О множествах точек сходимости последовательности непрерывных функций к бесконечности

Ян С. Липинский (Лодзь)

Пусть $f_n(x)$ последовательность непрерывных функций определенных в пространстве $\mathcal{E}$ вещественных чисел. Пусть

(1) $$F_1 = \{x\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\},$$

(2) $$F_2 = \{x\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\}.$$

Тогда, как известно, (см. [4], стр. 259)

(3) $$F_1 = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\colon f_n(x)\geqslant m\};\qquad F_2 = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\colon f_n(x)\leqslant -m\}.$$

Так как множества $\{x\colon f_n(x)\geqslant m\}$, $\{x\colon f_n(x)\leqslant -m\}$ замкнуты, то

(4) $$F_1 \in F_{\sigma\delta},\qquad F_2 \in F_{\sigma\delta}.$$

Очевидно, что

(5) $$F_1 \cap F_2 = 0.$$

Пусть $F \in F_{\sigma\delta}$. Х. Хан [3], а также В. Серпинский [2] доказали, что существует последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ такая, что $F = \{x\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\}$ (см. также [4], стр. 261-262).

Положим $\varphi_n(x) = \left[\max\left(n^{-1}, |f_n(x)|\right)\right]^{-1}$. Тогда имеем $F = \{x\colon \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = +\infty\}$. Таким образом мы видим, что множество всех тех точек, где последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к $+\infty$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$. И обратно, всякое множество типа $F_{\sigma\delta}$ является множеством сходимости к $+\infty$ некоторой последовательности непрерывных функций.

Возникает вопрос, если выполнены условия (4) и (5), то существует ли последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, для которой справедливо (1) и (2)?

И. П. Корнфельд [1] заметил, что ответ на этот вопрос — отрицательный. В самом деле, множества $F_1 \subset E^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\colon f_n(x)\geqslant 1\}$, $F_2 \subset E^{(2)} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{x\colon f_n(x)\leqslant -1\}$. Очевидно, что $E^{(1)} \in F_\sigma$, $E^{(2)} \in F_\sigma$ и $E^{(1)} \cap E^{(2)} = 0$.

Используя терминологию Н. Н. Лузина мы можем заключить, что множества F_1 и F_2 необходимо отделимы множествами типа F_σ. И. П. Корнфельд нашел также некоторые достаточные условия для пары множеств F_1, F_2, но они отличаются от необходимых.

В настоящей работе мы доказываем, что указанные необходимые условия являются достаточными, т. е. для всяких двух множеств F_1 и F_2 типа $F_{\sigma\delta}$ и отделимых множествами типа F_σ, найдется последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, для которой справедливо (1) и (2).

Прежде чем доказать эту теорему, докажем несколько лемм.

Лемма I. *Пусть $E \in F_\sigma$ и кроме того, E — множество первой категории. Тогда существуют последовательности открытых множеств G_n и замкнутых ограниченных множеств F_n такие, что*

$$F_n \subset F_{n+1}, \tag{6}$$

$$F_n \subset G_n, \tag{7}$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \underline{\lim}\, G_n = \underline{\lim}\, \overline{G}_n. \tag{8}$$

Доказательство. Множество E можно представить в виде $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n — замкнутые, ограниченные и нигде не плотные множества. Возможно, что множества A_n, начиная с некоторого номера, пусты. Пусть $(a_{n-1,i}, b_{n-1,i})$ компоненты открытого множества $\mathcal{E}\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$. Так как множество A_n нигде не плотно, то $(a_{n-1,i}, b_{n-1,i}) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \langle \alpha_{n-1,i,j}, \beta_{n-1,i,j}\rangle$, где $\alpha_{n-1,i,j} \notin A_n$, $\beta_{n-1,i,j} \notin A_n$, причем сегменты $\langle \alpha_{n-1,i,j}, \beta_{n-1,i,j}\rangle$ ограничены и без общих внутренних точек. Положим $A_{n,i,j} = A_n \cap \langle \alpha_{n-1,i,j}, \beta_{n-1,i,j}\rangle$. Тогда $A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k = \bigcup\limits_{i,j} A_{n,i,j}$, где $A_{n,i,j}$ замкнуты, ограничены и без общих точек. $A_{n,i,j}$ также не имеют общих точек с A_k, где $k < n$ и с $A_r \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r-1} A_i$, где $r > n$. Очевидно, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \Big[\bigcup_{n=2}^{\infty} \big(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\big)\Big] = A_1 \cup \Big[\bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{i,j} A_{n,i,j}\Big].$$

Следовательно, E — конечная или счетная сумма замкнутых, ограниченных множеств без общих точек:

$$E = \bigcup B_n, \tag{9}$$

где $B_1 = A_1$; $B_k = A_{r_k, i_k, j_k}$ (для $k > 1$); $B_i \cap B_j = 0$ (для $i \neq j$). Пусть $F_i = \bigcup\limits_{n=1}^{i} B_n$. Очевидно, что F_i замкнутые, ограниченные множества удовлетворяющие (6) и, кроме того,

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i. \tag{10}$$

Возможны два случая: 1) Последовательность B_n конечна, 2) Последовательность B_n бесконечна.

В первом случае E замкнутое множество. Пусть в этом случае $G_n = \{x\colon \varrho(x, E) < n^{-1}\}$. Тогда очевидно, что G_n имеют свойства, указанные в лемме. Остается доказать лемму во втором случае. Пусть $d_n = \min\limits_{i<j\leqslant n+1} \varrho(B_i, B_j)$. Следовательно, $d_n > 0$, $d_n \geqslant d_{n+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1} d_n = 0. \tag{11}$$

Для натуральных чисел n, j $(n \geqslant j)$ определяем множества:

$$G_{n,j} = \{x\colon \varrho(x, B_j) < (n+1)^{-1} d_n\}, \tag{12}$$

$$G_n = \bigcup_{j=1}^{n} G_{n,j}.$$

Следовательно, $F_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{n,j} = G_n$. Таким образом доказано (7). Когда n зафиксированно, то в силу (12) и определения чисел d_n замыкания множеств $G_{n,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ не имеют попарно общих точек. Кроме того

$$G_{n,j} \supset \overline{G}_{n+1,j}. \tag{13}$$

Пусть теперь $x_0 \in E$. Тогда существует такой индекс j_0, что $x_0 \in B_{j_0}$. Так как для $n \geqslant j_0$ имеем $x_0 \in F_n \subset G_n$, то $x_0 \in \underline{\lim}\, G_n$. Следовательно

$$E \subset \underline{\lim}\, G_n. \tag{14}$$

Далее, очевидно, что

$$\underline{\lim}\, G_n \subset \underline{\lim}\, \overline{G}_n. \tag{15}$$

Пусть

$$x_1 \in \underline{\lim}\, \overline{G}_n. \tag{16}$$

Тогда существует такое число N, что для $n \geqslant N$ имеем $x_1 \in \overline{G}_n$ и, следовательно, существует такой j_1, что

$$x_1 \in \overline{G}_{N,j_1}. \tag{17}$$

Пусть уже доказано, что для некоторого $n \geqslant N$ имеем $x_1 \in \overline{G}_{n,j_1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\varrho(x_1, \overline{G}_{n+1,n+1}) &\geqslant \varrho(\overline{G}_{n,j_1}, \overline{G}_{n+1,n+1}) \geqslant \\ &\geqslant \varrho(B_{j_1}, B_{n+1}) - (n+1)^{-1} d_n - (n+2)^{-1} d_{n+1} \geqslant \\ &\geqslant d_n - (n+1)^{-1} d_n - (n+2)^{-1} d_n = [1 - (n+1)^{-1} - (n+2)^{-1}] d_n > 0.\end{aligned}$$

Следовательно $x_1 \notin \overline{G}_{n+1,n+1}$. Так как множества $\overline{G}_{n,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ без общих точек и верно (13), то $x_1 \notin \overline{G}_{n+1,i}$ для $n \geqslant i \neq j_1$. Следовательно $x_1 \in \overline{G}_{n+1,j_1}$. Тогда из (17) по индукции

$$x_1 \in \bigcap_{i=N}^{\infty} \overline{G}_{i,j_1}. \tag{18}$$

Докажем, что $x_1 \in B_{j_1}$. В самом деле, пусть $x_1 \notin B_{j_1}$. В силу (11) существует такое натуральное число r, что $(r+1)^{-1}d_r < \varrho(x_1, B_{j_1})$, откуда получаем $x_1 \notin \bar{G}_{r,j_1}$ и в силу (13) $x_1 \notin G_{i,j_1}$ для $i \geqslant r$. Это противоречит включению (18). Таким образом $x_1 \in B_{j_1}$, и в силу (9) $x_1 \in E$. В силу (16) $\underline{\lim}\,\bar{G}_n \subset E$. Составляя это последнее включение (14), (15) и (10), получаем (8). Так как (6) и (7) было доказано раньше, то лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $A \in F_\sigma$. Тогда существуют последовательности открытых множеств P_n и замкнутых, ограниченных множеств K_n такие, что*

(19) $$K_n \subset K_{n+1},$$

(20) $$K_n \subset P_n,$$

(21) $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \underline{\lim}\, P_n = \underline{\lim}\, \bar{P}_n.$$

Доказательство. Пусть D — множество всех внутренних точек множества A. Положим $L_0 = 0$ и $L_n = (-n, n) \cap \{x\colon \varrho(x, \mathcal{E}\setminus D) > n^{-1}\}$. Тогда $\bar{L}_n \subset L_{n+1}$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{L}_n$, причем L_n — открытые множества. Множество $E = A\setminus D$ есть F_σ первой категории. В силу леммы 1 существуют множества G_n и F_n, имеющие свойства указанные в этой лемме. Пусть

(22) $$K_n = \bar{L}_{n-1} \cup F_n; \qquad P_n = L_n \cup G_n.$$

Очевидно, что (19) и (20) выполняется, причем K_n — замкнутые, ограниченные, P_n открытые множества. Далее, имеем $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{L}_{n-1}$,

(23) $$A = E \cup D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cup \bar{L}_{n-1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Пусть $x_0 \in A$. Тогда либо $x_0 \in D$, либо $x_0 \in E$. В первом случае $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = \lim L_n \subset \underline{\lim}\, P_n$. Во втором случае $x_0 \in \underline{\lim}\, G_n \subset \underline{\lim}\, P_n$. Таким образом,

(24) $$A \subset \underline{\lim}\, P_n.$$

Очевидно, что

(25) $$\underline{\lim}\, P_n \subset \underline{\lim}\, \bar{P}_n.$$

Пусть теперь

(26) $$x_1 \in \underline{\lim}\, \bar{P}_n.$$

Тогда существует такое число N, что для $n \geqslant N$ — $x_1 \in \bar{P}_n$. Либо существует такое число $M \geqslant N$, что для $n \geqslant M$ — $x_1 \in \bar{L}_n$, либо такого числа M не существует. В первом случае $x_1 \in \bigcap_{n=M}^{\infty} \bar{L}_n \subset \underline{\lim}\, \bar{L}_n = D$. Во втором случае существуют числа $r_k > N$ такие, что $x_1 \notin \bar{L}_{r_k}$ и $r_k \to \infty$. Так как последовательность $\bar{L}_n$ возрастающая, то $x_1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{L}_n$. В таком случае, в силу (22) и (26) для $n \geqslant N$ будем иметь $x_1 \in \bar{G}_n$ и, следовательно, $x_1 \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \bar{G}_n \subset \underline{\lim}\, \bar{G}_n = E$ (в силу (8) леммы 1). Мы получаем таким образом, принимая во внимание (23), $\underline{\lim}\, \bar{P}_n \subset E \cup D = A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Используя (24) и (25), получаем (21).

Лемма 3. *Пусть $E^{(1)} \in F_\sigma$, $E^{(2)} \in F_\sigma$ и $E^{(1)} \cap E^{(2)} = 0$. Тогда существуют открытые множества $L_j^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots)$ и замкнутые ограниченные множества $K_j^{(i)}$ удовлетворяющие условиям*

(27) $$\bar{L}_j^{(1)} \cap \bar{L}_j^{(2)} = 0,$$

(28) $$K_j^{(i)} \subset K_{j+1}^{(i)},$$

(29) $$K_j^{(i)} \subset L_j^{(i)},$$

(30) $$E^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^{(i)} = \underline{\lim}_{j\to\infty}\, L_j^{(i)} = \underline{\lim}_{j\to\infty}\, \bar{L}_j^{(i)}.$$

Доказательство. В силу леммы 2 существуют открытые множества $P_j^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots)$ и замкнутые ограниченные множества $K_j^{(i)}$ такие, что $K_j^{(i)} \subset K_{j+1}^{(i)}$, $K_j^{(i)} \subset P_j^{(i)}$ и

$$E^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^{(i)} = \underline{\lim}_{j\to\infty}\, P_j^{(i)} = \underline{\lim}_{j\to\infty}\, \bar{P}_j^{(i)}.$$

Так как $E^{(1)} \cap E^{(2)} = 0$, то $K_j^{(1)} \cap K_j^{(2)} = 0$ и следовательно $\varrho(K_j^{(1)}, K_j^{(2)}) > 0$. Определяем: $L_j^{(i)} = P_j^{(i)} \cap \{x\colon \varrho(x, K_j^{(i)}) < 3^{-1}\varrho(K_j^{(1)}, K_j^{(2)})\}$. Очевидно, множества $L_j^{(i)}$ открытые и имеют свойства (27), (28) и (29). Так как $K_j^{(i)} \subset L_j^{(i)} \subset \bar{L}_j^{(i)} \subset \bar{P}_j^{(i)}$, то

$$\underline{\lim}_{j\to\infty}\, K_j^{(i)} \subset \underline{\lim}_{j\to\infty}\, L_j^{(i)} \subset \underline{\lim}_{j\to\infty}\, \bar{L}_j^{(i)} \subset \underline{\lim}_{j\to\infty}\, \bar{P}_j^{(i)} = E^{(i)}.$$

Так как $E^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j^{(i)}$ и $K_j^{(i)} \subset K_{j+1}^{(i)}$, то $E^{(i)} = \underline{\lim}_{j\to\infty}\, K_j^{(i)}$. Отсюда и из предыдущего следует (30).

Лемма 4. *Пусть $E_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где $F_i \subset F_{i+1}$ замкнутые и ограниченные множества, G_i открытые множества таковы, что $F_i \subset G_i$; $E_1 = \underline{\lim}\, G_i$. Тогда если $0 \neq E_2 \in F_\sigma$, $E_2 \subset E_1$, то существует последовательность открытых множеств B_i и последовательность замкнутых ограниченных множеств H_i, такие что*

(31) $$H_i \subset H_{i+1}; \qquad H_i \subset B_i; \qquad \bar{B}_i \subset G_i,$$

(32) $$E_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \underline{\lim}\, B_i = \underline{\lim}\, \bar{B}_i.$$

Доказательство. В силу леммы 2 существуют последовательность открытых множеств P_i и последовательность замкнутых и ограниченных множеств K_i, такие что $K_i \subset K_{i+1}$, $K_i \subset P_i$, $E_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \underline{\lim} P_i$. Определяем: $H_i = F_i \cap K_i$, $B_i = \{x\colon \varrho(x, H_i) < 2^{-1}\varrho(H_i, \mathcal{E}\setminus(G_i \cap P_i))\}$ для $H_i \neq 0$ и $B_i = 0$ для $H_i = 0$. Так как последовательности F_i и K_i не убывают, то $H_i \subset F_{i+1} \cap K_{i+1} = H_{i+1}$.

Разумеется, что $H_i \subset F_i \subset G_i$, $H_i \subset K_i \subset P_i$, следовательно $H_i \subset G_i \cap P_i$. Коль скоро $H_i \neq 0$ (а это конечно для достаточно больших чисел i), то $\varrho(H_i, \mathcal{E}\setminus(G_i \cap P_i)) > 0$, $\overline{B}_i \subset G_i$, $\overline{B}_i \subset P_i$, $H_i \subset B_i$. Таким образом доказано (31).

Так как для каждого i $H_i \subset B_i \subset \overline{B}_i \subset P_i$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \lim H_i \subset \underline{\lim} B_i \subset \underline{\lim} \overline{B}_i \subset \underline{\lim} P_i = E_2 . \tag{33}$$

Пусть $x \in E_2$. Существует такое число N_1, что из $n \geqslant N_1$ следует $x \in K_n$. Так как $E_2 \subset E_1$, то $x \in E_1$. Существует такое число N_2, что из $n \geqslant N_2$ следует $x \in F_n$. Пусть $M = \max(N_1, N_2)$. Тогда $x \in K_M \cap F_M = H_M$. Значит $E_2 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. Отсюда и из (33) следует (32).

Лемма 5. *Пусть $F_i \in F_{\sigma\delta}$ $(i = 1, 2)$, $E^{(i)} \in F_\sigma$, $F_i \subset E^{(i)}$ и $E^{(1)} \cap E^{(2)} = 0$. Тогда существуют открытые множества $L_{j,k}^{(i)}$, $(k = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$ такие, что*

$$\overline{L}_{1,k}^{(1)} \cap \overline{L}_{1,k}^{(2)} = 0 , \tag{34}$$

$$L_{j,k}^{(i)} \supset \overline{L}_{j+1,k}^{(i)} , \tag{35}$$

$$\lim_{j\to\infty} \underline{\lim}_{k\to\infty} \overline{L}_{j,k}^{(i)} = F_i . \tag{36}$$

Доказательство. Имеем $F_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^{(i)}$, где $A_j^{(i)} \in F_\sigma$. Пусть $E_j^{(i)} = E^{(i)} \cap (\bigcap_{k=1}^{j} A_k^{(i)})$. Тогда $E_j^{(i)} \in F_\sigma$,

$$E_j^{(i)} \supset E_{j+1}^{(i)} \tag{37}$$

и $F_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j^{(i)}$. В силу леммы 3 можно предположить, что $E_1^{(i)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{1,k}^{(i)}$, где $K_{1,k}^{(i)}$ замкнутые, ограниченные множества, $K_{1,k}^{(i)} \subset K_{1,k+1}^{(i)}$, существуют открытые множества $L_{1,k}^{(i)}$, такие что $L_{1,k}^{(i)} \supset K_{1,k}^{(i)}$ причем выполняется (34) и $E_1^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} L_{1,k}^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \overline{L}_{1,k}^{(i)}$.

Пусть уже определенны все открытые множества $L_{j-1,k}^{(i)}$ для $i = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots$ и замкнутые, ограниченные множества $K_{j-1,k}^{(i)}$ и пусть $E_{j-1}^{(i)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{j-1,k}^{(i)}$, $K_{j-1,k}^{(i)} \subset K_{j-1,k+1}^{(i)}$, $L_{j-1,k}^{(i)} \supset K_{j-1,k}^{(i)}$, $E_{j-1}^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} L_{j-1,k}^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \overline{L}_{j-1,k}^{(i)}$.

Так как $E_{j-1}^{(i)} \supset E_j^{(i)}$, то из леммы 4 следует существование открытых множеств $L_{j,k}^{(i)}$ и замкнутых ограниченных множеств $K_{j,k}^{(i)}$ таких, что $K_{j,k}^{(i)} \subset L_{j,k}^{(i)}$; $K_{j,k}^{(i)} \subset K_{j,k+1}^{(i)}$

$$\overline{L}_{j,k}^{(i)} \subset L_{j-1,k}^{(i)} , \tag{38}$$

$$E_j^{(i)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_{j,k}^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} L_{j,k}^{(i)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \overline{L}_{j,k}^{(i)} . \tag{39}$$

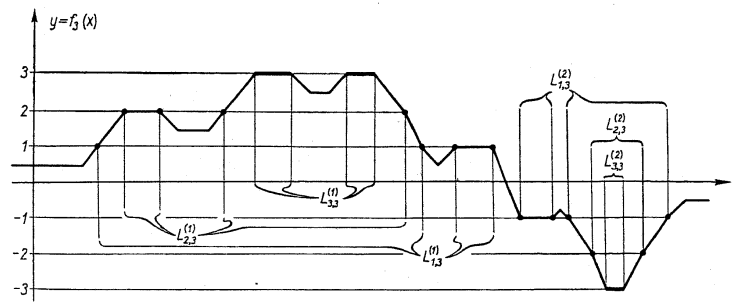
Из (38) следует (35). Из (37) следует $\lim_{j\to\infty} E_j^{(i)} = F_i$. Из этого и из (39) вытекает (36). Так как (34) мы уже получили раньше, то лемма 5 доказана.

Теорема. *Пусть для пары множеств $F_i \in F_{\sigma\delta}$ $(i = 1, 2)$ существует пара множеств $E^{(i)} \in F_\sigma$, удовлетворяющая условиям $F_i \subset E^{(i)}$, $E^{(1)} \cap E^{(2)} = 0$. Тогда существует последовательность непрерывных функции $f_n(x)$ такая, что выполняются равенства* (1) *и* (2).

Доказательство. Множества F_i и $E^{(i)}$ удовлетворяют условиям леммы 5. Пусть множества $L_{j,k}^{(i)}$ обладают свойствами указанными в этой лемме. Так как в силу (35)

$$\overline{L}_{n,n}^{(i)} \subset L_{n-1,n}^{(i)} \subset \overline{L}_{n-1,n}^{(i)} \subset L_{n-2,n}^{(i)} \ldots \subset L_{1,n}^{(i)} \subset \overline{L}_{1,n}^{(i)} ,$$

то множества $\overline{L}_{n,n}^{(i)}$, $\overline{L}_{j,n}^{(i)} \setminus L_{j,n}^{(i)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ не имеют попарно общих точек, откуда на основании (34) и (35) множества $\overline{L}_{n,n}^{(1)}$, $\overline{L}_{n,n}^{(2)}$, $\overline{L}_{j,n}^{(1)} \setminus L_{j,n}^{(1)}$, $\overline{L}_{j,n}^{(2)} \setminus L_{j,n}^{(2)}$, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ не имеют попарно общих точек. Легко видеть, что эти множества замкнуты. Определяем сперва $f_n(x)$ на сумме этих множеств. (На чертеже часть графика составлена из толстых точек и отрезков.)



Полагаем

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{i+1} n & \text{для} \quad x \in \overline{L}_{n,n}^{(i)} , \\ (-1)^{i+1} j & \text{для} \quad x \in \overline{L}_{j,n}^{(i)} \setminus L_{j,n}^{(i)} , \end{cases}$$

где $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$. В каждом составляющем интервале открытого множества $\mathcal{E}\setminus(\overline{L}_{1,n}^{(1)} \cup \overline{L}_{1,n}^{(2)})$, граничные точки которого принадлежат двум разным множествам $\bar{L}_{1,n}^{(1)}$ и $\bar{L}_{1,n}^{(2)}$, функцию $f_n(x)$ определяется так, чтобы она в замыкании этого составляющего интервала была линейной. В составляющем интервале, граничные точки которого принадлежат одному множеству $\bar{L}_{1,n}^{(i)}$ (например, когда составляющая есть полупрямая), функция $f_n(x)$ определяется равенством:

$$f_n(x) = (-1)^{i+1} + (-1)^i \min[2^{-1}, \varrho(x, \bar{L}_{1,n}^{(i)})].$$

Так как в граничных точках этого составляющего интервала функция $f_n(x)$ имеет значение $(-1)^{i+1}$, то $f_n(x)$ непрерывна в замыкании интервала. Кроме того, на этом составляющем интервале функция $f_n(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Надо теперь определить $f_n(x)$ в точках множеств $L_{j-1,n}^{(i)} \setminus \bar{L}_{j,n}^{(i)}$ $(1 < j \leqslant n)$. Эти множества открыты и в граничных точках составляющих интервалов этих множеств функция $f_n(x)$ уже определена, так как эти граничные точки принадлежат одному из множеств $\bar{L}_{j-1,n}^{(i)} \setminus L_{j-1,n}^{(i)}$, $\bar{L}_{j,n}^{(i)} \setminus L_{j,n}^{(i)}$. Если граничные точки интервала принадлежат двум разным множествам $\bar{L}_{j-1,n}^{(i)}$, $\bar{L}_{j,n}^{(i)}$ или обе принадлежат множеству $\bar{L}_{j-1,n}^{(i)}$, то функцию $f_n(x)$ определяем так, что она линейна в замыкании интервала. Если обе граничные точки принадлежат $\bar{L}_{j,n}^{(i)}$, то пусть в этом составляющем интервале функция

$$f_n(x) = (-1)^{i+1} j + (-1)^i \min[2^{-1}, \varrho(x, \bar{L}_{j,n}^{(i)})].$$

Таким образом, в замыкании произвольного составляющего интервала функция $f_n(x)$ либо линейна, либо удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Как мы уже видели, функция $f_n(x)$ постоянна на каждом из множеств $\bar{L}_{n,n}^{(i)}, \bar{L}_{j,n}^{(i)} \setminus L_{j,n}^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Так как эти множества замкнуты и попарно без общих точек, то функция $f_n(x)$ непрерывна на сумме этих множеств, относительно этой суммы. Эта сумма есть замкнутое множество, и дополнение этой суммы есть открытое множество

$$M = [\mathcal{E} \setminus (\bar{L}_{1,n}^{(1)} \cup \bar{L}_{1,n}^{(2)})] \cup [\bigcup_{\substack{j=2 \\ i=1,2}}^{n} (L_{j-1,n}^{(i)} \setminus \bar{L}_{j,n}^{(i)})].$$

На замыкании любой компоненты множества M функция $f_n(x)$ уже определена и либо на ней линейна, либо удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Потому функция $f_n(x)$ определена и непрерывна на всей прямой.

В точках множества $\bar{L}_{j,n}^{(1)} \setminus L_{j,n}^{(1)}$ для $0 < j \leqslant n-1$ имеем $f_n(x) = j$. В точках множества $L_{j,n}^{(1)} \setminus \bar{L}_{j,n}^{(1)}$ для $0 < j \leqslant n-1$ имеем $j \leqslant f_n(x) < j+1$. В точках множества $\bar{L}_{n,n}^{(1)}$ имеем $f_n(x) = n$. Обратно, функция $f_n(x)$ имеет значение n только в точках множеств $\bar{L}_{n,n}^{(1)}$. Для $0 < j \leqslant n-1$ имеем $j \leqslant f_n(x) < j+1$ только в точках множества $\bar{L}_{j,n}^{(1)} \setminus \bar{L}_{j+1,n}^{(1)}$. Значения $f_n(x) > n$ эта функция нигде не принимает. Таким образом

$$E_{m,n}^{(1)} = \{x\colon f_n(x) \geqslant m\} = \begin{cases} \bar{L}_{m,n}^{(1)} & \text{для} \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \\ 0 & \text{для} \quad m > n. \end{cases}$$

Аналогично получим

$$E_{m,n}^{(2)} = \{x\colon f_n(x) \leqslant -m\} = \begin{cases} \bar{L}_{m,n}^{(2)} & \text{для} \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \\ 0 & \text{для} \quad m > n. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\varliminf_{n\to\infty} E_{m,n}^{(i)} = \varliminf_{n\to\infty} \bar{L}_{m,n}^{(i)}$. На основании (3) и предыдущего

$$\{x\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{m,n}^{(1)} = \lim_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} \bar{L}_{m,n}^{(1)},$$

$$\{x\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_{m,n}^{(2)} = \lim_{m\to\infty} \varliminf_{n\to\infty} \bar{L}_{m,n}^{(2)}.$$

Учитывая (36) видим, что равенства (1) и (2) справедливы для построенной последовательности функций $f_n(x)$. Что и требовалось доказать.

Цитированная литература

[1] И. П. Корнфельд, *О множествах сходимости и расходимости последовательностей непрерывных функций*, Известия высших учебных заведений. (В печати).

[2] W. Sierpiński, *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues*. Fund. Math. 2 (1921), стр. 41-49.

[3] H. Hahn, *Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionfolge*, Archiv der Math. und Physik 28 (1919), стр. 34-45.

[4] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, Москва-Ленинград 1937.

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1961