Reference

[1] S. Benzer, *On the topology of the genetic fine structure*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 45 (1959), pp. 1607-1620.

MATHEMATISCH INSTITUUT
UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Reçu par la Rédaction le 9. 6. 1961

Sur l'enfilage et la fixation des ensembles compacts

par

D. Zaremba (Wrocław)

§ 1. Relations générales. E étant un espace métrique, un ensemble $X \subset E$ sera dit *fixable dans* E (1) lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans E une somme finie $F_\varepsilon = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{k(\varepsilon)}$ d'ensembles fermés tels que $\delta(F_i) < \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \ldots, k(\varepsilon)$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $F_\varepsilon \cap C \neq \emptyset$ pour toute composante C de X.

De plus, si pour $\varepsilon_n \downarrow 0$, c'est-à-dire pour toute suite $\{\varepsilon_n\}$ décroissante et convergente vers 0, les F_{ε_n} qui fixent X peuvent être choisis de manière qu'ils forment une suite descendante, j'appelle la fixation de X *monotone*.

Knaster appelle un ensemble $X \subset E$ *enfilable dans* E lorsque E contient un arc L tel que $L \cap C \neq \emptyset$ pour toute composante C de X.

J'appelle *réduit* de X tout ensemble $R \subset X$ tel que $R \cap C \neq \emptyset$ pour toute composante C de X. En outre, j'appelle *l'adduit* de X l'ensemble A de tous les points p de E tels que $(p) = \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} C_i$ pour une suite $\{C_i\}$ de composantes de X. Ainsi défini, A est donc l'ensemble de tous les points de E qui sont des points-limites des suites de points appartenant à des composantes C_i de X telles que $\delta(C_i)$ tend à 0. On voit aussitôt qu'un adduit est toujours fermé, donc compact, pour des X compacts.

$\mathcal{E}^n$ désignera constamment l'espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

THÉORÈME 1. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour les X compacts dans $\mathcal{E}^n$*:

(1) *l'existence d'une fixation monotone de X*,

(2) *l'existence dans X d'un réduit R compact de dimension* 0,

(3) *l'existence d'un enfilage de X*.

La démonstration de ce théorème se trouve dans mon travail [8], p. 14.

THÉORÈME 2. *Si un X (compact ou non) est fixable dans $\mathcal{E}^n$, son adduit A est vide ou de dimension* 0.

(1) cf. Knaster [2], où l'on trouve une définition équivalente de cette notion par des ensembles ouverts.

Démonstration. Il résulte facilement des définitions de la fixation et de l'adduit que toute fixation de X est un recouvrement de l'adduit A. Ainsi, l'adduit A peut être couvert par un nombre fini d'ensembles fermés. disjoints deux à deux et dont le diamètre est aussi petit que l'on veut, Il en résulte que $\dim(A) \leqslant 0$.

THÉORÈME 3. *Si toute composante C d'un $X \subset \mathcal{E}^n$ compact est de diamètre $\delta(C) \geqslant 1$, il existe dans X un réduit compact R tel que* $\dim(R) \leqslant n-2$.

En particulier, tout X plan et dont toutes les composantes sont de grand diamètre contient un réduit compact de dimension nulle ([8], même page).

Démonstration. $X \subset \mathcal{E}^n$ étant compact par hypothèse, soit K^n un cube de dimension n, contenant X et décomposé en cubes de même dimension et de diamètre inférieur à 1:

$$K^n = \bigcup_{i=1}^{m} K_i^n \quad \text{et} \quad \delta(K_i^n) < 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Posons encore

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{Fr}(K_i^n); \tag{5}$$

F est donc un continu composé d'un nombre fini de cubes à $n-1$ dimensions, d'où

$$\dim(F) = n-1. \tag{6}$$

Considérons une composante arbitraire C de X. L'hypothèse que $\delta(C) \geqslant 1$ entraîne en vertu de (4) et (5) que

$$C \cap F \neq \emptyset. \tag{7}$$

Si X est connexe, c'est-à-dire $X = C$, le théorème est trivialement vrai: il suffit de poser $R = (p)$ où $p \in X$ est arbitraire. Lorsque, par contre, X n'est pas connexe, soit

$$R = \overline{X \cap F} \cap \overline{F - X \cap F} \tag{8}$$

(frontière relative de $X \cap F$ dans F). R est donc par définition compact et, en même temps, frontière dans F (car $\overline{X \cap F} = X \cap F$ par suite de compacité de X et de F, d'où $\overline{X-R} = \overline{X-[(X\cap F)\cap\overline{F-(X\cap F)}]}$ $= \overline{X-(X\cap F)} \cup \overline{X-\overline{F-(X\cap F)}} \supset \overline{X-(X\cap F)} \cup \overline{X-\overline{X-(X\cap F)}}$ $\supset \overline{X-(X\cap F)} \cup X-\overline{X-(X\cap F)} = X$). Vu (6), il en résulte (voir [5], p. 353, 12, l'intérieur de K^{n-1} étant homéomorphe à $\mathcal{E}^{n-1}$) que $\dim(R) \leqslant n-2$.

Reste à montrer que R est un réduit de X. Soit

$$F_C = \overline{C \cap F} \cap \overline{F - C \cap F} \tag{9}$$

(frontière relative de $C \cap F$ dans F). La composante C étant arbitraire, il résulte de (7) que $F - C \cap F \neq \emptyset$, car on aurait en cas contraire $F \subset C$, d'où $C' \cap F = \emptyset$ pour toute composante $C' \neq C$, en dépit de (7). Par conséquent, $F_C \neq \emptyset$ et comme $F_C \subset C$ d'après (9), il vient $F_C \cap C \neq \emptyset$ et à plus forte raison ([5], p. 169) $R \cap C \neq \emptyset$, puisque $F_C \subset R$ d'après (8) et (9). Ainsi, R est un réduit de X.

Le théorème 3, qui vient d'être établi, subsiste dans des espaces plus généraux que $\mathcal{E}^n$. La démonstration en est publiée dans un travail commun de Lelek et moi-même ([7], p. 83); elle repose toutefois sur une idée bien différente. Nous y avons établi également un théorème (corollaire 2) qui entraîne le cas particulier suivant:

THÉORÈME 4. *Si l'on a $\dim(A) \leqslant n-2$ pour l'adduit A d'un $X \subset \mathcal{E}^n$ compact, il existe dans X un réduit compact R pour lequel* $\dim(R) \leqslant n-2$.

En particulier, si l'adduit d'un X compact plan est vide ou de dimension 0, il existe dans X un réduit compact de dimension 0 (voir [8], page 14).

La fixation monotone étant par définition (voir ici p. 65) un cas particulier de la fixation tout court, il résulte du théorème 1 que l'enfilage d'un ensemble $X \subset \mathcal{E}^n$ compact en entraîne la fixation. La réciproque n'est pas vraie comme le montre un exemple dans $\mathcal{E}^3$, dû à Lelek (voir [6]). Par contre, dans $\mathcal{E}^2$, tout X compact qui est fixable, y est enfilable en vertu des théorèmes 2 et 4. Ainsi, sur le plan, la fixation des ensembles compacts équivaut à leur enfilage et les deux propriétés équivalent, en vertu des théorèmes 1, 2 et 4, à la dimension au plus 0 de leurs adduits.

En particulier, dans $\mathcal{E}^2$ tout ensemble compact à grandes composantes est fixable et enfilable, tandis qu'il existe déjà dans $\mathcal{E}^3$ des ensembles compacts à grandes composantes et qui ne sont pas fixables, donc aussi pas enfilables (voir [2], p. 194-196).

Le problème s'impose, de combien de manières peut être réalisé l'enfilage d'un $X \subset \mathcal{E}^2$ compact enfilable. La réponse à ce problème, convenablement précisé, sera donné au § 3.

§ 2. Enfilage généralisé. Pour simplifier, nous n'allons nous occuper que des ensembles plans. Les constructions et démonstrations analogues à celles qui vont suivre conduisent à des résultats analogues dans les espaces $\mathcal{E}^n$ où $n > 2$. I et L (munis des indices) désigneront les segments rectilignes sans bouts et les arcs sans bouts respectivement. Ils seront appelés *ouverts*. Leurs fermetures, à savoir segments et arcs avec leurs bouts, seront désignés par $\bar{I}$ et $\bar{L}$ respectivement et appelés *fermés*. $Q(p, r)$ désignera le cercle de centre p et de rayon r.

Ce sont des sur-continus des $X \subset \mathcal{E}^2$ compacts qui seront envisagés plus particulièment. Un X compact et enfilable a par définition un sur-continu M composé de lui et d'un seul arc irréductible, donc tel que les composantes de $M-X$ sont des arcs ouverts; il y en a donc au plus $\aleph_0$. La question s'impose, comment en est-il des X non-enfilables. Or il sera établi (voir théorème 5, p. 69) que, d'une façon générale, tout $X \subset \mathcal{E}^2$ compact, enfilable ou non-enfilable, a un sur-continu M tel que les composantes de $M-X$ sont des arcs ouverts — bien entendu, sans qu'ils doivent se laisser situer sur un seul arc. Grâce à cette propriété commune des ensembles enfilables et non-enfilables, et qui peut être appelée *enfilage généralisé* de X en M, certains théorèmes qui la font intervenir peuvent être démontrés de la même manière pour les deux genres d'ensembles compacts. Nous allons montrer par un exemple (voir § 3) que tout $X \subset \mathcal{E}^2$ compact est la partie commune de $2^{\aleph_0}$ sur-continus M_t où $0 \leqslant t \leqslant 1$, disjoints hors X et tels que les composantes de chacun des ensembles $M_t - X$ sont des arcs ouverts, la somme $\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} M_t$ étant également un continu.

Un ensemble X est dit *ε-connexe* (voir [1], p. 298) lorsque $\varrho(X', X'') \leqslant \varepsilon$ pour toute décomposition $X = X' \cup X''$ en sommandes non-vides (²). Nous aurons recours à la propriété suivante de cette notion:

(1) Si, pour $i = 1, 2, \ldots$, l'ensemble X_i est ε_i-connexe, $\varepsilon_i \downarrow 0$ et $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, la compacité de la somme $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ en entraîne la connexité.

En effet, X_i étant ε_i-connexe par hypothèse et ε_j-connexité impliquant ε_i-connexité pour $j > i$ (puisque $\varepsilon_j < \varepsilon_i$), tous les sommandes de la somme partielle $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ sont ε_i-connexes. La suite $\{X_i\}$ étant par hypothèse ascendante, on a d'une part à plus forte raison $\varrho(X_i, X_j) = 0$ pour tout couple d'indices i, j, d'où la ε_i-connexité de cette somme (voir ibidem, p. 298, VIII), et d'autre part elle coïncide avec la somme totale $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Vu que $\varepsilon_i \downarrow 0$, elle est donc ε-connexe pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire 0-connexe (voir ibidem, p. 298) ce qui équivaut à la connexité pour les ensembles compacts (ibidem, p. 301).

Si $p \in X$, le sous-ensemble ε-connexe de X contenant p et saturé (c'est-à-dire qui contient tout ensemble ayant ces propriétés), s'appelle la *ε-composante* de p dans X (voir ibidem, p. 299). Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$ fixe, les ε-composantes d'un X sont donc disjointes deux à deux et fermées dans X (voir ibidem, même page). Par conséquent, si X est compact,

(²) $\varrho(X', X'')$ désigne la distance entre les ensembles X' et X'', c'est-à-dire $\varrho(X', X'') = \inf \varrho(p', p'')$ où $p' \in X'$ et $p'' \in X''$ (voir [4], p. 102).

elles le sont aussi. En outre, quel que soit $\varepsilon \geqslant 0$, un X compact a toujours un nombre fini de ε-composantes (ibidem, p. 301).

THÉORÈME 5. *Si $X \subset \mathcal{E}^2$ est compact, il existe une suite de segments ouverts $\{I_i\}$ aux bouts p_i, q_i respectivement et tels que*

(2) *l'ensemble* $M = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{I_i}$ *est un continu,*

(3) $\overline{I_i} \cap X = (p_i, q_i)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots,$

(4) $\overline{I_i} \cap \overline{I_j} \subset (p_i, q_i)$ *pour tous les* $i \neq j$,

(5) $\lim_{i\to\infty} \delta(\overline{I_i}) = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$. Procédons par induction. Rangeons toutes les ε_n-composantes de X en une suite finie $C_1^n, \ldots, C_{m_n}^n$ en les numérotant de façon que

(6) $$\varrho(C_1^n \cup \ldots \cup C_i^n,\ C_{i+1}^n \cup \ldots \cup C_{m_n}^n) = \varrho(C_1^n \cup \ldots \cup C_i^n,\ C_{i+1}^n) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m_n - 1.$$

Toutes les ε_n-composantes étant compactes, il existe pour tout $i = 1, \ldots, m_n - 1$ un couple de points p_i^n, q_i^n tel que

(7) $$\varrho(C_1^n \cup \ldots \cup C_i^n,\ C_{i+1}^n) = \varrho(p_i^n, q_i^n), \quad \text{où} \quad p_i^n \in C_1^n \cup \ldots \cup C_i^n \ \text{et}\ q_i^n \in C_{i+1}^n.$$

Quand on passe à ranger les ε_{n+1}-composantes, on peut évidemment les numéroter de façon que, pour tout $j = 1, \ldots, n$, tout $i = 1, \ldots, m_j - 1$ et tout $k = 1, \ldots, m_{n+1} - 1$,

$$p_i^j \in C_k^{n+1} \quad \text{entraîne} \quad q_i^j \in C_{k+1}^{n+1}$$

et que l'on ait

(8) $$p_k^{n+1} = p_i^j, \qquad q_k^{n+1} = q_i^j.$$

Ceci fait, prenons pour $\overline{I_i^n}$ le segment aux bouts p_i^n et q_i^n. Alors

(9) $$i < j \quad \text{entraîne} \quad \overline{I_i^n} \neq \overline{I_j^n}$$

et, pour tout $n = 1, 2, \ldots$, l'ensemble compact

(10) $$M_n = X \cup \bigcup_{i=1}^{m_n - 1} \overline{I_i^n}$$

est ε_n-connexe (en tant qu'une somme ascendante d'ensembles ε_n-connexes $C_1^n \cup \overline{I_1^n}$, $C_1^n \cup \overline{I_1^n} \cup C_2^n \cup \overline{I_2^n}, \ldots$). En outre,

(11) $$\delta(M_n) = \delta(X),$$

(12) $$X \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$$

Les points p_i^n et q_i^n étant, pour $i=1,\dots,m_n-1$, les plus proches d'après (6) et (7) parmi ceux de deux ensembles disjoints $C_1^n\cup\dots\cup C_i^n$ et $C_{i+1}^n\cup\dots\cup C_{m_n}^n$, dont l'union constitue X, il n'y a sur le segment $\overline{I_i^n}$ aucun point de X sauf ses bouts p_i^n et q_i^n; en formule

$$\overline{I_i^n}\cap X=(p_i^n,q_i^n)\,. \tag{13}$$

Nous allons montrer que

$$i<j \quad \text{entraîne} \quad \overline{I_i^n}\cap\overline{I_j^n}\subset(p_i^n,q_i^n)\,. \tag{14}$$

Supposons en effet que $p\in(\overline{I_i^n}\cap\overline{I_j^n})-(p_i^n,q_i^n)$. Il résulte de (13) qu'aucun des bouts des segments $\overline{I_i^n}$ et $\overline{I_j^n}$, en tant que point de X, ne serait situé entre ceux de l'autre segment; donc, comme différents en vertu de (9), ces segments se croiseraient. Ainsi les triples de points p_i^n, p, p_j^n et q_i^n, p, q_j^n ne seraient pas collinéaires, d'où

$$\varrho(p_i^n,p_j^n)<\varrho(p_i^n,p)+\varrho(p,p_j^n)\,, \tag{15}$$

$$\varrho(q_i^n,q_j^n)<\varrho(q_i^n,p)+\varrho(p,q_j^n)\,. \tag{16}$$

En vertu de (6) et (7), on aurait pour $i<j$

$$\varrho(p_i^n,q_i^n)=\varrho(C_1^n\cup\dots\cup C_i^n,C_{i+1}^n)\leqslant\varrho(C_1^n\cup\dots\cup C_i^n,C_j^n)\leqslant\varrho(p_i^n,p_j^n)\,,$$

$$\varrho(p_j^n,q_j^n)=\varrho(C_1^n\cup\dots\cup C_j^n,C_{j+1}^n)\leqslant\varrho(C_1^n\cup\dots\cup C_{i+1}^n,C_{j+1}^n)\leqslant\varrho(q_i^n,q_j^n)\,,$$

c'est-à-dire

$$\varrho(p_i^n,q_i^n)\leqslant\varrho(p_i^n,p_j^n) \quad \text{et} \quad \varrho(p_j^n,q_j^n)\leqslant\varrho(q_i^n,q_j^n)\,. \tag{17}$$

Dans le cas où $\varrho(p,p_j^n)\leqslant\varrho(p,q_i^n)$, on aurait en vertu de (15) $\varrho(p_i^n,p_j^n)<\varrho(p_i^n,p)+\varrho(p,p_j^n)\leqslant\varrho(p_i^n,p)+\varrho(p,q_i^n)=\varrho(p_i^n,q_i^n)$ contrairement à la première des formules (17), et dans le cas contraire, où $\varrho(p,p_j^n)>\varrho(p,q_i^n)$, on aurait en vertu de (16) $\varrho(p_j^n,q_j^n)<\varrho(q_i^n,p)+\varrho(p,q_j^n)<\varrho(p_j^n,p)+\varrho(p,q_j^n)=\varrho(p_j^n,q_j^n)$, contrairement à la seconde de ces formules. La proposition (14) est donc établie.

Posons à présent

$$M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\,. \tag{18}$$

On a donc en vertu de (11) et (12)

$$\delta(M)=\delta(X)\,. \tag{19}$$

Rangeons tout les segments $\overline{I_i^n}$, où $n=1,2,\dots$ et $i=1,\dots,m_n-1$, dont se compose M d'après (10) et (18), en une suite $\overline{I_1},\overline{I_2},\dots$ de façon que tout segment qui se répète en raison de la convention (8) dans des M_n différents ne figure dans cette suite qu'une seule fois. On aura alors d'après (10) et (18)

$$M=X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{I_i}\,. \tag{20}$$

Reste à montrer que la suite $\overline{I_1},\overline{I_2},\dots$ satisfait à la thèse du théorème. On a en effet (3) en vertu de (13) et (4) en vertu de (14). Pour établir (5), notons que si $\overline{I_i}\subset\overline{M_{n+1}-M_n}$ pour un $n=1,2,\dots$, les deux bouts p_i et q_i du segment $\overline{I_i}$ appartiennent en vertu de (7) et (8) à la même ε_n-composante de X et on a alors d'après (6) et (7)

$$\delta(\overline{I_i})=\varrho(p_i,q_i)\leqslant\varepsilon_n\,. \tag{21}$$

En même temps, il n'y a dans la suite $\overline{I_1},\overline{I_2},\dots$ qu'un nombre fini de termes $\overline{I_i}$ tels que $\delta(\overline{I_i})>\varepsilon_n$, car tout M_n ne se compose d'après sa définition (10) que de m_n-1 segments. Vu que $\varepsilon_n\downarrow 0$, il en résulte la thèse (5).

Ainsi, pour toute suite $i_1,i_2,\dots$ d'indices, l'ensemble $\operatorname{Lim}_{k\to\infty}\overline{I_{i_k}}$ se réduit à un point, qui est évidemment le point $\operatorname{Lim}_{k\to\infty}\overline{I_{i_k}}=\lim_{k\to\infty}p_{i_k}=\lim_{k\to\infty}q_{i_k}$ donc un point de X, puisqu'on a $p_{i_k}\in X$ pour tout i_k par construction et X est compact par hypothèse. On a donc

$$\operatorname{Lim}_{k\to\infty}\overline{I_{i_k}}\subset X\,. \tag{22}$$

Il en résulte en vertu de (20) que l'ensemble M est fermé, donc compact d'après (19), et, en vertu de (12) et (18), que l'on a $M=\operatorname{Lim}_{n\to\infty}M_n$. Enfin, tout M_n étant ε_n-connexe où $\varepsilon_n\downarrow 0$, l'ensemble M est connexe en vertu de (1), p. 68. On a donc aussi la condition (2), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *L'existence d'une courbe simple fermée dans M équivaut à celle dans X.*

En effet, $X\subset M$ en vertu de (2). Pour l'implication inverse, supposons qu'il existe une courbe simple fermée $S\subset M$ telle que $S\cap(M-X)\neq\emptyset$, d'où $S\cap(M_n-X)\neq\emptyset$ à partir d'un certain n en vertu de (18). On a à la fois $S\cap X\neq\emptyset$, car on aurait en cas contraire $S\subset M-X$, c'est-à-dire $S=S\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{m_n-1}I_i^n$ d'après (10) et (18), ce qui est impossible, S ne se réduisant pas, en tant qu'une courbe fermée, à un seul segment ouvert $S\cap I_i^n$ et n'étant pas composée, en tant qu'un continu, de plus d'un ensemble $S\cap I_i^n$, donc de deux ensembles ouverts dans lui et disjoints. Soient $C_{i_1}^n,\dots,C_{i_s}^n$ celles des ε_n-composantes de X qui ont des points sur S, numérotées suivant le sens de parcours fixé sur cette courbe. Ainsi $C^n_{i_2}$ succède à $C^n_{i_1}$ etc. et finalement $C^n_{i_1}$ succède à $C^n_{i_s}$. Il en est de même des arcs fermés $\overline{L_{i_1}}, \ldots, \overline{L_{i_s}}$ de S unissant ces ε_n-composantes respectivement et irréductibles par rapport à cette propriété. S se composerait donc d'arcs fermés $\overline{L_{i_j}}$ où $j = 1, \ldots, s$ et d'autant de segments ouverts I^n_i, sommandes de M_n d'après (10), qui unissent les ε_n-composantes $C^n_{i_j}$ portées par ces arcs. Il en résulte que tout $C^n_{i_j}$ se trouverait uni à ses *deux* ε_n-composantes voisines sur S par des segments appartenant à M_n, contrairement à (6)-(8) et à la définition des segments I^n_i, d'après laquelle celui des $C^n_{i_1}, \ldots, C^n_{i_s}$ qui succède aux autres d'entre eux dans M_n n'est uni avec la somme de tous les précédents que par *un seul* segment I^n_i.

Corollaire 2. *En particulier, lorsque* $\dim(X) = 0$, *le continu* M *est une dendrite et ses bouts, de même que ses points de ramification, sont situés dans* X.

Il s'agit de montrer que M est alors localement connexe sans courbe simple fermée.

En effet, si M n'était pas localement connexe, il contiendrait ([5], p. 176, 1) un sous-continu N tel que $\delta(N) > 0$ et étant de la forme

$$N = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} N_n, \tag{23}$$

où N_n sont des sous-continus de M disjoints. Il existerait alors un point $a \in N \cap (M - X)$ par suite de l'hypothèse que la dimension de X est nulle. D'après (18) et (10) $a \in M - X$ entraîne l'existence d'un indice i_0 tel que $a \in I_{i_0}$ et d'après (23) $a \in N$ entraîne l'existence dans M d'une suite $\{a_i\}$ de points de $M - N$ tels que $a = \lim_{i\to\infty} a_i$. Si on avait $a_i \in X$ pour une infinité des i, on aurait $a \in X$ au lieu de $a \in M - X$, puisque X est compact. Presque tous les a_i se trouvent par conséquent dans $M - X$, donc sur des segments I_i en vertu de (2) et (3). Mais alors on aurait encore $a \in X$ en vertu de (22).

La connexité locale de M étant ainsi établie, il reste à ajouter que l'absence dans M d'une courbe simple fermée résulte immédiatement du corollaire 1 en vertu de l'hypothèse que $\dim(X) = 0$. Enfin, elle entraîne aussitôt d'après (13) et (14) l'absence dans $M - X$ des bouts et des points de ramification de M.

D'après le corollaire 2, tout ensemble compact $X \subset \mathcal{E}^2$ de dimension 0 se laisse placer sur une *dendrite* M telle que les composantes de $M - X$ soient des segments de droite ouverts. D'après le théorème classique de Riesz-Denjoy (voir par exemple [5], p. 385), un tel X se laisse enfiler en un *arc*. Mais le problème s'impose, si X se laisse alors enfiler aussi en un arc $\overline{L}$ tel que les composantes de $\overline{L} - X$ soient des segments rectilignes ouverts. Le problème reste ouvert.

La construction du continu M, décrite dans la démonstration du théorème 5, suggère la possibilité d'unir les ε_n-composantes de X par des *disques topologiques ouverts* (c'est-à-dire des intérieurs des courbes simples fermées sur le plan) au lieu des segments ouverts. Plus précisément, la question est de remplacer tout segment ouvert I^n_i par un disque ouvert D^n_i tel que la somme $X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m_n-1} \overline{D^n_i}$ soit un continu, les D^n_i soient hors X disjoints deux à deux et chacun ait sur X exactement deux points, à savoir les mêmes points p^n_i et q^n_i qui ont été définis dans (7) et (8). En effet, on a le théorème suivant:

Théorème 6. *Si* $X \subset \mathcal{E}^2$ *est compact et la suite de segments ouverts* $\{I_i\}$ *aux bouts* p_i, q_i *satisfait aux conditions* (2)-(4) *et* (22), *il existe une suite de disques ouverts* $\{D_i\}$ *telle que*

$$L_i \subset D_i \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$\textit{l'ensemble } N = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i} \textit{ est un continu,} \tag{25}$$

$$\overline{D_i} \cap X = \operatorname{Fr}(D_i) \cap X = (p_i, q_i) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

$$\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \operatorname{Fr}(D_i) \cap \operatorname{Fr}(D_j) \subset (p_i, q_i) \quad \textit{pour} \quad i \neq j, \tag{27}$$

$$\operatorname*{Lim}_{k\to\infty} \overline{D_{i_k}} \subset X \textit{ pour toute suite } \{i_k\}. \tag{28}$$

Démonstration. Par suite de (3) et (22), on peut entourer tout point $p \in I_i$, pour un i quelconque, d'un cercle $Q_i(p, r_p)$ dont le rayon r_p est choisi de façon que l'on ait

$$\overline{Q_i(p, r_p)} \cap X = \emptyset \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

$$\overline{Q_i(p, r_p)} \cap \overline{I_j} = \emptyset \quad \text{pour tous les } j \neq i. \tag{30}$$

Posons

$$D_i = \bigcup_{p \in I_i} Q_i(p, r_p). \tag{31}$$

Ainsi défini, D_i est un disque topologique ([3]) satisfaisant à (24). Pour simplifier la démonstration, soumettons encore le choix des rayons r_p à la condition supplémentaire

$$\lim_{i\to\infty} (\sup_{p \in I_i} r_p) = 0. \tag{32}$$

Nous allons montrer que

$$\overline{D_i} = \bigcup_{p \in I_i} \overline{Q_i(p, r_p)} \cup (p_i, q_i). \tag{33}$$

([3]) C'est le seul endroit de la démonstration où intervient l'hypothèse que les $\overline{I_i}$ sont des segments rectilignes et non pas des arcs (ou des continus) arbitraires, ce qui compliquerait le raisonnement, car les D_i défini par (31) pourraient alors avoir des compléments non-connexes.

En effet, on a d'après (3) et (24) $(p_i, q_i) \subset \overline{I_i} \subset \overline{D_i}$, et d'après (31) $\bigcup_{p \in I_i} \overline{Q_i(p, r_p)} \subset \overline{D_i}$, donc $\bigcup_{p \in I_i} \overline{Q_i(p, r_p)} \cup (p_i, q_i) \subset \overline{D_i}$. Pour établir l'inclusion inverse, considérons une suite de points $a_n \in \overline{D_i}$ et le point

(34) $$a = \lim_{n \to \infty} a_n .$$

Si $a \in \bigcup_{p \in I_i} \overline{Q_i(p, r_p)}$, l'inclusion en question est triviale. Dans le cas contraire, il n'y a dans tout $Q_i(p, r_p)$ qu'un nombre fini des a_n. Entourons les deux bouts de $\overline{I_i}$ de cercles quelconques. L'ensemble compact $\overline{I_i} - [Q(p_i, \varepsilon) \cup Q(q_i, \varepsilon)]$ se trouve donc couvert, pour tout $\varepsilon > 0$, par un nombre fini des cercles $Q_i(p, r_p)$, d'où $a_n \in [Q(p_i, \varepsilon) \cup Q(q_i, \varepsilon)]$ à partir d'un certain n. Il en résulte en vertu de (34) que l'on a soit $a = p_i$, soit $a = q_i$. L'égalité (33) est ainsi établie.

Elle entraîne d'après (30), en multipliant par $\overline{I_j}$ les deux membres de l'égalité (33), que $\overline{D_i} \cap \overline{I_j} \subset (p_i, q_i)$ pour tout $i \neq j$, d'où $\overline{D_i} \cap I_j = \emptyset$.

On peut évidemment choisir successivement, pour $j = 1, 2, \ldots$, les rayons r_p des cercles $Q_j(p, r_p)$ de façon à avoir pour tout $i \neq j$

(35) $$\overline{D_i} \cap \overline{Q_j(p', r_{p'})} = \emptyset \quad \text{pour les points} \quad p' \in I_j ,$$

donc à plus forte raison en vertu de (33)

(36) $$\overline{Q_i(p, r_p)} \cap \overline{Q_j(p', r_{p'})} = \emptyset \quad \text{pour tout } p \in I_i \text{ et tout } p' \in I_j .$$

On a en vertu de (29) et (31) $D_i \cap X = \emptyset$ pour $i = 1, 2, \ldots$, d'où $\overline{D_i} \cap X = \operatorname{Fr}(D_i) \cap X$. Il en résulte aussitôt la thèse (26) en multipliant par X les deux membres de l'égalité (33) et en appliquant (29).

On a donc $D_i \cap D_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ d'après (31) et (36), d'où $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \operatorname{Fr}(D_i) \cap \operatorname{Fr}(D_j)$. Il en résulte la thèse (27) en multipliant par $\overline{D_j}$ les deux membres de l'égalité (33) et en appliquant (35).

Pour établir la thèse (28), nous allons montrer d'abord que [4]

(37) $$\operatorname{dist}(\overline{D_i}, \overline{I_i}) = \sup_{p \in I_i} r_p .$$

En effet, on a $\sup_{x' \in \overline{D_i}} \varrho(x', \overline{I_i}) = \sup_{p \in I_i} r_p$ d'après la définition (31) de D_i et il résulte de (24), que $\varrho(\overline{D_i}, x'') = 0$ pour tout $x'' \in \overline{I_i}$. On a par conséquent $\operatorname{dist}(\overline{D_i}, \overline{I_i}) = \max[\sup_{x' \in \overline{D_i}} \varrho(x', \overline{I_i}), \sup_{x'' \in \overline{I_i}} \varrho(\overline{D_i}, x'')] = \max[\sup_{p \in I_i} r_p, 0]$, c'est-à-dire l'égalité (37).

[4] $\operatorname{dist}(X', X'')$ désigne la distance de Hausdorff entre ensembles X' et X'', c'est-à-dire $\operatorname{dist}(X', X'') = \max[\sup_{x' \in X'} \varrho(x', X''), \sup_{x'' \in X''} \varrho(X', x'')]$ (voir [4], p. 106).

Il en résulte d'après (32) que $\lim_{i \to \infty} \operatorname{dist}(\overline{D_i}, \overline{I_i}) = 0$. La convergence topologique d'une suite de disques fermés $\{\overline{D_{i_k}}\}$ équivaut donc à celle de segments $\{\overline{I_{i_k}}\}$ et on a $\operatorname{Lim}_{k \to \infty} \overline{D_{i_k}} = \operatorname{Lim}_{k \to \infty} \overline{I_{i_k}}$. La thèse (28) en résulte en vertu de (22).

Enfin, X étant compact, l'ensemble $N = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i}$ l'est également en vertu de (28). En vertu de (24) et (20), on a $N = (X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{I_i}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i} = M \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i}$ et $M \cap \overline{D_i} \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Or M étant un continu d'après (2) et tout $\overline{D_i}$ l'étant par définition, N est connexe (voir [5], p. 82, 2). On a donc aussi la thèse (25).

Il est à remarquer qu'en remplaçant dans le théorème 6, qui vient d'être démontré, l'hypothèse (22) par (5), dont elle résulte, on peut remplacer la thèse (28) par une nouvelle thèse, dont elle résulte, à savoir par

(38) $$\lim_{i \to \infty} \delta(\overline{D_i}) = 0.$$

En effet, on a en vertu de (29) et (31) $\delta(\overline{D_i}) \leqslant \varrho(p_i, q_i) = \delta(\overline{I_i})$, puisque p_i et q_i sont les bouts du segment $\overline{I_i}$. Par conséquent,

(39) *l'égalité* (5) *entraîne l'égalité* (38).

Le théorème 6 se laisse généraliser un peu. On peut montrer notamment que si les composantes I_i de $M - X$ sont des arcs ouverts au lieu d'être des segments rectilignes ouverts, et même lorsqu'ils sont des continus assujettis à certaines conditions naturelles, il existe une suite de disques $\{D_i\}$ satisfaisant aux conditions (24)-(28). Cependant, cette démonstration comporterait (voir le renvoi ([3]), p. 73) des constructions plus longues et fastidieuses.

Théorème 7. *Soit, pour un* $X \subset \mathcal{E}^2$ *compact,* $\{D_i\}$ *une suite de disques assujettis aux conditions* (25)-(28). *Alors, quelle que soit la suite des continus* $\{P_i\}$ *satisfaisant à la condition*

(40) $$(p_i, q_i) \subset P_i \subset \overline{D_i} ,$$

l'ensemble

(41) $$P = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$$

est un continu.

Démonstration. L'hypothèse que $P_i \subset \overline{D_i}$ entraîne d'après (28) que $\operatorname{Lim}_{k \to \infty} P_{i_k} \subset X$. Or X étant compact, il en est donc de même de P d'après l'égalité (41). On a, en appliquant successivement les deux inclusions

(40) et l'égalité (41), $P_i = (p_i, q_i) \cup P_i = (p_i, q_i) \cup \overline{D_i} \cap P \cup \overline{D_i} \cap (\bigcup_{j\neq i}$
$= \overline{D_i} \cap X \cup \overline{D_i} \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = \overline{D_i} \cap P$. Une décomposition $P = A \cup B$ en et B non-vides, disjoints et compacts donnerait donc $P_i = P_i \cap$. $= \overline{D_i} \cap A \cup \overline{D_i} \cap B$, d'où soit $\overline{D_i} \cap A \neq \emptyset$, soit $\overline{D_i} \cap B \neq \emptyset$, puisque P est connexe par définition. En vertu de (41), il en résulterait donc la décomposition $N = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i} = X \cap P \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{D_i} = (X \cap A \cup \bigcup_{\overline{D_i} \cup A \neq \emptyset} \overline{D_i})$ $\cup (X \cap B \cup \bigcup_{\overline{D_i} \cup B \neq \emptyset} \overline{D_i})$ en deux ensembles non-vides disjoints et compacts, car la limite topologique de toute suite des disques fermés $\overline{D_i}$ qui ont des points communs avec l'ensemble compact A ou B respectivement en a également et ils appartiennent à X en vertu de (28). Cependant, une telle décomposition de N contredit (25).

THÉORÈME 8. *Soit, pour un $X \subset \mathcal{E}^2$ compact, $\{D_i\}$ une suite de disques assujettis aux conditions* (25)-(27) *et* (38). *Alors, quelles que soient les suites de continus $\{P_i\}$ et $\{P'_i\}$ telles que pour $i = 1, 2, \ldots$*

(42) $$P_i \text{ est homéomorphe à } P'_i,$$

(43) $$(p_i, q_i) \subset P_i \subset \overline{D_i} \quad \text{et} \quad (p_i, q_i) \subset P'_i \subset \overline{D_i},$$

les ensembles

(44) $$P = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \quad \text{et} \quad P' = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P'_i$$

sont homéomorphes.

Démonstration. Il s'agit d'établir l'existence d'une homéomorphie h telle que $h(P) = P'$.

Soit pour $i = 1, 2, \ldots$, conformément à (42), h_i une homéomorphie telle que

(45) $$h_i(P_i) = P'_i,$$

(46) $$h_i(p_i) = p_i \quad \text{et} \quad h_i(q_i) = q_i.$$

Posons

(47) $$h \mid P_i = h_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

(48) $$h(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in X - \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i.$$

Il vient d'abord

(49) $$h(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

En effet, on a pour $i = 1, 2, \ldots$ d'après (43) $(p_i, q_i) = (p_i, q_i) \cap X \subset P_i \cap X \subset \overline{D_i} \cap X$, d'où en vertu de (26) $P_i \cap X = (p_i, q_i)$. Il en résulte (49) d'après (46)-(48).

Ensuite, $h(P) = P'$. On a en effet, en appliquant successivement (44), (49), (45) et (44), $h(P) = h(X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = h(X) \cup h(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i) = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} h(P_i)$ $= X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} P'_i = P'$.

En outre, la fonction h est biunivoque. Elle l'est en effet d'après (47) dans chaque P_i et d'après (48) dans $X - \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$; en vertu de (44), elle l'est donc encore dans P tout entier.

Enfin, la fonction h est continue. Admettons en effet que $a_{i_k} \in P_{i_k}$ et $a = \lim_{k\to\infty} a_{i_k}$. On a donc en vertu de (43) $a_{i_k} \in \overline{D_{i_k}}$, d'où $a \in X$ en vertu de la conséquence facile (28) de l'hypothèse (38). Il en résulte aussitôt en vertu de (49) que

(50) $$h(a) = a.$$

Il s'agit de montrer que

(51) $$h(a) = \lim_{k\to\infty} h(a_{i_k}).$$

Or on a $h(a_{i_k}) \in P'_{i_k}$ en vertu de (45); vu que $a_{i_k} \in P_{i_k}$, on conclut de l'hypothèse (43) que $(a_{i_k}, h(a_{i_k})) \subset \overline{D_{i_k}}$. En vertu de l'hypothèse (38), on a donc $\lim_{k\to\infty} a_{i_k} = \lim_{k\to\infty} h(a_{i_k})$, c'est-à-dire $a = \lim_{k\to\infty} h(a_{i_k})$, d'où l'égalité (51) en vertu de (50). La continuité da h est ainsi établie dans $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i}$, et dans X elle résulte trivialement de (49). La fonction h est donc continue dans la somme de ces ensembles (voir [4], p. 75, 3) et à plus forte raison dans P d'après (44).

In en résulte, P étant compact en vertu de théorème 7, que h est une homéomorphie.

§ 3. Problème de K. Haman; solution et généralisations.

Nous allons commencer par la décomposition des disques topologiques en arcs.

LEMME. *D étant un disque, il existe pour tout couple p, q de points de $\mathrm{Fr}(D)$ liés par un arc $\overline{L} \subset \overline{D}$, une famille de $2^{\aleph_0}$ arcs $\overline{L^t}$ tels que*

(1) $$\overline{D} = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \overline{L^t},$$

(2) $$t_1 \neq t_2 \quad \textit{entraîne} \quad \overline{L^{t_1}} \cap \overline{L^{t_2}} = (p, q),$$

(3) $$\overline{L} = \overline{L^t} \quad \textit{pour une valeur de } t.$$

Démonstration. Soit Q l'intérieur du cercle géométrique $\bar{Q}$. Soit d'abord h une homéomorphie quelconque (par exemple une transformation conforme) du cercle $\bar{Q}$ en disque fermé $\bar{D}$. Par conséquent,

$$(4)\qquad p = h(p') \text{ et } q = h(q') \quad \text{où} \quad p', q' \in \mathrm{Fr}(Q)\,.$$

On a notoirement

$$(5)\qquad \bar{Q} = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} \overline{L'^t}$$

où $\overline{L'^t}$ sont des arcs tels que

$$(6)\qquad t_1 \neq t_2 \quad \text{entraîne} \quad \overline{L'^{t_1}} \cap \overline{L'^{t_2}} = (p', q')\,,$$

les points p' et q' étant donnés d'avance. La famille des arcs $\overline{L'^t}$ peut être choisie par exemple de façon que $\overline{L'^t}$ soit une fonction continue de t pour $0\leqslant t\leqslant 1$ et que $\overline{L'^0}$ et $\overline{L'^1}$ soient les deux arcs de la circonférence $\mathrm{Fr}(Q)$ qui unissent p' et q'. Soit

$$(7)\qquad \overline{L^t} = h(\overline{L'^t}) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant 1\,.$$

On en conclut en vertu de (5) que $\bar{D} = h(\bar{Q}) = h(\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} \overline{L'^t}) = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} h(\overline{L'^t}) = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} \overline{L^t}$. On a donc (1).

On a en même temps, en appliquant successivement (4), (6) et (7), $\overline{L^{t_1}} \cap \overline{L^{t_2}} = h(\overline{L'^{t_1}}) \cap h(\overline{L'^{t_2}}) = h(\overline{L'^{t_1}} \cap \overline{L'^{t_2}}) = h(p', q') = \big(h(p'), h(q')\big) = (p, q)$, c'est-à-dire (2).

Ceci établi, nous allons modifier la construction das arcs $\overline{L^t}$ de façon que l'arc donné $\bar{L}$ soit de leur nombre.

L'arc $\bar{L}$ coupe le disque D en deux disques disjoints D^1 et D^2 tels que $\bar{L} = \mathrm{Fr}(D^1) \cap \mathrm{Fr}(D^2)$. Appliquons à chacun d'eux ce qui vient d'être démontré pour D, à savoir, les décompositions $\overline{D^1} = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1/2} \overline{L^t}$ et $\overline{D^2} = \bigcup_{1/2\leqslant t\leqslant 1} \overline{L^t}$ assujetties à (2) et dans lesquelles $\bar{L} = \overline{L^{1/2}}$. Alors la décomposition $\bar{D} = \overline{D^1} \cup \overline{D^2} = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1/2} \overline{L^t} \cup \bigcup_{1/2\leqslant t\leqslant 1} \overline{L^t} = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} \overline{L^t}$ satisfait manifestement à toutes les trois conditions (1)-(3).

Le lemme qui vient d'être démontré se laisse généraliser: la décomposition des disques en arcs peut être rendue continue et même les deux homémorphies transformant le cercle $\bar{Q}$ en disques fermés $\overline{D^1}$ et $\overline{D^2}$ peuvent être, avec quelques précautions convenables, définies de façon qu'elles coïncident sur l'arc $\overline{L^{1/2}}$ et forment ainsi une seule homéomorphie entre $\bar{Q}$ et le disque fermé $\bar{D}$ tout entier.

Soit T la famille des $2^{\aleph_0}$ ensembles $\{t_i\}$ au plus dénombrables et deux à deux disjoints en lesquels le segment $0\leqslant t\leqslant 1$ est décomposé d'une façon quelconque ([5]). La suite $\{t_i\}$ peut donc n'avoir qu'un nombre fini de termes différents, et même consister d'un seul terme répété une infinité de fois.

Les théoremes 5-8 peuvent être alors résumés comme suit. En vertu du théorème 5, il existe, pour tout $X\subset \mathcal{E}^2$ compact, une suite $\{I_i\}$ de segments ouverts satisfaisant aux conditions (2)-(5) du § 2 et à plus forte raison à la conséquence (22) de (5). En vertu du théorème 6, il existe donc une suite de disques $\{D_i\}$ satisfaisant aux conditions (24)-(28) et à plus forte raison à la condition (38), qui est une conséquence de (5) d'après (39). En vertu du lemme, chacun des disques fermés $\overline{D_i}$ peut être décomposé en $2^{\aleph_0}$ arcs unissant les points p_i, q_i des composantes différentes de X et disjoints hors ces points. En vertu du théorème 7, les arcs $\overline{L_i} \subset \overline{D_i}$ choisis arbitrairement parmi eux et ajoutés à X donnent des continus, qui sont homéomorphes deux à deux en vertu du théorème 8. On a donc finalement le théorème que voici:

THÉORÈME 9. *Étant donné un ensemble compact $X\subset \mathcal{E}^2$, il existe une famille de $2^{\aleph_0}$ sur-continus $M_{\{t_i\}}$ de X où $\{t_i\}\in T$, deux à deux homéomorphes et tels que*

$$(8)\qquad M_{\{t_i\}} = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{L_i^{t_i}} \quad \textit{où } \overline{L_i^{t_i}} \textit{ est un arc,}$$

$$(9)\qquad M_{\{t_i'\}} \cap M_{\{t_i''\}} = X \quad \textit{pour tout couple de suites distinctes,}$$

$$(10)\qquad \textit{l'ensemble} \bigcup_{\{t_i\}\in T} M_{\{t_i\}} \quad \textit{est un continu}\,.$$

Il en résulte en particulier que $X = \bigcap_{\{t_i\}\in T} M_{\{t_i\}}$ et qu'il y a $2^{\aleph_0}$ représentations distinctes de cette forme.

K. Haman a posé le problème: est-ce que tout ensemble compact $X\subset \mathcal{E}^2$ est partie commune de deux sous-continus de $\mathcal{E}^2$?

Le théorème 9 en est une solution affirmative et manifestement bien plus générale. On peut pourtant la généraliser davantage si l'on s'appuie sur la généralisation du lemme, mentionnée p. 77. On peut ajouter alors au théorème 9 deux thèses supplémentaire qui suivent:

(11) *la famille des $M_{\{t_i\}}$ est continue,*

(12) *le continu $M_{\{t_i\}}$ où $t_i = 1/2$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$* (c'est-à-dire le continu $M_{(1/2)} = X \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{L_i^{1/2}}$) *peut être fixé d'avance.*

Il est à remarquer que parmi les continus $M_{\{t_i\}}$, il existe d'après leur construction un M tel que $M-X$ se compose de segments ouverts

([5]) Pour l'existence de décomposition effectives en de tels ensembles, voir par exemple [3], p. 252, 1°, où tous ces ensembles sont dénombrables denses.

disjoints. En vertu du théorème 9, tous les continus $M_{\{t_i\}}$ (de chacune de leurs $2^{\aleph_0}$ familles) sont homéomorphes. En particulier, si M est une dendrite, il en est donc de même de tout $M_{\{t_i\}}$.

En conséquence, si $\dim(X) = 0$, on peut, en vertu du corollaire 2, remplacer dans l'énoncé du théorème 9 le mot *sur-continu* par les mots *dendrite dont les bouts et les points de ramification appartiennent à* X.

La question est moins simple pour les X enfilables. En vertu du théorème 1, elle se réduit à des X compacts de dimension 0. Or un théorème permettant enfiler tout X compact de dimension 0 en un arc $\bar{L}$ tel que $\bar{L}-X$ se compose de segments ouverts disjoints (cf. le problème mentionné p. 72) permettrait, tout comme pour les dendrites, de remplacer dans l'énoncé du théorème 9 le mot *sur-continu* par le mot *arc* et avoir ainsi une généralisation considérable du théorème de Riesz-Denjoy. Mais à défaut de ce moyen de procéder, et celui consistant à enfermer dans des disques les arcs ouverts non-rectilignes (signalé p. 73 comme bien plus compliqué) n'ayant pas été utilisé, cette généralisation du théorème de Riesz-Denjoy reste un problème ouvert.

Ouvrages cités

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[2] B. Knaster, *Sur la fixation des décompositions*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III, 4 (1956), p. 193-196.

[3] — et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), p. 206-253.

[4] C. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Matem., Warszawa, 1958.

[5] — *Topologie II*, Monogr. Matem., Warszawa-Wrocław, 1950.

[6] A. Lelek, *Fixations of sets in Euclidean spaces*, ce volume, p. 87-109.

[7] — et D. Zaremba, *Dimensions of irreducible continua and fixations of components in compact spaces*, ce volume, p. 81-86.

[8] D. Zaremba, *Sur la fixation et l'enfilage des ensembles compacts*, Bull. Acad. Polon. des Sc., Cl. III, 1 (1961), p. 13-15.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 24. 6. 1961

Dimensions of irreducible continua and fixations of components in compact spaces

by

A. Lelek and **D. Zaremba** (Wrocław)

This note establishes a relation (see Theorem 1 below) between the dimension of a continuum X (i.e. connected compact metric space), irreducible between two points, and the dimension of fibres in X (1). As applications there are given two theorems on the existence, in a compact metric space X, of a compact subset which has dimension less than an integer n and intersects every component of X provided that all these components have large diameters or converge to points of a compact set with dimension less than n, and X satisfies a certain condition (see Theorems 3 and 4). That condition holds for subsets of polyhedra, and in this way generalizations of the results of D. Zaremba [4] concerning plane sets are obtained (see Corollaries 1 and 2).

LEMMA. *If* $\varepsilon > 0$, X *is a compact metric space and* $n \leqslant \dim_p X$, *then there exists a continuum* $C \subset X$ *such that* $\delta(\{p\} \cup C) < \varepsilon$ *and* $n \leqslant \dim C$.

Proof. Let Q be a closed solid sphere in X with centre p and radius $\varepsilon/4$. Hence $n \leqslant \dim Q$ and we infer (see [2], p. 106) that there is a component C of Q, satisfying $n \leqslant \dim C$. Thus C is the desidered continuum.

THEOREM 1. *If* X *is a continuum irreducible between two points* a, b *and* $2 \leqslant n \leqslant \dim X$, *then there exists a fibre* $F \subset X$ *such that* $n \leqslant \dim F$.

Proof. Let $g\colon X \to \mathcal{I}$ be such a continuous mapping of X into the segment $\mathcal{I} = [0,1]$ (2) that the sets $g^{-1}(t)$ coincide with the fibres of X (see [2], p. 139). If $g(X)$ is a one-point set, then $F = X$ and Theorem 1 follows. Thus we may assume that $g(X) = \mathcal{I}$, $g(a) = 0$ and $g(b) = 1$.

Since X is a compact metric space and $n \leqslant \dim X$, the Menger Theorem (see [2], p. 66) implies the inequality $n \leqslant \dim[X - X_{(n-1)}]$, where $X_{(n-1)} = \{x\colon x \in X, \dim_x X \leqslant n-1\}$. But $X_{(n-1)}$ is a G_δ-set in X (see [1], p. 164), whence $X - X_{(n-1)} = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$, where Y_i are closed

(1) *Fibres* of an irreducible continuum correspond to its "tranches" in the sense of [2], p. 139. The notation from [1] and [2] is adopted here.

(2) If $t_1 \leqslant t_2$ are real numbers, then we denote by $[t_1, t_2]$ the closed interval $\{t\colon t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$.