Use Axiom (1) to prove $\vdash((T^n \equiv T^n) \wedge (F^n \equiv T^n)) \equiv \forall x_0(x_0 \equiv T^n)$, and hence $\vdash(F^n \equiv T^n) \equiv \forall x_0(x_0 \equiv T^n)$. Then substitute $(\lambda x_0 x_0)$ for f_{00} and $(\lambda x_0 T^n)$ for g_{00} in Axiom (3^{00}) and use the definition of F^n to obtain $\vdash \forall x_0(x_0 \equiv T^n) \equiv F^n$.

Henkin remarks at the end of [H] that when one passes from the theory of propositional types to the full theory of finite types, it becomes necessary to add a constant $\iota_{1(01)}$ to denote a descriptor function, and an appropriate axiom involving this constant. We note that for this axiom it suffices to take the simple formula

$$\iota_{1(01)}(\lambda x_1(x_1 \equiv y_1)) \equiv y_1\,,$$

from which the formula

$$(\exists!\, x_1)(f_{01} x_0) \to f_{01}(\iota_{1(01)} f_{01})$$

can be derived without difficulty.

PRINCETON, N. J.

Reçu par la Rédaction le 20. 8. 1962

О диадических пространствах

В. Пономарев (Москва)

1. Эта заметка примыкает к работе [1].

Определение. Вполне регулярное пространство X назовем *(неприводимо) диадическим*, если у него существует расширение $\overline{X}$, являющееся (неприводимо) диадическим бикомпактом (1).

Заметим прежде всего, что всякое диадическое пространство X удовлетворяет отрицательной аксиоме счетности (т. е. в X не существует несчетной дизъюнктной системы открытых множеств). Действительно, если $\overline{X}$ есть расширение пространства X, являющееся диадическим бикомпактом, а $\{U_a\}$ дизъюнктная несчетная система открытых множеств пространства X, то рассматривая систему $\{OU_a\}$ открытых в $\overline{X}$ множеств, высекающую из X данную систему $\{U_a\}$, получим также несчетную дизъюнктную систему открытых в $\overline{X}$ множеств, чего в диадическом бикомпакте быть не может (Теорема Э. Марчевского [2]).

Теорема 1. *Диадическое паракомпактное пространство финально-компактно* (2).

Доказательство. Достаточно доказать, что всякое покрытие γ нормального пространства X, удовлетворяющего отрицательной аксиоме счетности, содержит счетное покрытие того-же пространства.

Предполагаем, что элементы покрытия γ занумерованы порядковыми числами, т. е. что $\gamma = \{\Gamma_a\}$, где

$$a = 1, 2, 3, \ldots, < \omega_\tau.$$

Так как γ — покрытие парокомпактного пространства X, то существует такое

(1) Как известно, бикомпакт $\overline{X}$ веса τ называется (неприводимо) *диадическим*, если он является образом обобщенного канторова дисконтинуума D^τ (т. е. топологического произведения τ пространств, каждое из которых состоит из двух изолированных точек) при некотором (неприводимо) непрерывном отображении $f\colon D^\tau \to \overline{X}$. Непрерывное отображение f пространства R на пространство R' называется *неприводимым*, если для всякого замкнутого подмножества $A \neq R$ пространства R имеем $fA \neq R'$.

(2) Как известно, пространство X называется *финально-компактным* (лии *линделёфовым*), если из всякого его открытого покрытия можно выделить счетное множество элементов, также образующих покрытие пространства X.

комбинаторно вписанное в γ локально конечное покрытие $\gamma' = \{\Gamma'_\alpha\}$, что $[\Gamma'_\alpha] \subseteq \Gamma_\alpha$. Положим

$$\Gamma''_\alpha = \Gamma'_\alpha \setminus [\bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma'_\beta] = \Gamma'_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} [\Gamma'_\beta].$$

Система $\{\Gamma''_\alpha\}$ дизъюнктна, поэтому число непустых ее элементов счетно; значит существует такое счетное порядковое число α_0, что все Γ'_α, при $\alpha \geqslant \alpha_0$, содержатся в $\bigcup_{\beta<\alpha_0} [\Gamma'_\beta]$. А это значит, что счетное множество $\{[\Gamma'_\alpha],\ \alpha < \alpha_0\}$ и тем более счетное множество $\gamma_0 = \{\Gamma_\alpha,\ \alpha < \alpha_0\} \subseteq \gamma$ образует покрытие пространства X.

Следствие. *Для того, чтобы метризуемое пространство X было диадично, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетную базу.*

В самом деле, всякое пространство со счетной базой диадично, так как у него есть расширение, являющееся компактом. Далее, если диадическое пространство метризуемо, то оно, будучи паракомпактным, по доказанному финально-компактно, а тогда (будучи метризуемым) обладает счетной базой.

2. В работе [1] дана характеристика диадических и неприводимо диадических бикомпактов, заключающаяся (для неприводимо-диадических бикомпактов) в существовании ветвящейся измельчающейся системы разбиений ([3]).

Напомним определение ветвящейся системы разбиений. Рассматривается произвольное (абстрактно заданное) множество $W_\tau = \{\lambda\}$ мощности τ, равной весу пространства X и множество $\Theta_\tau = \{\alpha\}$, $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ всевозможных конечных подмножеств множества W_τ. Множество Θ_τ, элементы которого называем *индексами*, естественно упорядочено: $\alpha' > \alpha$ если $\alpha' \supset \alpha$. Итак, Θ_τ является направленным множеством. Индексы $\alpha \in \Theta_\tau$, которым не предшествует никаких других индексов, называются *старшими* (очевидно, старший индекс α состоит лишь из одного $\lambda \in W_\tau$). Последовательность разбиений $\mathfrak{A} = \{\varphi_\alpha\}$ пространства X, упорядоченная по множеству Θ_τ, называется *ветвящейся системой разбиений*, если выполнено следующее условие:

Если $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то все элементы A_i^α покрытия φ_α суть непустые замкнутые множества, находящиеся во взаимно-однозначном соответствии со всевозможными комбинациями $A_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, A_{i_n}^{\lambda_n}$ элементов покрытий $\varphi_{\lambda_1}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}$, так что можно записать $A_i^\alpha = A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, причем

$$A_i^\alpha = A_{i_1}^{\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}^{\lambda_n}.$$

([3]) *Разбиением* или *каноническим покрытием* пространства называется конечное покрытие, элементами которого являются замыкания дизъюнктных открытых множеств пространства X.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы пространство X было неприводимо диадическим, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве X имелась ветвящаяся система разбиений.*

Доказательство. Необходимость. Если пространство X диадично, то у него имеется неприводимо диадическое бикомпактное расширение $\bar{X}$. Возьмем ветвящуюся систему разбиения $\bar{\Sigma} = \{\bar{\varphi}_\alpha\}$, $\bar{\varphi}_\alpha = \{\bar{A}_1^\alpha, \ldots, \bar{A}_{s_\alpha}^\alpha\}$ бикомпакта $\bar{X}$. Тогда система $\Sigma = \{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha = \{A_i^\alpha\}$, $A_i^\alpha = \bar{A}_i^\alpha \cap X$ будет ветвящейся системой разбиений пространства X.

Достаточность. Пусть $\Sigma = \{\varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha = \{A_i^\alpha\}$ есть ветвящаяся система подразделений пространства X. Для каждого α нерв покрытия φ_α обозначаем через N_α, его вершины через e_i^α. Из порядка, данного в системе покрытий $\mathfrak{A}$, вытекает порядок в системе комплексов $\{N_\alpha\}$ с естественными проекциями. Итак, получаем обратный спектр $S = \{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$, так как система покрытий $\mathfrak{A}$ — ветвящаяся, то спектр S удовлетворяет условию: всякий конечный набор вершин $e_{i_1}^{\lambda_1} \in N_{\lambda_1}, \ldots, e_{i_n}^{\lambda_n} \in N_{\lambda_n}$ определяет единственную вершину $e_i^\alpha \in N_\alpha$; $\pi_{\lambda_1}^\alpha e_i^\alpha = e_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, \pi_{\lambda_n}^\alpha e_i^\alpha = e_{i_n}^{\lambda_n}$. Бикомпакт $\bar{X}$; являющийся обратным пределом спектра $\{N_\alpha \pi_\alpha^{\alpha'}\}$, будет диадическим бикомпактным расширением пространства X, ч.и.т.д.

3. Следующее предложение является обобщением известной теоремы А. Есенина-Вольпина [3].

Теорема 3. *Диадическое локально-бикомпактное паракомпактное пространство с 1-ой аксиомой счетности имеет счетную базу и поэтому метризуемо.*

Доказательство. Возьмем покрытие ω пространства X окрестностями $\{Ox\}$ его точек, имеющими бикомпактное замыкание $[Ox]$. Так как X по теореме 1 финально компактно, то из этого покрытия можно выделить счетное

$$\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \ldots\}, \qquad \Gamma_n = Ox_n.$$

Тогда, обозначая через Φ_n бикомпакт $\bigcup_{i=1}^{n} [\Gamma_i]$, имеем

$$\Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots \subseteq \Phi_n \subseteq \ldots$$

Присоединим к X точку ξ, определив в качестве ее окрестностей множества $O_n\xi = \xi \cup (X \setminus \Phi_n)$ (и сохраняя в X первоначально данную там топологию). Легко видеть, что полученное окрестностное пространство $\bar{X} = X \cup \xi$ есть бикомпакт, содержащий пространство X, являющийся, следовательно его минимальным бикомпактным расширением в смысле П. С. Александрова. В пространстве X очевидно выполнена первая аксиома счетности. Пространство X, будучи диадическим пространством, имеет диадическое бикомпактное расширение X^*; так как $\overline{X}$ есть непрерывный образ всякого бикомпактного расширения X' пространства X, в том числе и X^*, то $\overline{X}$ — диадический бикомпакт с 1-ой аксиомой счетности; и в силу теоремы Есенина-Вольпина пространство $\overline{X}$ — а следовательно и X — имеет счетную базу, ч.и т.д.

Цитированная литература

[1] П. Александров и В. Пономарев, *О диадических бикомпактах*, Fund. Math. 50 (1962), стр. 419-429.

[2] E. Marczewski, *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. 34 (1947), стр. 127-143.

[3] А. С. Есенин-Вольпин, *О зависимости между интегральным и локальным весом в диадитических бикомпактах*, Доклады Академии Наук СССР 68 (1949), стр. 441-444.

Reçu par la Rédaction le 19. 2. 1962