Sur une transformation d'une fonction mesurable en une fonction sommable

par

T. Świątkowski (Łódź)

Introduction. C. Ryll-Nardzewski a remarqué que, pour toute fonction f mesurable et presque partout finie dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$, il existe une homéomorphie φ de cet intervalle en lui-même telle que la fonction soit transformée en une fonction sommable, en entendant par ce terme l'existence de l'intégrale finie

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,dt .$$

Dans le même ordre d'idées C. Ryll-Nardzewski a posé la question si les fonctions de deux ou de plusieurs variables jouissent d'une propriété analogue. On trouvera dans ce travail une réponse positive à cette question (voir le théorème 1) et, ce qui plus est, nous y prouvons qu'il existe une telle homéomorphie de l'ensemble respectif où la fonction est transformée en une fonction de α-ième puissance sommable, pour tout $\alpha > 0$. La démonstration dans le cas de la fonction d'une variable, que je présente dans ce travail, ne diffère pas essentiellement de celle qui a été donnée, sans avoir été publiée, par M. Ryll-Nardzewski.

On trouvera, à la fin du travail, des remarques et des résultats concernant le cas où la fonction f prend des valeurs infinies sur un ensemble de mesure positive.

Résultats préliminaires. Nous commencerons par prouver deux lemmes qui peuvent être considérés comme des généralisations du théorème de Tietze ([3] ou [2], p. 117) sur le prolongement des fonctions continues.

LEMME 1. *Supposons donné un espace métrique H et dans cet espace un ensemble fermé F. Soient f_1, f_2 deux fonctions réelles, continues dans H et telles que*

(1) $$f_1(p) < f_2(p) \quad \textit{pour} \quad p \in H .$$

Désignons par f une fonction réelle et continue sur F et telle que

(2) $$f_1(p) \leqslant f(p) \leqslant f_2(p) \quad \textit{pour} \quad p \in F .$$

Sous ces hypothèses il existe une fonction f^*, réelle et continue sur H, telle que

$$f^*(p) = f(p) \quad \textit{pour} \quad p \in F \tag{3}$$

et

$$f_1(p) < f^*(p) < f_2(p) \quad \textit{pour} \quad p \in H-F\,. \tag{4}$$

Démonstration. Posons

$$\varphi(p) = \frac{2f(p)-f_1(p)-f_2(p)}{f_2(p)-f_1(p)} \quad \text{pour} \quad p \in F\,. \tag{5}$$

Il est évident que la fonction (5) est continue sur F et y satisfait à l'inégalité $|\varphi(p)| \leqslant 1$. En vertu du théorème de Tietze il existe une fonction φ^* continue sur H et telle que $\varphi^*(p) = \varphi(p)$ pour $p \in F$ et $|\varphi^*(p)| < 1$ pour $p \in H-F$. Par conséquent la fonction f^* qui satisfait à l'équation

$$\varphi^*(p) = \frac{2f^*(p)-f_1(p)-f_2(p)}{f_2(p)-f_1(p)} \quad \text{pour} \quad p \in H \tag{6}$$

est précisément la fonction ayant les propriétés requises (3) et (4).

LEMME 2. *Soit donné un espace métrique H et un ensemble fermé F dans cet espace. Désignons par $\Phi(p,t)$, où $p \in F$, $a \leqslant t \leqslant b$, une fonction continue prenant des valeurs réelles telle que, pour $p \in F$ fixé, $\Phi(p,t)$ soit une fonction strictement croissante par rapport à la variable t et que $\Phi(p,a)$ $=$ const, $\Phi(p,b) =$ const pour $p \in F$. Posons $\alpha = \Phi(p,a)$ et $\beta = \Phi(p,b)$.*

Sous ces hypothèses il existe une fonction $\Phi^*(p,t)$ continue pour $p \in H$, $a \leqslant t \leqslant b$, telle que $\Phi^*(p,t) = \Phi(p,t)$ pour $p \in F$, vérifiant les relations $\Phi^*(p,a) = \alpha$, $\Phi^*(p,b) = \beta$ pour $p \in H$. En outre, pour tout $p \in H-F$ fixé, il existe un système fini de nombres $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_j = b$ tel que $\Phi^*(p,t)$ est une fonction linéaire croissante de la variable t sur chaque intervalle $\langle a_i, a_{i+1}\rangle$ $(i = 0, 1, \ldots, j-1)$.

Démonstration. On peut admettre, sans restreindre la généralité des raisonnements, que $a = \alpha = 0$, $\beta = b = 1$. Désignons par F_0 l'ensemble vide et par F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de points de l'espace H dont la distance à l'ensemble F est au moins égale *à* $1/n$. Les ensembles F_n sont fermés et forment une suite d'ensembles emboîtés dont la somme est $H-F$. Soit $\{t_n\}$ $(n = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ une suite de toutes nombres rationnels de l'intervalle $I = \langle 0, 1\rangle$ telle que $t_{-1} = 0$, $t_0 = 1$.

Formons maintenant une suite $\{\Phi_n(p,t)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ de fonctions continues, définies respectivement pour $p \in H$ et $t \in \{t_{-1}, t_0, \ldots, t_n\}$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées:

1° $\Phi_k(p,t) = \Phi(p,t)$ pour $p \in F$, $t = t_{-1}, t_0, \ldots, t_k$,

2° lorsque $k \leqslant l$, on a

$$\Phi_k(p,t) = \Phi_l(p,t) \quad \text{pour} \quad p \in H,\ t = t_{-1}, t_0, \ldots, t_k,$$

3° la fonction $\Phi_k(p,t)$ est pour tout $p \in F_i$, où $i \leqslant k$, une fonction strictement croissante et linéaire de la variable t $(t = t_{-1}, t_0, \ldots, t_k)$ sur chaque intervalle formé par la division de l'intervalle I par les points $t_{-1}, t_0, \ldots, t_i$.

Posons $\Phi_0(p,0) = 0$, $\Phi_0(p,1) = 1$ pour $p \in H$. On vérifie facilement que la fonction $\Phi_0(p,t)$ satisfait aux conditions 1°-3°.

Supposons maintenant qu'on ait défini des fonctions continues $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ vérifiant les conditions 1°-3°. Admettons que t' et t'' soient deux des nombres $t_{-1}, t_0, \ldots, t_n$ tels que $t' < t_{n+1} < t''$ et que l'intervalle (t', t'') ne contienne aucun de nombres $t_{-1}, t_0, \ldots, t_n$. On voit bien que les trois fonctions: $f_1(p) = \Phi_n(p,t')$, $f_2(p) = \Phi_n(p,t'')$ définies pour $p \in H$ et la fonction $f(p)$ définie pour $p \in F+F_{n+1}$ par les formules

$$f(p) = \frac{(t_{n+1}-t')\Phi_n(p,t'')+(t''-t_{n+1})\Phi_n(p,t')}{t''-t'} \quad \text{pour} \quad p \in F_{n+1} \tag{7}$$

et

$$f(p) = \Phi(p, t_{n+1}) \quad \text{pour} \quad p \in F \tag{8}$$

vérifient les hypothèses du lemme 1. Par conséquent il existe une fonction f^* continue sur H et telle que $f^*(p) = f(p)$ pour $p \in F+F_{n+1}$ et $\Phi_n(p,t')$ $< f^*(p) < \Phi_n(p,t'')$ pour $p \in H-(F+F_{n+1})$.

Posons pour $p \in H$

$$\Phi_{n+1}(p,t) = \Phi_n(p,t) \quad \text{pour} \quad t = t_{-1}, t_0, \ldots, t_n \tag{9}$$

et

$$\Phi_{n+1}(p,t) = f^*(p) \quad \text{pour} \quad t = t_{n+1}\,. \tag{10}$$

Il sera démontré que le système de fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n+1}$ vérifie les conditions 1°-3°. Comme ces conditions ont été imposées aux fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$, il ne reste qu'à prouver que la fonction Φ_{n+1} leur satisfait aussi. Ainsi la condition 1° résulte de (9), de la condition 1° à laquelle ont été soumises les fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ pour $t = t_{-1}, t_0, \ldots, t_n$ et des formules (8), (10) pour $t = t_{n+1}$. La condition 2° s'ensuit de (9) et de la condition 2° vérifiée par le système de fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$. Si l'on tient compte de la définition (9) et de l'hypothèse d'après laquelle la fonction Φ_n vérifie la condition 3°, on voit que la fonction Φ_{n+1} est, pour $p \in F_i$ où $i \leqslant n$, une fonction linéaire de la variable t sur tout intervalle formé par la division de l'intervalle I par les points $t_{-1}, t_0, \ldots, t_i$, pourvu qu'on la considère sur l'ensemble $\{t_{-1}, t_0, \ldots, t_n\}$. Si l'on ajoute à cet ensemble le nombre t_{n+1}, la propriété linéaire substitera, attendu que $f(p)$ a été définie par (7). Si maintenant on fait $i = n+1$, tout intervalle formé par la division de l'intervalle I par les points $t_{-1}, t_0, \ldots, t_i = t_{n+1}$ n'aura que deux points communs avec l'ensemble $\{t_{-1}, t_0, \ldots, t_{n+1}\}$, à savoir ses extrémités, ce qui prouve que $\Phi_{n+1}(p,t)$ est une fonction linéaire sur ces intervalles. Par conséquent, les fonctions $\Phi_0, \ldots, \Phi_{n+1}$ satisfont aux conditions 1°-3°; ainsi la suite $\{\Phi_n\}$ est définie conformément à la proposition énoncée.

Considérons maintenant la fonction $\Psi(p, t)$, définie par les formules

$$\Psi(p, t_n) = \Phi_n(p, t_n) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

et

$$\Psi(p, 0) = 0 . \tag{12}$$

Il est évident que, pour n fixé, $\Psi(p, t_n)$ est une fonction continue de la variable p dans l'espace H. Si $p \in F$ est fixé, $\Psi(p, t)$ est une fonction continue croissante de la variable t sur l'ensemble de nombres rationnels. Cela résulte du fait que les fonctions Ψ et Φ sont identiques pour $p \in F$. Si maintenant $p \in H-F$, il existe un n_0 tel que $p \in F_{n_0}$. En vertu des conditions 2°, 3° et des égalités (11), (12), la fonction $\Psi(p, t)$ est strictement croissante et linéaire sur tout intervalle formé par la division de l'intervalle I par les points $t_{-1}, t_0, \ldots, t_{n_0}$; elle est donc aussi continue par rapport à la variable t lorsque celle-ci prend des valeurs rationnelles. On en déduit que Ψ est une fonction continue par rapport à chacune des variables $p \in H$ et $t \in \{t_n\}$. De plus, c'est une fonction monotone par rapport à t. On en déduit facilement que la fonction Ψ est continue pour le système des variables $p \in H$ et $t \in \{t_n\}$.

Par conséquent, pour prouver le lemme 2 on n'a qu'à poser

$$\Phi^*(p, t) = \lim_{s \to t} \Psi(p, s) \quad \text{pour} \quad p \in H,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{13}$$

où $s \in \{t_n\}$. En effet, l'existence de la fonction (13) et ses propriétés énoncés dans la conclusion du lemme découlent directement des propriétés de la fonction Ψ.

Résultats principaux.

LEMME 3. *Soit donnée une fonction $f(p, x)$ mesurable et presque partout finie pour $p \in Q$, $a \leqslant x \leqslant b$, où Q est un ensemble de points $p = (x_1, \ldots, x_N)$ de l'espace euclidien à N dimensions (N étant un nombre naturel arbitraire), défini par les relations $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$.*

Dans ces conditions il existe une fonction $\varphi(p, x)$ réelle, continue pour $p \in Q$, $a \leqslant x \leqslant b$, et un ensemble mesurable $Q_0 \subset Q$, tels que les conditions suivantes sont satisfaites: (a) $|Q - Q_0| = 0$, (b) *lorsque $p \in Q$ est fixé, la fonction $\varphi(p, x)$ est une fonction strictement croissante de la variable x qui prend les valeurs $\varphi(p, a) = a$, $\varphi(p, b) = b$,* (c) *pour $p \in Q_0$ on a*

$$\int_a^b \left| f(p, \varphi(p, x)) \right|^\alpha dx < \infty \tag{14}$$

pour tout $\alpha \geqslant 0$.

Démonstration. On peut admettre, sans restreindre la généralité des raisonnements, que $a = 0$, $b = 1$, $|Q| = 1$ et $f(p, x) \geqslant 0$. Soit E_n ($n = 1, 2, \ldots$) l'ensemble de points $q = (p, x) \in Q \times I$ pour lesquels $n-1 \leqslant f(p, x) < n$ et E_0 l'ensemble de points (p, x) pour lesquels $f(p, x) = \infty$. Désignons par χ_m la fonction caractéristique de l'ensemble E_m. Posons

$$\chi(p, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \chi_n(p, x) \quad \text{pour} \quad p \in Q,\ x \in I . \tag{15}$$

Pour x fixé, $x \in I$, l'intégrale

$$\int_0^x \chi(p, t)\, dt \tag{16}$$

est une fonction mesurable ([1], p. 627) de la variable p sur l'ensemble Q. L'ensemble E_0 étant de mesure nulle, il existe, d'après le théorème de Fubini, un ensemble $Q' \subset Q$ tel que $|Q'| = 1$ et la partie commune de l'ensemble E_0 avec tout segment de droite parallèle à l'axe des x, contenu dans $Q' \times I$, est de mesure linéaire nulle. Par conséquent la fonction Ψ_1 définie par la formule

$$\psi_1(p, x) = \frac{\int_0^x \chi(p, t)\, dt}{\int_0^1 \chi(p, t)\, dt} \quad \text{pour} \quad (p, x) \in Q' \times I , \tag{17}$$

est, pour x fixé, $x \in I$, une fonction mesurable de la variable p, tandis que pour p fixé, $p \in Q'$, elle est une fonction strictement croissante et continue de la variable x et telle que $\psi_1(p, 0) = 0$, $\psi_1(p, 1) = 1$. En outre, on déduit facilement de (15) que

$$\int_0^1 f^\alpha(p, \varphi_1(p, t))\, dt < \infty \quad \text{pour} \quad p \in Q',\ \alpha \geqslant 0 , \tag{18}$$

où pour p fixé, $p \in Q'$, la fonction $\varphi_1(p, t)$ est l'inverse de la fonction $\psi_1(p, x)$. Désignons par $\{x_j\}$ une suite de (toutes) nombres rationnels appartenant à l'intervalle I. En vertu du théorème de Lusin ([1], p. 410), il existe, la fonction (17) étant mesurable, des domaines fermés $F^{(j)} \subset Q'$ ($j = 1, 2, \ldots$) tels que $|Q - F^{(j)}| < 1/2^{j+1}$ et $\psi_1(p, x_j)$ est une fonction continue de la variable p, lorsque celle-ci parcourt le domaine $F^{(j)}$. Il en résulte que sur l'ensemble

$$F_1 = \prod_{j=1}^{\infty} F^{(j)} \tag{19}$$

la fonction $\psi_1(p, x)$ est, pour tout x rationnel, $x \in I$, une fonction continue de la variable p. Le fait que la fonction ψ_1 est monotone et continue par rapport à la variable x entraîne la continuité de cette fonction sur le produit cartésien $F_1 \times I$. Si l'on applique le lemme 2 à la fonction $\psi_1(p, t)$ et à l'ensemble fermé $F_1 \times I$ de l'espace $H = Q \times I$, on trouve une fonction ψ_1 continue sur $Q \times I$ et telle que $\psi_1^*(p, 0) = 0$, $\psi_1^*(p, 1) = 1$ pour $p \in Q$, $\psi_1^*(p, x) = \psi_1(p, x)$ pour $p \in F_1$; en outre pour p fixé, $p \in Q - F$, la fonction $\psi_1^*(p, x)$ est strictement croissante par rapport à la variable x.

Supposons maintenant qu'on ait défini sur $Q \times I$, pour un $n \geqslant 1$, les fonctions $\psi_1^*(p, x), \ldots, \psi_n^*(p, x)$ ainsi que les ensembles fermés $F_1, \ldots, F_n$ deux à deux disjoints, contenus dans Q' et tels que les conditions suivantes soient vérifiées:

1° $|Q - (F_1 + \ldots + F_k)| < 1/2^k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

2° Lorsque $k \leqslant l \leqslant n$, on a

$$\psi_k^*(p, x) = \psi_l^*(p, x) \quad \text{pour} \quad p \in F_k,\ x \in I. \tag{20}$$

3° Si $p \in Q$, $x \in I$, on a

$$|\psi_{k+1}^*(p, x) - \psi_k^*(p, x)| < 1/2^k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

4° p étant fixé, chacune des fonctions $\psi_k^*(p, x)$ est une fonction strictement croissante de la variable x et telle que $\psi_k^*(p, 0) = 0$, $\psi_k^*(p, 1) = 1$. En outre, si $p \in Q - (F_1 + \ldots + F_k)$, on peut diviser l'intervalle I en un nombre fini d'intervalles tels que sur chacun d'eux la fonction ψ_k^* soit une fonction linéaire de la variable x.

5° On a pour tout $p \in F_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ arbitraire

$$\int_0^1 f^a(p, \varphi_k(p, t))\, dt < \infty \quad \text{pourvu que} \quad a \geqslant 0, \tag{21}$$

$\varphi_k(p, t)$ désigne ici la fonction inverse de la fonction $\psi_k^*(p, t)$, c'est-à-dire $\varphi_k(p, \psi_k^*(p, t)) = t$.

6° Si $l \leqslant k \leqslant n$ et $I_{l,m}$ $(m = 0, 1, \ldots, 3^l - 1)$ désigne l'intervalle défini par la relation $m \leqslant 3^l x \leqslant m+1$, et p est fixé mais arbitraire, $p \in Q$, les ensembles de valeurs que les fonctions $\psi_k^*(p, x)$ et $\psi_l^*(p, x)$ prennent sur l'intervalle I_{l_m} sont identiques.

Supposons maintenant le nombre naturel $j \geqslant n+1$ assez grand pour qu'on ait pour $p \in Q$, $x', x'' \in I$

$$|\psi_n^*(p, x') - \psi_n^*(p, x'')| < 1/2^{n+1} \quad \text{lorsque} \quad |x' - x''| < 1/3^j. \tag{22}$$

Comme pour le cas de la fonction (17), on démontre que la fonction définie par les formules

$$\psi_{n+1}(p, x) = a_m + \frac{\int_{a_m}^{x} \chi(p, t)\, dt}{3^j \int_{a_m}^{a_{m+1}} \chi(p, t)\, dt} \quad \text{pour} \quad m = 0, 1, \ldots, 3^{j-1} \tag{23}$$

et pour $p \in Q - (F_1 + \ldots + F_n)$, $x \in I_{l,m} = \langle a_m, a_{m+1} \rangle$, est pour x fixé, $x \in I$, une fonction mesurable de la variable t, telle que

$$\psi_{n+1}(p, a_m) = a_m \quad \text{pour} \quad p \in Q' - (F_1 + \ldots + F_n) \tag{23'}$$

et pour tout $a \geqslant 0$

$$\int_0^1 f^a(p, \varphi_{n+1}(p, t))\, dt = \sum_{m=1}^{3^j - 1} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f^a(p, \varphi_{n+1}(p, t))\, dt < \infty \tag{24}$$

lorsque $p \in Q' - (F_1 + \ldots + F_n)$, où $\varphi_{n+1}(p, t)$ est, pour p fixé, la fonction inverse de $\psi_{n+1}^*(p, x)$. En procédant comme pour l'ensemble (19), on peut prouver l'existence d'un ensemble fermé $F_{n+1} \subset Q' - (F_1 + \ldots + F_n)$ tel qu'on ait $|Q' - (F_1 + \ldots + F_{n+1})| < 1/2^{n+1}$ et que la fonction $\psi_{n+1}(q/F_{n+1} \times I)$ soit continue. Posons $\psi_{n+1}(p, x) = x$ pour $p \in F_1 + \ldots + F_n$ et prolongeons, conformément au lemme 2, cette fonction continue pour $p \in F_1 + \ldots + F_{n+1}$, $x \in I$, sur chacun des ensembles $Q \times I_{j,m}$. Nous obtiendrons de cette manière une fonction $\overline{\psi}_{n+1}(p, x)$ continue sur $Q \times I$.

Posons

$$\psi_{n+1}^*(p, x) = \psi_n^*(p, \overline{\psi}_{n+1}(p, x)) \quad \text{pour} \quad (p, x) \in Q \times I. \tag{25}$$

Nous allons prouver que les fonctions $\psi_1^*, \ldots, \psi_{n+1}^*$ et les ensembles $F_1, \ldots, F_{n+1}$ satisfont aux conditions 1°-6°. En effet, la condition 1° résulte de la définition de l'ensemble F_{n+1}. La condition 2° découle directement de (25) et (20), puisque $\psi_{n+1}(p, x)$ est pour $p \in F_1 + \ldots + F_n$ identiquement égale à x et que pour les mêmes p on a $\overline{\psi}_{n+1}(p, x) = \psi_{n+1}(p, x)$. La condition 3° est une simple conséquence de l'inégalité (22). La condition 4° étant satisfaite par les fonctions ψ_n^* et $\overline{\psi}_{n+1}$, la même condition est vérifiée par la fonction ψ_{n+1}^*, puisque la composition de deux fonctions monotones ou linéaires conserve les mêmes propriétès. Quant à la convergence de l'intégrale (21), elle résulte pour $p \in F_1 + \ldots + F_n$ de la condition 2° relative aux fonctions ψ_n^*, ψ_{n+1}^* et de l'inégalité (21), tandis que pour $p \in F_{n+1}$ elle découle de l'inégalité (24), car une transformation linéaire ne modifie pas de convergence de l'intégrale et ce sont précisément des transformations linéaires des intervalles $I_{j,m}$ qui ont été effectuées par la relation (25). Enfin la condition 6° pour ψ_{n+1}^* s'ensuit de la même condition se rapportant aux fonctions $\psi_1^*, \ldots, \psi_n^*$ et de l'égalité $\overline{\psi}_{n+1}(p, a_m) = a_m$ valable pour $p \in Q$ en vertu de la relation (23').

Comme le système formé par la fonction ψ_1^* et l'ensemble F_1 satisfait aux conditions 1°-6°, le raisonnement fait plus haut définit une suite infinie de fonctions $\{\psi_n^*\}$ avec une suite correspondante d'ensembles $\{F_n\}$ tels que tout segment de celle-ci vérifie les conditions 1°-6°. La condition 3° entraîne la convergence uniforme de la suite $\{\psi_n^*\}$ vers la fonction continue ψ. On conclut de la condition 6° que la fonction $\psi(p, x)$ est inversible lorsque p est fixé. En effet, supposons $0 \leqslant x' < x'' \leqslant 1$. Il existe alors deux nombres naturels n et m tels que

$$x' \leqslant \frac{m}{3^n} < \frac{m+1}{3^n} \leqslant x''$$

ce qui entraîne, en vertu des conditions 2°, 4°, 6°,

$$\psi(p, x'') - \psi(p, x') \geqslant \psi\left(p, \frac{m+1}{3^n}\right) - \psi\left(p, \frac{m}{3^n}\right) = \psi_n^*\left(p, \frac{m+1}{3^n}\right) - \psi_n^*\left(p, \frac{m}{3^n}\right) > 0 .$$

Supposons maintenant que $\varphi(p, t)$ soit une fonction définie sur $Q \times I$ telle que

$$\varphi(p, \psi(p, x)) = x .$$

L'existence d'une telle fonction résulte de ce que la fonction $\psi(p, x)$ est monotone par rapport à x. La fonction φ est aussi une fonction continue. Cela résulte du fait que la transformation donnée par les formules

$$p' = p , \quad x' = \psi(p, x)$$

est une transformation continue et inversible sur l'ensemble compact $Q \times I$, ce qui entraîne nécessairement que la transformation inverse

$$p = p', \quad x = \varphi(p', x') = \varphi(p, x')$$

est aussi une transformation continue.

Posons $Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$. On voit aisément que les conditions (a) et (b) du lemme 3 sont vérifiées.

Admettons que $p \in Q_0$ et n soit un nombre naturel tel que $p \in F_n$. Comme d'après (20) on a $\varphi(p, t) = \varphi_n(p, t)$, on en tire en vertu de (30)

$$\int_0^1 f^\alpha(p, \varphi(p, t))\, dt = \int_0^1 f^\alpha(p, \varphi_n(p, t))\, dt < \infty \quad \text{pour} \quad \alpha > 0 ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.

Théorème 1. *Etant donnée une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ (n est un nombre naturel arbitraire) mesurable et presque partout finie sur l'ensemble défini par les relations*

(26) $$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

il existe alors des fonctions $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$, définies et continues pour $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ et telles que

(a) *$\varphi_1(x_1)$ est une fonction strictement croissante de la variable x_1 telle que $\varphi_1(a_1) = a_1$, $\varphi_1(b_1) = b_1$,*

(b) *pour $x_1, \ldots, x_{k-1}$ fixés, $\varphi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ est une fonction croissante de la variable x_k et telle que $\varphi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k) = a_k$ et $\varphi_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k) = b_k$,*

(c) *on a pour tout $\alpha > 0$*

$$\int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \left|f(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n))\right|^\alpha dx_1, \ldots, dx_n < \infty .$$

Démonstration. Dans le cas où $n = 1$ le théorème est prouvé si l'on prend pour φ_1 la fonction inverse de la fonction

$$\psi(x) = a_1 + (b_1 - a_1) \frac{\int_{a_1}^{x} \chi(t)\, dt}{\int_{a_1}^{b_1} \chi(t)\, dt} \quad \text{pour} \quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1 ,$$

où χ est une fonction définie d'une manière analogue à celle définie par la formule (15).

Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour un $n \geqslant 1$ et soit $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ une fonction mesurable et presque partout finie pour $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$. En vertu du lemme 3 il existe une fonction $\varphi_{n+1}^*(x_1, \ldots, x_{n+1})$, satisfaisant à la condition (b) du théorème 1 pour $k = n+1$, telle que la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \left|(fx_1, \ldots, x_n, \varphi_{n+1}^*(x_1, \ldots, x_{n+1}))\right|^\alpha dx_{n+1}$$

est une fonction mesurable et presque partout finie sur l'ensemble (26). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des fonctions continues $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vérifiant les conditions (a), (b) et (c) relatives à la fonction F. On a donc

$$\int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \left|f(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}))\right|^\alpha dx_1 \ldots dx_{n+1} = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} F(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n < \infty ,$$

où $\varphi_{n+1}(x_1, \ldots x_n, , x_{n+1}) = \varphi_{n+1}^*(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

Remarques supplémentaires. On pourrait se demander si dans le théorème 1 il serait possible de remplacer par une autre l'hypothèse que la fonction f (presque partout finie) prend des valeurs infinies sur un ensemble de mesure nulle. Il s'agirait alors d'une hypothèse concernant l'ensemble considéré. En effet, l'énoncé du théorème 1 suggère qu'il serait suffisant de supposer l'existence d'une homéomorphie, du genre considéré dans le théorème, telle que l'ensemble en question soit transformé en un ensemble de mesure nulle. Cependant on se heurterait alors à la difficulté que l'homéomorphie ne conserve nécessairement ni pour les ensembles, ni par cela même, pour les fonctions, la propriété d'être mesurable. Il est donc naturel de chercher une réponse à la question posée plus haut en considérant les fonctions mesurables au sens de Borel. Le problème concernera alors la caractéristique des ensembles qui sont transformés, par une certaine homéomorphie d'un cube du type (26) en lui-même, en ensembles de mesure nulle. Les deux théorèmes qui suivent peuvent être considérés comme étant un premier pas vers la solution du problème posé plus haut.

THÉORÈME 2. *Supposons donné dans un cube à n dimensions un ensemble de première catégorie. Il existe une homéomorphie de ce cube en lui-même de la forme*

$$\begin{aligned} x_1' &= \Phi_1(x_1), \\ x_2' &= \Phi_2(x_1, x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= \Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

qui transforme l'ensemble E en un ensemble de mesure nulle.

Démonstration. Admettons d'abord que E soit la somme d'une suite $\{F_n\}$ d'ensembles fermés, non denses emboîtés de l'intervalle I. Posons

$$\varphi_1(x) = \frac{\int_0^x \mu_1(t)\,dt}{\int_0^1 \mu_1(t)\,dt} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{28}$$

où μ_1 est la fonction caractéristique de l'ensemble $I - F_1$. Il est évident que la transformation φ_1 est une homéomorphie de l'intervalle I en lui-même, de sorte que $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = 1$; l'ensemble $\varphi_1(F_1)$ est bien un ensemble de mesure nulle.

Admettons maintenant qu'on ait défini sur I des fonctions continues et croissantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(n \geqslant 1)$, satisfaisant aux conditions: 1° $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k(1) = 1$ pour $k = 1, \ldots, n$, 2° lorsque $k \leqslant l \leqslant n$, on a $\varphi_k(x) = \varphi_l(x)$ si $x \in F_k$ ou si $x \in I$ et x est de la forme $m/3^k$; 3° les ensembles $\varphi_k(F_k)$ sont de mesure nulle; 4° $|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| < 1/2^{k-1}$ pour $k = 2, 3, \ldots, n$.

Prenons j naturel, $j \geqslant n+1$, assez grand pour que

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')| < 1/2^n \quad \text{lorsque} \quad |x' - x''| < 1/3^j. \tag{28'}$$

Soit F_n^* l'ensemble de tous les points de l'ensemble F_n et de ceux de l'intervalle I qui sont de la forme $m/3^j$. Posons

$$\varphi_{n+1}^*(t) = t \quad \text{pour} \quad t \in F_n^* \tag{29}$$

et désignons par μ_{n+1} la fonction caractéristique de l'ensemble $I - F_{n+1}$. Posons encore

$$\varphi_{n+1}^*(t) = a + (\beta - a)\frac{\int_a^t \mu_{n+1}(\tau)\,d\tau}{\int_a^\beta \mu_{n+1}(\tau)\,d\tau} \tag{30}$$

sur tout intervalle $\langle a, \beta \rangle$ contigu à l'ensemble F_n^*. Si l'on raisonne comme dans la démonstration du lemme 3, on conclut, en s'appuyant sur les formules (28), (29) et (30), que la fonction

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(\varphi_{n+1}^*(x)) \tag{31}$$

ainsi que les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ satisfont aux conditions 1°-4°, si l'on remplace n par $n+1$. Puisque le système composé de la fonction φ_1 vérifie aussi ces conditions, on a ainsi défini une suite $\{\varphi_n\}$ dont chaque segment satisfait aux conditions 1°-4°. On établit tout comme dans la démonstration du lemme 3 que la suite de fonctions ainsi formée converge vers une fonction Φ_1 qui représente l'intervalle I sur lui-même de la manière convenue. Ceci termine la démonstration du théorème dans le cas considéré.

L'hypothèse: „E est un ensemble du type F_σ" ne restreint aucunement la généralité des propositions, attendu que la fermeture d'un ensemble non dense est, comme on le sait, un ensemble non dense.

La démonstration du théorème 2 se fait dans le cas général par le principe d'induction, tout comme dans la démonstration du lemme 3. Ceci est possible d'une part grâce à la propriété connue des ensembles de première catégorie dans les produits cartésiens ([2], p. 222), propriété analogue à celle qui intervient dans le théorème de Fubini, d'autre part grâce au fait que la construction décrite par les formules (28)-(31) fournit des fonctions mesurables au sens donné à la fonction (17). Nous nous bornerons à ces quelques remarques sur la démonstration dont les détails seront omis.

THÉORÈME 3. *La condition suffisante et nécessaire pour qu'il existe une homéomorphie de l'intervalle I en lui-même qui transforme un ensemble donné E en un ensemble de mesure 1, est qu'il existe un ensemble du type F_σ contenu dans E dont l'ensemble de points de condensation soit idéntiquement l'ensemble I.*

Démonstration. La condition est suffisante; cela résulte du fait que deux ensembles parfaits, non denses, non vides et bornés sur une droite sont homéomorphes ([1], théorème 4, p. 359), l'homéomorphie pouvant être obtenue au moyen d'une fonction croissante.

La nécessité de la condition résulte de ce que tout ensemble de mesure complète vérifie cette condition et l'homéomorphie ne modifie ni le type, ni la puissance de l'ensemble. Nous omettons la démonstration détaillée, car elle ne présente pas de grandes difficultés (la démonstration omise est analogue à celle qui se trouve dans [1], au N° 276, p. 286 et N° 337, p. 357-359).

Travaux cités

[1] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1918.

[2] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1952.

[3] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journ. f. Math. 145 (1915), pp. 9-14.

Reçu par la Rédaction le 7. 11. 1960

On the decomposition of 2-dimensional ANR-s into a Cartesian product

by

H. Patkowska (Warszawa)

1. The object of the note Notations. A space X is said to be *topologically first* if it contains at least two points and is homeomorphic with no Cartesian product of factors containing at least two points each.

It is known (see [1], [2], [5], [7], [8]) that the decomposition of a space into topologically first spaces is in general not unique. Nevertheless, in certain special cases this uniqueness holds. For instance, the decomposition of an arbitrary polytope into topologically first spaces of dimension $\leqslant 1$ is (disregarding the permutations of the factors and their homeomorphisms) unique (see [4]). However, the problem posed by K. Borsuk (see [3], p. 140), whether the decomposition of an arbitrary space X into prime factors of dimension $\leqslant 1$ is unique, remains still unsolved.

The purpose of this paper is to show that this problem has a positive solution provided that the space X is an ANR (i.e. a compact absolute neighbourhood retract) of dimension $\leqslant 2$. Namely, we prove the following

THEOREM. *If X is an ANR of dimension $\leqslant 2$ and if X is homeomorphic with the Cartesian product $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ of some topologically first spaces, then the system $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is (disregarding its permutations and homeomorphisms) uniquely determined by X.*

It is clear that the factors $X_1, X_2, \ldots, X_n$ must be ANR-sets of dimension $\leqslant 2$ and that $\dim X = \dim X_1+\dim X_2+\ldots+\dim X_n$.

The following notation will be used in the sequel:

$\mathrm{ord}_{x_0} X$ will denote the order of the point x_0 in the space X in the sense of Menger-Urysohn.

$X^{[n]}$ will denote the set of the points of X of order $\geqslant n$.

If Q is a disk (i.e. a topological image of the circle $|z|\leqslant 1$) and L an arc (i.e. a topological image of the interval $0\leqslant x\leqslant 1$), then Q° and L° will denote the interiors of these sets and $Q^\cdot$ and $L^\cdot$ their boundaries.

If $A\subset X\times Y$, then A_X (respectively A_Y) will denote the projection of A into X (respectively into Y), i.e. the set of all points $x\in X$ (resp.