha_\iota}, \qquad b^{(u)}_\xi = 0 \ \text{pour} \ \xi \geqslant \omega_{\alpha_\iota}.$$

Nous allons définir par induction un système de transformations $\{f^\varkappa_\iota\}$ satisfaisant aux conditions:

$$\left.\begin{array}{l} 1^*\ f^\iota_\iota|E_\iota,\ E_\iota \simeq f^\iota_\iota(E_\iota) \subset U^0_{\omega_{\alpha_\iota}} \\ 2^*\ f^\varkappa_\iota(u) = f^\varkappa_\varkappa(u) \quad \text{pour } u \in E_\iota\ (^2) \end{array}\right\} \qquad (0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa < \omega_\nu).$$

Soit $f^0_0|E_0$ une transformation isomorphe de E_0 dans $U^0_{\omega_{\alpha_0}}$: le nombre ω_{α_0} supposé régulier, une telle transformation existe en vertu du Cas 1 de ce théorème. Définissons $f^1_0|E_0$ conformément à (10)-(12) et posons $f^1_1(u) = f^1_0(u)|_{u \in E_0}$. En prolongeant, suivant (i)-(ii), la fonction $f^1_1|E_0$ à tout $u = u_\eta$, $\omega_{\alpha_0} \leqslant \eta < \omega_{\alpha_1}$, on obtient une transformation isomorphe $f^1_1|E_1$ de E_1 dans $U^0_{\omega_{\alpha_1}}$.

D'une façon analogue, posons $f^2_2(u) = f^2_1(u)|_{u \in E_1}$ et prolongeons $f^2_2|E_1$ à tout $u \in E_2$ de sorte que $f^2_2|E_2$ soit une transformation isomorphe de E_2 dans $U^0_{\omega_{\alpha_2}}$. Cela est encore possible pour les mêmes raisons que précédemment; on vérifie de suite l'égalité $f^2_0(u) = f^2_2(u)|_{u \in E_0}$.

On a ainsi défini les $f^\varkappa_\iota$ de façon à satisfaire aux conditions 1*-2* pour $0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa \leqslant 2$.

Soit maintenant $2 < \lambda < \omega_\nu$ et supposons que les transformations $f^\varkappa_\iota$ satisfaisant à 1*-2* soient définies pour $0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa < \lambda$; il est à montrer que la définition se laisse étendre aux indices $0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$.

Lorsque $\lambda = (\lambda - 1) + 1$, la démonstration ne diffère pas dans l'idée, de celle que nous venons d'exposer pour $\lambda = 2$.

Supposons donc λ de seconde espèce. Posons dans ce cas

(13) $$f^\lambda_\lambda(u) = f^\lambda_\varkappa(u)|_{u \in E_\iota} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa < \lambda.$$

D'après (9), qui entraîne $E_\lambda = \bigcup\limits_{\iota < \lambda} E_\iota$, la formule (13) définit $f^\lambda_\lambda|E_\lambda$ de façon univoque. En effet, on a par hypothèse $f^\varkappa_\iota(u) = f^\varkappa_\varkappa(u)|_{u \in E_\iota}$ pour

(2) Notation plus commode: $f^\varkappa_\iota(u) = f^\varkappa_\varkappa(u)|_{u \in E_\iota}$; nous nous en servirons dans la suite.

$\varkappa < \lambda$, d'où en vertu de (10)-(12): $f_\iota^\lambda(u) = f_\varkappa^\lambda(u)|_{u\in E_\iota}$. D'autre part, ι_0 étant le premier indice pour lequel $u \in E_{\iota_0}$, on a $f_\iota^\iota(u) = f_{\iota_0}^\iota(u)|_{u\in E_{\iota_0}}$, d'où $f_\iota^\lambda(u) = f_{\iota_0}^\lambda(u)|_{u\in E_{\iota_0}}$, donc $f_\varkappa^\lambda(u) = f_{\iota_0}^\lambda(u)|_{u\in E_{\iota_0}}$.

On a ainsi: $f_\lambda^\lambda(u) = f_\iota^\lambda(u)|_{u\in E_\iota}$, $f_\lambda^\lambda(E_\iota) \subset U_{\omega_\lambda}^0$. Puis, comme $f_\iota^\iota(E_\iota) \simeq E_\iota$, on a en vertu de (i): $f_\iota^\lambda(E_\iota) \simeq E_\iota$, donc $f_\lambda^\lambda(E_\iota) \simeq E_\iota$, d'où $E_\lambda \simeq f_\lambda^\lambda(E_\lambda) \subset U_{\omega_\lambda}^0$.

La condition 1* subsiste donc pour $\iota = \lambda$ et l'on voit qu'il en est de même de 2* pour $\varkappa = \lambda$. Cela vérifie 1*-2* pour $0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa \leqslant \lambda$.

Le système $\{f_\iota^\varkappa\}$ est ainsi défini par induction.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du Cas 2. $f_\iota^\iota|E_\iota$ représenté dans la forme (10), soit

$$f_\iota^{\omega_\mu}(u) = \{c_\xi^{(u)}\}_{\xi<\omega_\mu} \quad \text{où} \quad c_\xi^{(u)} = a_\xi^{(u)} \quad \text{pour} \quad \xi < \omega_{a_\iota}$$
$$\text{et} \quad c_\xi^{(u)} = 0 \quad \text{pour} \quad \omega_{a_\iota} \leqslant \xi < \omega_\mu; \quad u \in E_\iota .$$

Posons

$$f(u) = f_\varkappa^{\omega_\mu}(u)|_{u\in E_\iota} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \iota \leqslant \varkappa < \omega_\nu . \tag{14}$$

On conclut de 2* que $f_\iota^{\omega_\mu}(u) = f_\varkappa^{\omega_\mu}(u)|_{u\in E_\iota}$ pour $\iota \leqslant \varkappa$, d'où il s'ensuit en vertu de (9) que la formule (14) définit $f|E$ de façon univoque; puis, on a évidemment $f(E) \subset U_{\omega_\mu}^0$. Selon (i) et (14), il est, vu 1* et la définition du symbole $f_\iota^{\omega_\mu}$: $f(E_\iota) \simeq E_\iota$ pour $0 \leqslant \iota < \omega_\nu$, d'où il vient d'après (9): $f(E) \simeq E$.

Cela établit le Cas 2.

Le théorème (T) est entièrement démontré.

Considérons les deux théorèmes:

(T_1) *Si* $\aleph_\mu$ *est un aleph régulier, l'ensemble* $U_{\omega_\mu}^0$ *contient une image semblable de tout ensemble ordonné de puissance* $\aleph_\mu$ (Hausdorff-Sierpiński, v. [2], p. 463-465 ($U_{\omega_\mu}^0 = H_\mu$)).

(T_2) *E étant un ensemble partiellement ordonné par la relation ϱ, il existe une relation σ qui établit un ordre dans E et qui satisfait à la condition* $x\varrho y \to x\sigma y$ (E. Marczewski, [3], p. 387).

Le théorème (T) implique évidemment (T_1). Or il implique aussi (T_2). En effet, posons $S = f(E)$. La relation $\prec_S$, induite dans S par $\prec$, y établit un ordre; alors, en définissant pour $x, y \in E$: $x\sigma y \sim f(x) \prec_S f(y)$, on obtient une relation σ vérifiant les conditions de (T_2).

Réciproquement, les théorèmes (T_1) et (T_2) dans leur ensemble entraînent, moyennant le Cas 1, le théorème (T).

Nous avons ainsi démontré:

Le théorème (T) *est équivalent à la conjonction logique des théorèmes* (T_1) *et* (T_2).

Travaux cités

[1] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), p. 56-67.

[2] — *Cardinal and ordinal numbers*, Monografie Matematyczne, t. 34, Warszawa 1958.

[3] E. Szpilrajn-Marczewski, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math. 16 (1930), p. 386-389.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1962