References

[1] E M. Alfsen, J. E. Fenstad, *A note on completion and compactification*, Math. Scand. 8 (1960), pp. 97-104.

[2] E. M. Alfsen, O. Njåstad, *Proximity and generalized uniformity*, Fund. Math. this volume pp. 235-252.

[3] Dunford Schwartz, *Linear operators I*, New York 1958.

[4] V. A. Efremovič, *The geometry of proximity I*, Mat. Sbornik 31, N. S. (1952), pp. 189-200 (in Russian).

[5] Yu. M. Smirnov, *On proximity spaces*, Mat. Sbornik, 31 N. S. (1952), pp. 543-574 (in Russian).

Reçu par la Rédaction le 17. 11. 1961

О рангах систем множеств и размерности пространств

А. Архангельский (Москва)

Настоящая работа посвящена в основном исследованию понятия ранга системы множеств и связи этого понятия с размерностью пространства. Наряду с понятием ранга системы множеств в смысле Нагата оказывается полезным рассматривать ранги несколько по иному определенные, в частности так, как это было сделано мной ранее в [2].

В § 1 приводятся наиболее общие результаты, из которых важнейший — характеристику размерности произвольного топологического пространства — дает теорема 1.4.

Достоинства метрических пространств и бикомпактов позволяют доказать для них более сильные результаты, собранные в § 2.

Наконец случай слабо-счетномерных и счетномерных пространств разобран отдельно в § 3. Развитая там теория позволяет доказать инвариантность класса произвольных слабо-счетномерных пространств и метрических счетномерных пространств при открытых, непрерывных, конечнократных отображениях.

Замечу, что в этой работе все покрытия предполагаются открытыми, а размерность пространства есть всюду размерность, определенная с помощью покрытий. Под *слабо-счетномерными* пространствами понимаются представимые в виде суммы счетного множества своих замкнутых конечномерных подпространств, а под *счетномерными* — представимые в виде суммы счетного числа своих нульмерных подмножеств. Наконец, k у нас — всегда некоторое целое положительное число.

Приведем основные определения.

Нагата (¹) называет два множества *зависимыми*, если одно из них содержится в другом. Система множеств называется *зависимой*, если она содержит зависимые множества, в противном случае она называется независимой.

(¹) Результаты Нагата, относящиеся к рангам систем множеств, которые я отмечаю в этой работе, мне известны только в виде формулировок из устных источников. Доказательства их, повидимому, еще не опубликованы.

Определение 0.1. (Нагата). Скажем, что ранг системы множеств γ в точке x *не превосходит* (целого числа) k, если система любых $k+1$ элементов системы γ, содержащих точку x, зависима.

Если ранг системы γ в каждой точке пространства не превосходит k, то говорят, что *ранг* γ *не превосходит* k. Для обозначения ранга системы γ в точке x и просто ранга системы γ будут употребляться, соответственно, обозначения: $\mathrm{r}_x\gamma$, $\mathrm{r}\gamma$.

Нам понадобятся в дальнейшем также понятия малого и большого ранга системы (в точке и просто), которые будем обозначать так: $\mathrm{mr}_x\gamma$, $\mathrm{br}_x\gamma$, $\mathrm{mr}\gamma$, $\mathrm{br}\gamma$.

Определение 0.2. Положим $\mathrm{mr}_x\gamma \leqslant k$ в том и только том случае, если среди любых $k+1$ элементов системы γ, содержащих точку x, найдется один, содержащийся в сумме остальных (2).

Определение 0.3. Положим $\mathrm{br}_x\gamma \leqslant k$ в том и только том случае, если система γ распадается на k систем ранга 1 в точке x.

Очевидно, $\mathrm{mr}_x\gamma \leqslant \mathrm{r}\gamma \leqslant \mathrm{br}_x\gamma$, если они определены. Кроме того, из $\mathrm{mr}_x\gamma = 1$ следует, что $\mathrm{br}_x\gamma = \mathrm{r}_x\gamma = \mathrm{mr}_x\gamma = 1$.

Определение 0.4. Положим $\mathrm{loc\,r}_x\gamma \leqslant k$ (соответственно, $\mathrm{loc\,mr}_x\gamma \leqslant k$, $\mathrm{loc\,br}_x\gamma \leqslant k$), если существует окрестность Ox рассматриваемой точки x такая, что ранг совокупности $\gamma(Ox)$ элементов системы γ, содержащихся в Ox в точке x не превосходит k (соответственно, $\mathrm{mr}_x\gamma(Ox) \leqslant k$, $\mathrm{br}\,\gamma_x(Ox) \leqslant k$).

Аналогично определению $\mathrm{r}\gamma$ и в соответствии с определениями 0.2, 0.3 и 0.4 определяются $\mathrm{mr}\gamma, \mathrm{br}\gamma, \mathrm{loc\,r}\gamma$, $\mathrm{loc\,mr}\gamma$ и $\mathrm{loc\,br}\gamma$ для произвольной системы множеств γ.

§1. Общие результаты.

Теорема 1.1. *T_1-пространство X, обладающее базой B ранга 1, нормально.*

Доказательство. Пусть множества A_1 и A_2 замкнуты в X и $A_1 \frown A_2 = \vee$. Обозначим B_{A_1} совокупность элементов базы B пересекающихся с A_1 и непересекающихся с A_2 и B_{A_2} — непересекающихся с A_1 и пересекающихся с A_2.

$$B_{A_1} = \{C\colon\ C \in B, A_1 \frown C \neq \wedge, A_2 \frown C = \wedge\},$$
$$B_{A_2} = \{C\colon\ C \in B, A_2 \frown C \neq \wedge, A_1 \frown C = \wedge\}.$$

Совокупность точек пространства X, покрытых системой B_{A_1} обозначим U_1, а покрытых B_{A_2} — обозначим U_2.

Очевидно, $U_1 \supseteq A_1$, $U_2 \supseteq A_2$, U_1 и U_2 открыты в X. Покажем, что $U_1 \frown U_2 = \wedge$. Предположим противное, пусть $x \in U_1 \frown U_2$. Найдутся $C_1 \in B_{A_1}$ и $C_2 \in B_{A_2}$ такие, что $x \in C_1$, $x \in C_2$.

Но тогда $C_1 \frown C_2 \neq \wedge$, а так как $\mathrm{r}B = 1$, то либо $C_1 \subseteq C_2$, либо $C_2 \subseteq C_1$. Пусть, для определенности, $C_1 \subseteq C_2$.

(2) Очевидно, можно было бы изменить соответствующим образом понятие зависимой системы множеств.

Но тогда $C_2 \frown A_1 \neq \wedge$, следовательно $C_2 \notin B_{A_2}$. Пришли к противоречию. Значит $U_1 \frown U_2 \neq \wedge$. Итак, X есть T_4-пространство, а так как оно предположено T_1-пространством, то X нормально, и теорема 1.1 доказана.

Фундаментальную роль во всем дальнейшем изложении будут играть основная и вытекающая из нее большая леммы. Однако чтобы их сформулировать и доказать, нам надо ввести некоторые понятия.

Система множеств называется *вполне зависимой*, если любые ее два элемента зависимы, т. е. один из них содержится в другом.

Максимизацией $n\gamma$ системы множеств γ назовем совокупность всех множеств, представляющихся в виде суммы элементов какой-нибудь вполне зависимой подсистемы системы γ.

Очевидно, $n\gamma \supseteq \gamma$.

Система множеств называется *нётеровской*, или *n-системой*, если $n\gamma = \gamma$. Тривиальный пример нётеровской системы дает система всех подмножеств данного пространства. Ясно, что пересечение любого множества нётеровских систем пространства есть снова нётеровская система. Это дает возможность рассмотреть для произвольной системы множеств γ минимальную нётеровскую систему, ее содержащую. Эта система, мы ее будем обозначать $H(\gamma)$, определяется как пересечение всех нётеровских систем, содержащих систему γ.

Основная лемма. *Все ранги систем γ и $H(\gamma)$ совпадают в каждой точке пространства* (3):

$$\mathrm{r}_x\gamma = \mathrm{r}_x H(\gamma); \quad \mathrm{mr}_x\gamma = \mathrm{mr}_x H(\gamma); \quad \mathrm{br}_x\gamma = \mathrm{br}_x H(\gamma);$$
$$\mathrm{loc\,r}_x\gamma = \mathrm{loc\,r}_x H(\gamma); \quad \mathrm{loc\,mr}_x\gamma = \mathrm{loc\,mr}_x H(\gamma); \quad \mathrm{loc\,br}_x\gamma = \mathrm{loc\,br}_x H(\gamma)$$

Доказательство основной леммы. Мы докажем, что $\mathrm{r}_x\gamma = \mathrm{r}_x H(\gamma)$ при $x \in X$. Остальные равенства доказываются аналогично.

Лемма 1. *Пусть точка x принадлежит множествам $O_1, O_2, \ldots, O_{k+1}$, из которых ни одно не содержится в другом. Пусть $O_i = \bigcup_{\alpha \in M_i} O_i^\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, где системы $\{O_i^\alpha, \alpha \in M_i\}$ вполне зависимы.*

Тогда найдутся множества $O_i^{\alpha_i} \in \{O_i^\alpha, \alpha \in M_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, содержащие точку x и независимые.

Доказательство леммы 1. Докажем это утверждение по индукции по числу n множеств O_i. При $n = 1$ оно очевидно, пусть оно доказано для $n = k$, покажем, что оно справедливо при $n = k+1$.

Можно предположить, что точка x принадлежит всем $O_i^\alpha, \alpha \in M_i$. Для каждого множества O_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ найдётся $\alpha_i' \in M_i$ такое, что $O_i^{\alpha_i'} \frown (X \setminus O_{k+1}) \neq \wedge$.

(3) Здесь и в дальнейшем все утверждения о рангах делаются в дополнительном предположении, что эти ранги определены.

Рассмотрим множества индексов

$$M_i' = \{a\colon\ a \in M_i,\ O_i^a \supseteq O_i^{a_i'}\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k .$$

Очевидно,

$$O_i = \bigcup_{a \in M_i'} O_i^a, \quad 1 \leqslant i \leqslant k .$$

По предположению индукции найдутся индексы $a_i \in M_i'$ такие, что система $O_i^{a_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, независима. Выберем индекс $a_{k+1} \in M_{k+1}$, так чтобы было $O_{k+1}^{a_{k+1}} \cap (X \setminus O_i) \neq \wedge$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Это возможно в силу независимости системы $\{O_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k+1\}$. Легко видеть, что тогда система $\{O_i^{a_i},\ 1 \leqslant i \leqslant k+1\}$ независима. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Максимизация $n\gamma$ произвольной системы множеств γ имеет тот же ранг, что и система γ в каждой точке пространства X.*

Справедливость леммы 2 сразу вытекает из леммы 1.

Вернемся к доказательству основной леммы. Определим трансфинитную последовательность систем множеств $\{\gamma_a\}$ следующим образом: положим $\gamma_0 = \gamma$; пусть γ_a построены для всех $a < \beta$. Положим тогда $\gamma_\beta = n(\bigcup_{a<\beta} \gamma)$.

Так определенная последовательность обладает тем свойством, что

$$\mathrm{r}_x \gamma_a = \mathrm{r}_x \gamma_0 = \mathrm{r}_x \gamma . \tag{I}$$

Действительно, при $a = 0$ это верно. Пусть это доказано для $a < \beta$. Если 1) $\beta = a_0 + 1$, то $\mathrm{r}_x\gamma_\beta = \mathrm{r}_x\gamma_{a_0+1} = \mathrm{r}_x n(\gamma_{a_0}) = \mathrm{r}_x\gamma_{a_0}$ в силу леммы 2. Пусть 2) β — предельное число.

Пусть $\{O_i^a\}$ — произвольная независимая конечная подсистема множеств системы $\bigcup_{a<\beta} \gamma_a$, каждое из которых содержит точку x. В силу ее конечности, найдется индекс a' такой, что $a' < \beta$ и элементы системы $\{O_i^a\}$ содержатся в $\gamma_{a'}$. Но $\mathrm{r}_x\gamma_{a'} \leqslant \mathrm{r}_x\gamma_0$ по предположению индукции. Следовательно, система $\{O_i^a\}$ состоит не более чем из $\mathrm{r}_x\gamma_0$ множеств. Это и означает, что

$$\mathrm{r}_x(\bigcup_{a<\beta} \gamma_a) \leqslant \mathrm{r}_x\gamma_0 .$$

Но

$$\mathrm{r}_x\gamma_\beta = \mathrm{r}_x n(\bigcup_{a<\beta} \gamma_a) = \mathrm{r}_x(\bigcup_{a<\beta} \gamma_a)$$

в силу леммы 2. Свойство (I) доказано (4).

Так как множество всех подмножеств фиксированного пространства имеет ограниченную мощность, а последовательность γ_a — неубывающая, то найдется такой (первый) индекс a_1, что

$$\gamma_{a_1} = \gamma_{a_1+1} .$$

Система γ_{a_1}, в силу определения, нётеровская, и, так как, очевидно $\gamma_{a_1} \subseteq H(\gamma)$, то $\gamma_{a_1} = H(\gamma)$, в силу определения системы $H(\gamma)$.

(4) $\mathrm{r}_x\gamma_0 \geqslant \mathrm{r}_x\gamma_a$ ибо $\gamma_a \supseteq \gamma_0$. Отсюда и из $\mathrm{r}_x\gamma_a \leqslant \mathrm{r}_x\gamma_0$ получаем $\mathrm{r}_x\gamma_0 = \mathrm{r}_x\gamma_a$.

Основная лемма доказана.

Основную лемму дополняет

Лемма 4. *Пусть система γ вписана в точечно-конечную систему ξ. Тогда и система $H(\gamma)$ вписана в ξ.*

Доказательство леммы 4 почти очевидно и мы его оставляем читателю.

Напомним, что элемент системы множеств называется *максимальным*, если он не содержиться ни в каком другом элементе этой системы.

Лемма 5. *Совокупность $\widetilde{H(\gamma)}$ максимальных элементов системы $H(\gamma)$ соответствующей произвольной системе γ, покрывает те же точки пространства, что и система γ, а кратность системы $\widetilde{H(\gamma)}$ в каждой точке пространства не превосходит ранга системы γ в той же точке.*

Доказательство. Первая часть утверждения сразу вытекает из построения системы $H(\gamma)$, проведенного при доказательстве основной леммы. Пусть, далее, x — произвольная точка пространства X, покрытая системой γ, а в силу соотношения $\gamma \subseteq H(\gamma)$, и системой $H(\gamma)$.

Рассмотрим какую-нибудь максимальную вполне зависимую систему ξ элементов $H(\gamma)$, содержащих точку x. Так как $H(\gamma)$ — нётеровская система множеств, то обьединение элементов ξ принадлежит системе $H(\gamma)$ и есть, очевидно, максимальный ее элемент, покрывающий точку x.

Заметим, наконец, что совокупность всех максимальных элементов произвольной системы, содержащих x, независима и потому кратность системы $\widetilde{H(\gamma)}$ в x не превосходит $\mathrm{r}_x H(\gamma) = \mathrm{r}_x\gamma$. Лемма 5 тем самым полностью доказана.

Из нашей серии лемм вытекает нужная для дальнейшего

Большая лемма о ранге. *Пусть система γ открытых множеств пространства X вписана в некоторую точечно-конечную систему η открытых множеств пространства X. Тогда найдется система открытых множеств μ, описанная около γ, вписанная в η, покрывающая в точности ту же часть пространства, что и система γ, и кратность которой в каждой точке пространства X не превосходит ранга системы γ в той же точке.*

Нам также понадобится

Лемма о малом ранге. *Пусть γ и η — открытые покрытия некоторого бикомпакта X, причем γ вписано в η. Найдется тогда открытое покрытие μ бикомпакта X, вписанное в η и кратность которого в каждой точке пространства X не превосходит малого ранга системы γ в той же точке.*

Это утверждение сразу вытекает из основной леммы и из следующего очевидного факта:

Лемма 6. *Из всякого точечно-конечного покрытия γ произвольного пространства можно выбрать такое подпокрытие γ', кратность которого в каждой точке пространства не превосходит малого ранга системы γ в той же точке.*

Действительно, в качестве γ' можно взять любое неприводимое (5) подпокрытие покрытия γ — хорошо известно, что такие существуют (см. [4]).

Теорема 1.2. *Для того, чтобы слабо-паракомпактное пространство X было паракомпактно необходимо и достаточно, чтобы в любое покрытие этого пространства можно было вписать покрытие, распадающееся на счетное множество систем ранга* 1.

Доказательство. Хорошо известны более сильные необходимые условия паракомпактности пространства. Докажем достаточность нашего условия. Но из большой леммы сразу вытекает, что в любое открытое покрытие пространства X можно вписать покрытие, распадающееся на счетное множество систем кратности 1, т. е. σ — дизъюнктное покрытие. Тогда, в силу условия Нагами [5], пространство X паракомпактно.

Теорема 1.3. *Для того, чтобы было* $\dim X < k$, *где* X — *произвольный бикомпакт, необходимо и достаточно, чтобы в любое покрытие пространства* X *можно было вписать такое покрытие* γ, *что* $\operatorname{mr}\gamma \leqslant k$.

Доказательство. Необходимость тривиальна. Достаточность вытекает из леммы о малом ранге.

В общем случае имеет место

Теорема 1.4. (6) *Для того, чтобы было* $\dim X < k$, *где* X — *произвольное пространство, необходимо и достаточно, чтобы в любое покрытие пространства* X *можно было бы вписать покрытие ранга* $\leqslant k$.

Теорема очевидна ввиду леммы о большом ранге.

Теорема 1.5. *Если в пространстве* X *существует база* B *ранга* $\leqslant k$, *то* $\dim X' < k$ *и* $\operatorname{ind} X' < k$ *для произвольного подпространства* X' *пространства* X.

Доказательство. Пусть U — произвольное покрытие пространства X. Обозначим B_u совокупность элементов базы B, содержащихся в элементах покрытия U. Очевидно, $\operatorname{r} B_u \leqslant r B$, так как $B_u \subseteq B$. Далее, B_u — покрытие пространства X, $\operatorname{r} B_u \leqslant k$, вписанное в U. Тогда, в силу теоремы 1.4, $\dim X < k$.

Докажем, по индукции, что $\operatorname{ind} X < k$. В случае $k = 1$, очевидно, $\operatorname{r} B = 1$ и $\operatorname{ind} X = 0$.

Предположим, что наше утверждение доказано в случае $k = n-1$; покажем, что оно верно для $k = n$. Пусть C — произвольный элемент базы B. Рассмотрим $\Phi = [C] \setminus C$ и B_Φ — совокупность всех элементов базы B, не содержащих C. Покажем, что $\operatorname{r}_x B_\Phi \leqslant n-1$, если $x \in \Phi$. Предположим противное.

(5) Покрытие пространства называется *неприводимым*, если оно не содержит никакого меньшего покрытия.

(6) Однако во множестве иррациональных чисел на отрезке можно найти базу ранга 1, из которой нельзя выбрать никакого даже точечно-конечного покрытия этого множества [6].

Пусть $\{C_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ — независимая система множеств, принадлежащих B_Φ и содержащих точку x. Так как $x \in \Phi \subseteq [C]$, то $(\bigcap_{i=1}^{n} C_i) \cap C \neq \wedge$.

Возьмем $y \in C \cap (\bigcap_{i=1}^{n} C_i)$. Легко проверить, что система $\{C, C_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ есть независимая система, состоящая из $n+1$ множеств базы B, содержащих точку y; противоречие с тем, что $\operatorname{r} B \leqslant n$. Значит, $\operatorname{r}_x B_\Phi \leqslant n-1$ при $x \in \Phi$. Но тогда B_Φ высекает на Φ базу ранга $\leqslant n-1$ и, следовательно, в силу предположения индукции $\operatorname{ind}([C] \setminus C) < n-1$.

А это означает, раз B — база пространства X, что $\operatorname{ind} X < n = k$.

Наконец, если $X' \subseteq X$, то $\dim X' < k$ и $\operatorname{ind} X' < k$ ибо база B высекает на X' базу B' ранга $\leqslant \operatorname{r} B \leqslant k$.

Теорема 1.5 полностью доказана.

§ 2. Случаи метрических пространств и бикомпактов.

Теорема 2.1. *Бикомпакт* X, *обладающий базой* B *ранга* 1, *метризуем.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — произвольная счетная строго убывающая последовательность элементов базы B. Так как U_i — замкнутые множества, $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \wedge$.

Пусть $x \in U$. Покажем, что $U = \{x\}$. Предположим противное, пусть $y \in U$, $y \neq x$. Найдется элемент $C \in B$ такой, что $x \notin C$, $y \in C$. Так как $U_i \ni y$, то $U_i \cap C \neq \wedge$. Но $\operatorname{r} B = 1$, значит, либо $U_i \subseteq C$, либо $C \subseteq U_i$. Но $U_i \subseteq C$ невозможно, ибо $x \in U_i$, но $x \notin C$. Итак $U_i \supseteq C$ и, следовательно, $C \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = U$. Тогда можно x и y поменять местами и окончательно получаем, что U — открыто в X.

Но $\{U_i\}$ строго убывающая последовательность множеств, значит можно выбрать так последовательность $\{x_i\}$ точек пространства X, что $x_i \in U_i \setminus U_{i+1}$. Так как U_i — открыто-замкнуты в X, последовательность $\{x_i\}$ дискретна в себе. Пусть z — предельная точка этой последовательности в пространстве X. Так как множества U_i — замкнуты и содержат все точки этой последовательности, кроме быть может, конечного числа их, то $z \in U_i$ и, следовательно, $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = U$. Но U — открыто в X и не содержит точек последовательности $\{x_i\}$, так как $x_i \notin U_{i+1}$. Противоречие с тем, что z предельная точка для последовательности $\{x_i\}$.

Значит, $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Выведем отсюда, что система $\{U_i\}$ образует базу в точке x.

Пусть C_0 — произвольный элемент базы B, содержащий точку x. Тогда $C_0 \cap U_i \neq \wedge$. Так как $\operatorname{r} B = 1$, то либо $C_0 \subseteq U_i$, либо $U_i \subseteq C_0$. Если для всех i соотношение $C_0 \subseteq U_i$ выполнено, то тогда $C_0 = \{x\}$ и точка x — изолированная. Но тогда легко вывести из бикомпактности X, что при некотором i, $\{x\} = U_i$. Если при некотором i_0 $C_0 \nsubseteq U_{i_0}$, то $U_{i_0} \subseteq C_0$, что и требовалось. Итак, мы доказали, что произвольная убывающая система элементов базы B образует базу в некоторой точке бикомпакта X.

Рассмотрим теперь какую-нибудь последовательность $\{W_k\}$ конечных неприводимых покрытий пространства X, состоящих из элементов базы B, таких, что каждое последующее покрытие вписано в предыдущее, и не содержащих одинаковых неодноточечных элементов. В силу доказанного выше, $B' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{W_k\}$ образует базу, очевидно, счетную пространства X. Значит, X метризуемо и теорема 2.1 доказана.

Легко построить пример нормального пространства, обладающего базой ранга 1 и не метризуемого. Возьмем все трансфиниты от первого и до какого-нибудь несчетного включительно. В концевой точке зададим топологию естественным образом с помощью порядка, а в остальных точках пусть пространство дискретно. Это и есть искомое пространство. Заметим, что если в качестве концевого выбран первый несчетный трансфинит, то построенное пространство будет финально-компактно.

Однако, в общем случае нормальных пространств верна

Теорема 2.2. *Для того, чтобы нормальное пространство X было гомеоморфно некоторому метрическому пространству размерности $< k$ необходимо и достаточно, чтобы в X существовали равномерная база* (см. [1]) *и база B такая, что* $\mathrm{br}\, B \leqslant K$.

Необходимость. Метрическое пространство X размерности $< k$ распадается в сумму k нульмерных своих подмножеств: $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ — это хорошо известный результата Катетова. В каждом пространстве X_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, существует последовательность $\{\varphi_i^l\}$ открытых в X_i покрытий кратности 1, вписанных друг в друга и обазующих, в совокупности, базу пространства X_i.

В силу леммы Ю. М. Смирнова [3], эти покрытия могут быть продолжены в системы $\{\widetilde{\varphi}_i^l\}$ кратности 1 открытых в X множеств, покрывающих попрежнему X_i. При этом можно добиться, чтобы в последовательности $\{\widetilde{\varphi}_i^l\}$ каждая последующая система была вписана в предыдущую и чтобы в совокупности системы $\{\widetilde{\varphi}_i^l\}$ образовывали базу пространства X в точках пространства X_i. Положим $B_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} \widetilde{\varphi}_i^l$. Очевидно $\mathrm{r}\, B_i = 1$. Тогда, если $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$, то $\mathrm{br}\, B \leqslant k$ и B — база пространства X. Существование равномерной базы в метрическом пространстве легко вытекает из паракомпактности метрических пространств. Это, в частности, доказано в [1].

Достаточность. Известно, что всякое пространство, обладающее равномерной базой, слабопаракомпактно ([1], [6]). Тогда из наличия в X базы B такой, что $\mathrm{br}\, B \leqslant k$, в силу теоремы 1.2, вытекает, что X паракомпактно. А тогда, в силу теоремы П. С. Александрова [1], X метризуемо. Теорема 2.2 доказана.

Близкий, но не совпадающий с теоремой 2.2 результат доказан в [2], теорема 1.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы компакт* ([7]) *имел размерность $< k$ необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала база B такая, что* $\mathrm{mr}\, B \leqslant k$.

Необходимость этой теоремы легко вытекает из теоремы 2.2, а достаточность очевидна ввиду теоремы 1.3.

Мне не известно, верно ли аналогичное утверждение в случае произвольных метрических пространств.

Теорема 2.4. *Для того, чтобы размерность метрического пространства была меньше k необходимо и достаточно, чтобы в X существовала база B такая, что* $\mathrm{locr}\, B \leqslant k$.

Как следует из теоремы 2.2, в любом метрическом пространстве размерности $< k$ существует база B такая, что $\mathrm{r}\, B \leqslant k$ и подавно $\mathrm{locr}\, B \leqslant k$. Докажем достаточность теоремы 2.4.

Пусть база B метрического пространства X такова, что $\mathrm{locr}\, B \leqslant k$.

Рассмотрим $H(B)$ — минимальную нетеровскую систему множеств содержащую систему множеств B.

В силу основной леммы $\mathrm{locr}\, H(B) = \mathrm{locr}\, B$. Определим последовательность открытых $\{\gamma_k\}$ покрытий пространства X так, чтобы при $k > 1$ были выполнены следующие условия.

1) $\gamma_k \subseteq H(B)$,

2) элементы γ_k попарно независимы,

3) элементы γ_k имеют диаметр $\leqslant 1/k$,

4) γ_k звездно вписано в γ_{k-1}.

В качестве γ_1 возьмем произвольное покрытие пространства X. Пусть уже построена система γ_k. Чтобы определить систему γ_{k+1} рассмотрим какое-нибудь локально-конечное открытое покрытие λ_{k+1} пространства X элементами диаметра $\leqslant 1/(k+1)$ звездно вписанное в γ_k. Такое λ_{k+1} существует в силу паракомпактности пространства X. Обозначим $H(B)_{\lambda_{k+1}}$ совокупность элементов базы $H(B)$, содержащихся в λ_{k+1} и γ_{k+1} — совокупность максимальных элементов системы $H(B)_{\lambda_{k+1}}$. Из леммы 5 вытекает ([8]), что система γ_{k+1} образует открытое покрытие пространства X элементами диаметра $\leqslant 1/(k+1)$.

Из леммы 4 следует, что γ_{k+1} вписана в λ_{k+1} и, значит, звездно вписана в γ_k.

([7]) *Компактом* мы называем метризуемый бикомпакт.

([8]) Ибо, очевидно, $H(B)_{\lambda_{k+1}}$ — нётеровская система.

Покажем, что в каждой точке пространства X кратность всех систем γ_i, за исключением, быть может, конечного числа их, не превосходит k. Действительно, пусть x — произвольная точка пространства X. Найдется, в силу $\operatorname{locr}_x H(B) \leqslant k$, окрестность Ox этой точки такая, что любые $k+1$ элементы базы $H(B)$, содержащие точку x и лежащие в Ox, зависимы. Пусть i_0 таково, что $1/i_0 < \varrho(x, X \setminus Ox)$. Тогда для $j > i_0$ имеем: если $g \in \gamma_j$ и $g \ni x$, то $g \subseteq Ox$. Это означает, что любые $k+1$ элементы системы γ_j, содержащие точку x, зависимы при $j > i_0$. Но раз они все — максимальные, т. е. ни один из них не содержится в другом, то получаем, что при $j > i_0$ число элементов системы γ_j, содержащих точку x, не превосходит k. Так как последовательность $\{\gamma_i\}$ обладает еще и свойствами 1)-4), то, в силу одной теоремы Nagami [7], размерность пространства X не превосходит $k-1$. Теорема 2.4 доказана (9).

§ 3. Слабо-счетномерные и счетномерные пространства.

Интересно, что теорема 2.2 обобщается на случай слабосчетномерных пространств и счетно-мерных пространств, а теорема 2.4 — только на случай счетномерных.

Если подходить с формальной точки зрения, можно было бы ожидать, что метрическое пространство будет счетномерным, если оно обладает базой распадающейся на счетное множество систем ранга 1. Однако хорошо известно, что такая база существует в любом метрическом пространстве (σ — дизъюнктная база).

Тем не менее имеет место

Теорема 3.1. *Для того, чтобы метрическое пространство было счетномерным необходимо и достаточно, чтобы в X существовала база B, распадающаяся на счетное множество подсистем B_i ранга 1 так, что в каждой точке пространства какая-нибудь из этих подсистем образует базу.*

Замечу сразу, что последнее условие тем естественнее, что, когда B распадается на конечное число систем B_i, оно автоматически выполняется.

Доказательство теоремы 3.1. Вся нетривиальная часть теоремы 3.1 содержится в теореме 2.2. Действительно, если обозначить X_i множество тех точек пространства X, в которых система B_i образует базу, то получим: 1) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$; 2) Система B_i высекает на X_i базу ранга 1. Из теоремы 2.2 тогда следует, что $\dim X_i = 0$, чем теорема 3.1 доказана, ибо необходимость ее аналогична доказательству необходимости теоремы 2.2.

В связи с классификацией метрических пространств по мощности множества нульмерных слагаемых, на которые оно может быть разбито, интересна

(9) Теоремы 2.2 и 2.4 усиливают в обе стороны следующий результат Нагата: метрическое пространство имеет размерность $< k$ тогда и только тогда, когда в X существует база ранга $< k$.

Теорема 3.2. *Всякое метрическое пространство может быть покрыто множеством мощности $\leqslant c$ своих замкнутых нульмерных подпространств.*

Доказательство. Пусть $\{\sigma_i\}$, где индекс i проблегает все числа натурального ряда, есть последовательность открытых покрытий пространства X такая, что 1) все элементы покрытия σ_i имеют диаметр $< 1/i$; 2) каждое покрытие σ_i распадается на счетное число дискретных систем: $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_i^k$, где каждая система σ_i^k — дискретна.

Пусть $\{n_j, k_j\}$ — произвольная упорядоченная пара последовательностей натуральных чисел такая, что $\lim_{j\to\infty} n_j = \infty$. Поставим тогда в соответствие паре $\{n_j, k_j\}$ некоторое пространство $X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}}$. Для этого построим соответствующую паре $\{n_j, k_j\}$ последовательность систем множеств $\{\widetilde{\sigma}_j\}$ следующим образом. Положим $\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_{n_1}^{k_1}$. Пусть у нас определена система множеств $\widetilde{\sigma}_l$. Определим тогда систему $\widetilde{\sigma}_{l+1}$ как совокупность всех тех множеств системы $\sigma_{n_{l+1}}^{k_{l+1}}$, каждое из которых содержится с замыканием в каком-нибудь элементе системы $\widetilde{\sigma}_l$. Множество точек пространства X, покрытых элементами системы $\widetilde{\sigma}_j$ обозначим. C_j. Легко видеть, что $[C_{j_1}] \leqslant \subseteq C_{j_2}$ при $j_2 < j_1$. Тогда $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} [C_j]$. Положим $X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$. Множество $X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}}$ замкнуто в X и легко проверить, что последовательность σ_j высекает на $X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}}$ счетную последовательность открытых дискретных покрытий пространства $X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}}$, каждое из которых с замыканием вписано в предыдущее. Наконец диаметр элементов этих покрытий равномерно относительно номера покрытия стремится к нулю, в силу условия $\lim_{j\to\infty} n = \infty$ и предположений относительно последовательности $\{\sigma_i\}$. В силу теоремы Даукера ([8] теорема 1) $\dim X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}} = 0$.

Покажем, что для произвольной точки $x \in X$ найдется пара последовательностей $\{n_j, k_j\}$, где $\lim n = \infty$ и такая, что $x \in X_{\{n_j\}}^{\{k_j\}}$. Так как множество всех различных упорядоченных пар последовательностей натуральных чисел имеет мощность $\leqslant c$, то тем самым теорема 3.2 будет доказана.

Итак, пусть x — произвольная точка пространства X. Положим $n_1 = 1$, а k_1 выберем так, чтобы система $\sigma_1^{k_1}$ покрывала точку x. Это возможно так как $\sigma_1 = \bigcup_i \sigma_1^i$ и σ_1 покрывает пространство X и, значит, точку x. Тогда и система $\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_1^{k_1}$ будет покрывать точку x. Пусть у нас уже определены l-ые члены последовательностей n_l и k_l, причем так что существует элемент $g \in \widetilde{\sigma}_l$, содержащий точку x. Выберем тогда натуральное число n_{l+1} так, чтобы было

$$\frac{1}{n_{l+1}} < \min\left(\frac{\varrho(x, X \setminus g)}{2}, \frac{1}{l}\right).$$

В качестве k_{l+1}, после того как уже выбрано n_{l+1}, возьмем любое такое (натуральное) число, что система $\sigma_{n_{l+1}}^{k_{l+1}}$ покрывает точку x. Очевидно, что и $\widetilde{\sigma}_{l+1}$ тогда покрывает точку x. Следовательно, $x \in C_j$, $1 \leqslant j < \infty$ и, наконец, $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = X_{\{n_j\}}^{\{kj\}}$ причем $\lim_{j\to\infty} n_j = \infty$. Теорема 3.8 доказана.

Предположим теперь, что $\aleph_1 = c$.

Из теоремы 3.2. вытекает, что с точки зрения мощности множества нульмерных слагаемых, на которые распадается пространство, существует лишь три типа метрических пространств: конечномерные, счетномерные и континуальномерные. На это обстоятельство обратил мое внимание Л. А. Тумаркин.

Если же классифицировать пространства по мощности множества нульмерных замкнутых слагаемых, на которые они распадаются, то существует лишь два типа метрических пространств: нульмерные и континуальномерные.

Наконец, из теоремы 3.2 вытекает

Теорема 3.3 (10). *Пусть X — произвольное метрическое пространство. Существует упорядоченная по первому несчетному порядковому типу ω_1 возрастающая последовательность $\{X_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ подпространств размерности нуль пространства X, дающая в сумме все пространство*: $X_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X$; $X_{\alpha'} \subseteq X_{\alpha''}$ *при* $\alpha' < \alpha''$; $\dim X_\alpha = 0$, $\quad \alpha < \omega_1$.

Для доказательства теоремы 3.3 достаточно упорядочить по типу ω_1 множество замкнутых нульмерных пространств $X_{\{n_j\}}^{\{kj\}}$, на которое мы разбили пространство X в теореме 3.2. Если $\aleph_1 = c$, то это можно сделать. В качестве X_α возьмем теперь сумму (счетного) множества пространств $X_{\{n_j\}}^{\{kj\}}$, получивших при нашем упорядочении номер $\leqslant \alpha$. Хорошо известно, что тогда $\dim X = 0$. Требуемая последовательность построена и тем самым теорема 3.3 доказана.

Вернемся к слабо-счетномерным и счетномерным пространствам.

Теорема 3.4. *В метрическом пространстве X следующие условия эквивалентны*:

1) *X слабо-счетномерно, то-есть* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, *где X_i замкнуты в X и конечномерны.*

2) *В X существует измельчающаяся последовательность локально-конечных покрытий $\{\omega_k\}$ такая, что при $j > i$ покрытие ω_j вписано с замыканием в покрытие ω_i и* $\sup_i \operatorname{order}_x \omega_i < \infty$ *при* $x \in X$.

3) *В X существует база B, распадающаяся в сумму* $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ *счетного множества своих подсистем ранга 1 так, что их тела образуют точечно-конечное покрытие пространства.*

(10) Ю. М. Смирнов, ознакомившись с настоящим результатом, заметил, что ему известно доказательство этого утверждения без предположения, что $\aleph_1 = c$.

4) *В X существует база B такая, что* $\mathrm{r}_x B < \infty$ *при* $x \in X$.

5) *В X существует база B такая, что* $\operatorname{locr}_x B < \infty$ *при* $x \in X$.

Эквивалентность условий 1), 4) и 5) означает ответ на вопрос Нагата: „во всяком ли метрическом пространстве существует база точечно-конечного ранга?"

Доказательство. Отношение 2)$\to$1) почти очевидно. Действительно, положим $X_k = \{x\colon \sup_i \operatorname{order}_x \omega_i \leqslant k\}, 1 \leqslant k < \infty$.

Легко видеть, что X_k замкнуто в X. В силу известного результата Даукера [8] из свойств последовательности $\{\omega_i^k\}$ высекаемой на X_k последовательностью $\{\omega_i\}$, вытекает, что X_k конечномерно (и $\dim X_k < k$). Очевидно, $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, чем следование 2)$\to$1) доказано.

Отношения 3)$\to$4)$\to$5) — прямые следствия определений.

Покажем, что 1)$\to$3). Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где X_k — замкнуты в X и конечномерны. Так как X — метрическое пространство, то можно произвольное X_k представить в виде суммы конечного числа нульмерных подпространств: $X_k = \bigcup_{i=1}^{l_k} X_k^i$.

Для каждого X_k^i можно построить, как показано в доказательстве теоремы 2.2., систему ранга 1 открытых в X множеств B_k^i, образующую базу пространства X в точках пространства X_i. Обозначим тогда при каждом k через $\widetilde{B}_k^i$ систему множеств высекаемую системой B_k^i на множестве $X \setminus X_{k-1}$. Очевидно, если $x \in X_{k-1}$, то при $k' > k-1$ и любом i, $1 \leqslant i \leqslant l_{k'}$, точка x не покрывается ни одним элементом системы $\widetilde{B}_k^i$. Это означает, что тела (то-есть объединения элементов) систем $\widetilde{B}_k^i$ образуют точечно-конечное покрытие пространства X. Очевидно, $\mathrm{r}\widetilde{B}_k^i = 1$ и система $\widetilde{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{l_k} \widetilde{B}_k^i)$. образует базу пространства X. Следование 1)$\to$3) доказано.

Докажем, что из 5) следует 1).

Построения и рассуждения, в точности аналогичные проведенным в доказательстве теоремы 2.4, показывают, что в произвольном метрическом пространстве X, обладащем базой B, для которой $\operatorname{locr}_x B \leqslant k$ при любом $x \in X$, существует измельчающаяся (11) последовательность $\{\gamma_i\}$ звездно-вписанных друг в друга открытых покрытий, образующих в совокупности базу пространства X и такая, что

$$\sup_i \operatorname{order}_x \gamma_i < \infty.$$

(11) Последовательность покрытий $\{\gamma_i\}$ называется измельчающейся, если для любой точки x пространства X найдутся окрестность Ox этой точки в X и номер n, зависящий от x и Ox такие, что звезда точки x относительно покрытия γ_n содержится в Ox.

По теореме Нагата [9], пространство X — слабо-счетномерно, и отношение $5) \to 1)$ доказано. Из доказанных отношений вытекает, что условия 1), 3), 4), 5) в метрическом пространстве эквивалентны.

Теорема 3.4 доказана за единственным исключением отношения $1) \to 2)$, которое будет вытекать из теоремы 3.7.

Для компактов имеет место частичное усиление теоремы 3.4.

Теорема 3.5. *Для того, чтобы компакт X был слабосчетномерен необходимо и достаточно, чтобы в X существовала база B такая, что $\mathrm{mr}_x B < \infty$ при $x \in X$.*

Доказывается теорема 3.5 также, как отношение $5) \to 1)$ в теореме 3.4, построением соответствующей последовательности покрытий $\{\gamma_i\}$, с тем лишь дополнением, что покрытия γ_i выбираются неприводимыми — это возможно, ибо хорошо известно, что из всякого конечного (и даже точечно-конечного) покрытия можно выбрать неприводимое.

Теорема 3.4 позволяет нам получить следующий результат:

Теорема 3.6. *Метрическое пространство, являющееся открытым, непрерывным и конечнократным образом счетномерного метрического пространства, само счетномерно.*

Доказательство. Пусть B — база пространства X, большой ранг которой равен $\aleph_0$, то-есть $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, где $\mathrm{br}\, B_i = 1$ при $1 \leqslant i < \infty$. При каждом i положим $P_i = fB_i$. Покажем, что система P_i имеет точечно-конечный ранг. Пусть y — произвольная точка пространства y. Рассмотрим множество $f_i^{-1} y = X_i \cap f^{-1} y$. В силу конечной кратности отображения f множество $f^{-1} y$ конечно: $f_i^{-1} y = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$. Пусть, наконец, $\{V_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant l$ — какая-нибудь независимая подсистема системы множеств P_i, каждый элемент которой содержит точку y. Так как $P_i = fB_i$, то найдутся множества $U_r \in B_i$, $1 \leqslant r \leqslant l$, такие, что $fU_r = V_r$. Раз система B_i имеет ранг 1, а множества V_r независимы, то $U_{r_1} \cap U_{r_2} = \wedge$ при $1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant l$. Но $U_r \cap f^{-1} y \neq \wedge$, откуда следует, что число l множеств U_r и, следовательно, число множеств V_r не превосходит числа k точек множества $f_i^{-1} y$: $l \leqslant k$. Но у нас система $\{V_r\}$ — произвольная независимая система множеств принадлежащих системе P_i и содержащих точку y, тем самым доказано, что $\mathrm{r}_y P_i \leqslant k$.

Положим теперь $Y_i = fX_i$. Система P_i образует, в силу открытости и непрерывности отображения f, базу пространства Y_i в Y. В силу теоремы 3.4 пространство Y_i распадается в сумму счетного числа своих замкнутых конечнократных подпространств и, раз Y_i — метрическое, в сумму счетного числа своих нульмерных подпространств. Но это верно при каждом i, а так как $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$, то Y есть сумма счетного множества своих нульмерных подпространств. Теорема 3.6 доказана.

Оказывается, верна аналогичная теореме 3.6 теорема для слабо-счетномерных пространств. Для доказательства ее нам удобно будет воспользо- некоторыми понятиями, которые мы теперь и сформулируем.

Пусть η — покрытие пространства X. Поставим в соответствие каждой точке x пространства X целое число, равное кратности покрытия в этой точке. Полученную функцию назовем функцией кратности покрытия η и обозначим $\varphi_\eta(x)$.

Скажем, что функция $\varphi(x)$, определенная на X, (и принимающая лишь конечные значения) ограничивает размерность пространства X, если для любого (в случае паракомпактных пространств естественно рассматривать любые покрытия, в случае нормальных — конечные) покрытия ξ этого пространства найдется вписанное в ξ покрытие η такое, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in X$.

Отметим сразу, что

1) Если функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X, то сужение $\varphi(x)$ на любое замкнутое подмножество F пространства X ограничивает размерность пространства F.

2) Если на пространстве X существует ограниченная функция, ограничивающая размерность пространства X, то X — конечномерно. Очевидно, верно и обратное.

Теорема 3.7. *Для того, чтобы нормальное топологическое пространство X было слабо-счетномерно необходимо и достаточно, чтобы существовала функция, ограничивающая размерность этого пространства.*

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство X есть сумма счетного числа своих замкнутых конечномерных подпространств: $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Можно предположить без ограничения общности, что $X_i \subseteq X_j$ при $i \leqslant j$.

Положим

$$\varphi(x) = \sum_i (\dim X_i + 1), \quad i:\ i \leqslant j, \quad j:\ X_j \ni x,\ X_{j-1} \not\ni x,$$

или, если $k_1(x) = \min k$, k: $X_k \ni x$, то

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k_1(x)} \dim X_i + k_1(x).$$

Докажем, что функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X. Пусть ξ — произвольное конечное открытое покрытие пространства X; построим покрытие η, вписанное в ξ следующим образом.

Рассмотрим какую-нибудь систему $\widetilde{\eta}_k$ открытых в X множеств вписанную в ξ, покрывающую множество X_k и такую, что кратность ее ни в одной точке пространства X не превосходит $n_k = \dim X_k + 1$ (12).

(12) Легко построить такую систему $\widetilde{\eta}_k$. Пусть $\varphi_k = \{F_i\}$ конечное покрытие пространства X_k замкнутыми в X_k множествами, вписанное в ξ и порядок которого не

Наконец, обозначим η_k совокупность пересечений всех элементов системы $\widetilde{\eta}_k$ с открытым в X множеством $X \setminus X_{k-1}$.

Теперь положим $\eta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \eta_k$. Система η образует покрытие X, вписанное в ξ. Покажем, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$, $x \in X$. Пусть x — произвольная точка пространства X. По определению $k_1(x)$, непременно $x \in X_{k_1(x)}$. Но это означает, в силу построения систем η_k, что x не принадлежит никакому элементу никакой системы η_k, номер которой $k > k_1(x)$. Но при каждом $k \leqslant k_1(x)$ точка x может содержаться не более чем в $n_k = \dim X_k + 1$ элементах системы η_k, и, окончательно, не более чем в

$$\sum_{i=1}^{k_1(x)} (\dim X_i + 1) = \sum_{i=1}^{k_1(x)} \dim X_i + k_1(x) = \varphi(x)$$

элементах системы η, т. е., $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$, чем необходимость теоремы 3.7 доказана.

Замечание к доказательству необходимости теоремы 3.7. Если пространство X паракомпактно, то не только в конечное, но и в любое открытое покрытие ξ пространства X можно вписать такое покрытие η, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$. Для доказательства этого построение систем η_k, проведенное выше, надо несколько видоизменить. Именно, обозначим η_k^1 покрытие пространства X_k, вписанное в ξ и распадающееся в $n_k = \dim X_k + 1$ дискретных систем (такое существует в силу паракомпактности пространства X_k). В силу замкнутости X_k и паракомпактности пространства X систему η_k^1 можно продолжить в систему $\widetilde{\eta}_k$ открытых уже в X множеств, по-прежнему распадающуюся в $n_k = \dim X_k + 1$ дискретных систем и вписанную в ξ. Наконец, η_k мы обозначим совокупность всех пересечений элементов системы $\widetilde{\eta}_k$ с открытым в X множеством $X \setminus X_{k-1}$. Аналогично тому, как это делалось выше, легко показать, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$ где $\eta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \eta_k$ и покрытие η, очевидно, вписано в ξ.

Доказательство достаточности теоремы 3.7.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена на пространстве X, принимает действительные значения и ограничена снизу. Пусть, при каждом $x \in X$, k_x есть множество всех чисел K обладающих тем свойством, что при каждом $\varepsilon > 0$ в произвольной окрестности $\mathrm{O}x$ точки x найдется точка y такая,*

превосходит $\dim X_k + 1$. Так как X_k замкнуто в X, а $F_i \in \varphi_k$ замкнуты в X_k, то F_i замкнуты в X. Так как X нормально, найдется система $\widetilde{\varphi}_k = \{U_i\}$ открытых в X множеств такая, что $U_i \supseteq F_i$ и $\operatorname{order} \widetilde{\varphi}_k \leqslant \operatorname{order} \varphi_k$. А раз система φ_k вписана в ξ можно, очевидно, дополнительно потребовать, чтобы система $\widetilde{\varphi}_k$ также была вписана в ξ. Положим тогда $\widetilde{\eta}_k = \widetilde{\varphi}_k$.

что $\varphi(y) < k + \varepsilon$. Положим $\widetilde{\varphi}(x) = \inf k_x$. Тогда утверждается, что функция $\widetilde{\varphi}$ полунепрерывна сверху, т. е. если множество M таково, что $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant n_0$ при $x \in M$, то $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant n_0$ и для $x \in [M]_X$.

Доказательство леммы 3.1. Множество k_x при любом $x \in X$ не пусто. Действительно, $k_x \ni \varphi(x)$. Множество k_x ограничено снизу (той же константой, что и вся функция $\varphi(x)$). Отсюда следует, что функция $\widetilde{\varphi}(x)$ определена на всем X. Полезно, наконец, отметить, что $\widetilde{\varphi}(x) = \inf k_x \in k_x$. Предположим теперь противное утверждению леммы. Пусть множество M_1, константа K_1, точка x_1 и положительное число ε_1 таковы, что (1) $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant K_1$ при $x \in M_1$; (2) $x_1 \in [M_1]_X$; (3) $\widetilde{\varphi}(x) > K_1 + \varepsilon_1$.

Из предположения (2) следует, что в произвольной окрестности $\mathrm{O}x_1$ точки x_1 найдется точка y_0 такая, что $\widetilde{\varphi}(y_0) \leqslant K_1$. В силу определения функции $\widetilde{\varphi}(x)$, в той же окрестности $\mathrm{O}x_1$ точки y_0 найдется такая точка y_1, что $\varphi(y_1) < K_1 + \varepsilon_1$. Это доказывает, что число $(K_1 + \varepsilon_1)$ принадлежит множеству K_{x_1}; но $\widetilde{\varphi}(x_1) > K_1 + \varepsilon_1$ (пункт 3) и, значит $\widetilde{\varphi}(x_1) \neq \inf K_{x_1}$ — пришли к противоречию с определением функции $\widetilde{\varphi}(x)$, что и доказывает, что соотношения (1), (2) и (3) не могут быть выполнены одновременно, т. е. что утверждение леммы справедливо.

Лемма 3.2. *Если функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X, то и функция $\widetilde{\varphi}(x)$, определенная в формулировке леммы 1, также ограничивает размерность пространства X.*

Доказательство. Пусть ξ — произвольное открытое покрытие пространства X и η — такое вписанное в него открытое покрытие, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$, $x \in X$.

Докажем, что $\varphi_\eta(x) \leqslant \widetilde{\varphi}(x)$. Предположим противное, пусть в некоторой точке $x_1 \in X$, $\varphi_\eta(x_1) > \widetilde{\varphi}(x_1) + \varepsilon_1$ при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Заметим, что так как $\varphi(x)$ — функция кратности покрытия η, то найдется окрестность $\mathrm{O}x_1$ точки x_1 такая, что $\varphi_\eta(y) \geqslant \varphi_\eta(x_1)$ при любом y из $\mathrm{O}x_1$. С другой стороны, в силу определения функции $\widetilde{\varphi}(x)$, в этой окрестности $\mathrm{O}x_1$ найдется точка y_1 такая, что $\varphi(y_1) < \widetilde{\varphi}(x_1) + \varepsilon_1$ и, значит, в силу сделанного выше предположения, такая, что $\varphi(y_1) < \varphi_\eta(x_1)$. Но $\varphi_\eta(y_1) \geqslant \varphi_\eta(x_1)$. Следовательно, $\varphi(y_1) < < \varphi_\eta(y_1)$ — пришли к противоречию с тем, что функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X. Это и доказывает лемму.

Пусть функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X. Рассмотрим функцию $\widetilde{\varphi}(x)$, определенную в леммах 3.1 и 3.2. Функция $\widetilde{\varphi}(x)$ попрежнему ограничивает размерность X. При каждом целом $k > 0$ пусть $F_k = \{x \in X,\ x\colon \widetilde{\varphi}(x) \leqslant K\}$. В силу леммы 1 множества F_k замкнуты в X. Замкнутость множества F_k означает, что функции $\widetilde{\varphi}(x)$, рассматриваемая на F_k, ограничивает размерность пространства F_k. Наконец, раз функция $\widetilde{\varphi}(x)$ сама ограничена на F_k числом k, то и размерность пространства F_k не превосходит k. Так как $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, то теорема полностью доказана.

Замечание. Из теоремы 3.6 и предыдущего замечания вытекает, что если пространство X паракомпактно и функция $\varphi(x)$ определенная на X такова, что для любого конечного покрытия ξ найдется вписанное в ξ покрытие η, для которого $\varphi_\eta(x) \leqslant \varphi(x)$, то такое покрытие η найдется и для произвольного бесконечного покрытия ξ пространства X.

Теорема 3.8. *При открытом конечнократном непрерывном отображении (нормального пространства на нормальное) слабо-счетномерное пространство переходит в слабо-счетномерное.*

Доказательство. Пусть $f(X) = Y$, где непрерывное отображение f — открытое и конечнократное; пусть функция $\varphi(x)$ ограничивает размерность пространства X. Положим, при каждом $y \in Y$, $\psi(y) = \sum \varphi(x)$: $x \in X$, $f(x) = y$. Так как отображение f — конечнократное, функция $\psi(y)$ определена таким образом на всем пространстве Y. Покажем, что $\psi(y)$ ограничивает размерность Y.

Пусть ξ — произвольное (конечное) открытое покрытие пространства Y. Система $\overline{\xi} = f^{-1}\xi$ есть, очевидно, (конечное) открытое покрытие пространства X. Пусть $\overline{\eta}$ — такое вписанное в ξ открытое пространства X, что $\varphi_{\overline{\eta}}(x) \leqslant \varphi(x)$ при любом $x \in X$. Покрытие $\eta = f\overline{\eta}$ пространства Y в силу открытости отображения f — открытое и, так как $\overline{\eta}$ вписано в $\overline{\xi} = f^{-1}\xi$, то покрытие η вписано в ξ. Проверим, что $\varphi_\eta(y) \leqslant \psi(y)$ при любом $y \in Y$. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$, произвольный элемент C покрытия η, ее содержащий, и все прообразы точки y в пространстве X: $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Наконец, обозначим $\overline{\eta}_y$ совокупность всех элементов покрытия $\overline{\eta}$, содержащих по-крайней мере одну из точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Число элементов n_y системы $\overline{\eta}_y$ меньше или равно $\sum_{i=1}^{k} \varphi_{\overline{\eta}}(x_i)$. Так как $\varphi_{\overline{\eta}}(x_i) \leqslant \varphi(x_i)$, то $n_y \leqslant \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i)$. Но правая часть последнего неравенства по определению равна значению функции $\psi(y)$ в точке y. Итак $n_y \leqslant \psi(y)$. Но, очевидно; каждый элемент покрытия η, содержащий точку y, является образом некоторого элемента системы $\overline{\eta}_y$ и потому кратность системы η в точке y не превосходит числа элементов системы $\overline{\eta}_y$ т. е. $\varphi_\eta(y) \leqslant n_y \leqslant \psi(y)$ или $\varphi_\eta(y) \leqslant \psi(y)$. Так как это верно при произвольном $y \in Y$, теорема 3.8 полностью доказана.

Следствие 3.1. *Нормальное (метрическое) пространство, являющееся точечно-конечной суммой открытых слабо-счетномерных (счетномерных) пространств само, слабо-счетномерно (счетномерно).*

В заключение я ходу поблагодарить академика П. С. Александрова за внимание к работе.

Цитированная литература

[1] П. Александров, *О метризации топологических пространств*, Бюллетень Польской Академии Наук, Сер, мат. астр. и физ. 8 (1960), стр. 135.

[2] А. Архангельский, *О размерности и метризуемости топологических пространств*, Печатается в Вестнике МГУ.

[3] Ю. М. Смирнов, *О сильно паракомпактных пространствах*, Известия Академии Наук СССР, сер. матем., 202, № 2, (1956), стр. 253-274.

[4] J. Kelley, *General topology*, New York 1955.

[5] K. Nagami, *Paracompactness and strong screenability*, Nagoya Math. J. 8 (1955), стр. 83-88.

[6] А. Архангельский, *О метризации топологических пространств*, Бюллетень Польской Академии наук, Сер. мат. астр. и физ., 8 (1960), стр. 589-595.

[7] K. Nagami, *Note on metrizability and n-dimensionality*, Proc. Japan Acad. 36. 9 (1960), стр. 565-570.

[8] C. H. Dowker, *Dimension of metric spaces*, Fund. Math. 43 (1956), стр. 83-87.

[9] J. Nagata, *On the countable sum of zero-dimensional metric spaces*, Fund. Math. 48 (1960), стр. 1-14.

Reçu par la Rédaction le 19. 2. 1962