Therefore by our hypothesis, $\tilde{f}'_1(\varphi) \leqslant \tilde{f}'_2(\psi)$. Thus $\tilde{f}_1(\varphi) = \tilde{f}_2(\psi)$ implies $\tilde{f}'_1(\varphi) = \tilde{f}'_2(\psi)$. We may therefore define a mapping h of R onto L by $h(\tilde{f}(\varphi)) = \tilde{f}'(\varphi)$. An argument similar to that of Theorem 1, shows that h is an α-homomorphism. Since $h(\hat{x}) = x$ for $\hat{x} \epsilon M$, L is an α-retract of R.

THEOREM 5. *Let L be an α-complete lattice which is $(\alpha, 2^\alpha)$ distributive in both senses. Then $L \epsilon L_\alpha$.*

Proof. Let φ, ψ, f_1, and f_2 satisfy the hypothesis of the condition of Theorem 4. Then $\prod_{i \epsilon S} f_1(i) \leqslant \sum_{i \epsilon T} f_2(i)$ for all $S \epsilon A(\varphi)$, and $T \epsilon B(\psi)$. Therefore by Lemma 4 and its dual, $\tilde{f}_1(\varphi) \leqslant \tilde{f}_2(\psi)$.

6. Let R_α be the set of all lattices which are isomorphic with an α-ring of sets divided by an α-ideal. Let K'_α (or L'_α) be the set of lattices in K_α (or L_α) which have a smallest element. The proof of Theorem 4 in [2] shows that $R_\alpha \subset L'_\alpha$ for all α, and obviously $L'_\alpha \subset K'_\alpha$ for all α. By Theorem 5, every α-complete chain is in L_α. However the chain of all reals in the closed interval $[0, 1]$ is not in R_α for any $\alpha \geqslant 2^\omega$, by Theorem 6 of [2]. Therefore $R_\alpha \neq L'_\alpha$ for all $\alpha \geqslant 2^\omega$. Since every member of K_ω is $(2, \omega)$ distributive in both senses, the corollary of Theorem 3 in [2] shows that $R_\omega = L'_\omega = K'_\omega$. It is not known whether $L_\alpha = K_\alpha$ for some $\alpha > \omega$.

References

[1] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935), pp. 433-454.

[2] C. C. Chang and A. Horn, *On the representation of α-complete lattices*, Fund. Math. this volume, pp. 253-258.

[3] D. Scott and A. Tarski, *The sentential calculus with infinitely long expressions*, Colloq. Math. 6 (1958), pp. 165-170.

[4] R. Sikorski, *Boolean algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, new series 25, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

Reçu par la Rédaction le 24. 10. 1961

Remarques sur les relations d'équivalence

par

J. Aczél (Debrecen)

Dédié amicalement à M. Béla Szőkefalvi-Nagy à l'occasion de son 50-eme anniversaire

1. On peut formuler la question traitée dans le travail [2] de M. S. Gołąb — en la généralisant de 1 à n dimensions — comme il suit: Soient

$$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

les coordonnées d'un point P de l'espace dans un système de coordonnées arbitraire, mais fixé. Étant données les coordonnées $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ et $\boldsymbol{x}_3$ des points P_1, P_2 et P_3, comment trouver les coordonnées $\boldsymbol{x}_4$ de l'extrémité P_4 du vecteur $\overline{P_3P_4}$ de manière qu'il soit équivalent à $\overline{P_1P_2}$? Alors

$$\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \tag{1}$$

et M. Gołąb a postulé comme conditions d'équivalence les suivantes:

I. réflexivité: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_2$,

II. symétrie: $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3), \boldsymbol{x}_1\big) = \boldsymbol{x}_2$,

III. transitivité: $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3), \boldsymbol{x}_4\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)$,

et, ensuite, aussi la condition

IV. réversibilité: $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)\big) = \boldsymbol{x}_3$.

Dans l'espace à n dimensions on voit aussi en posant $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}_1$ que II est une conséquence de III et de I et en écrivant

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) \tag{2}$$

I et III se transforment en

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_2 \tag{3}$$

et

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3), \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\big) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4), \tag{4}$$

qui sont les équations fonctionnelles des objets géométriques à n composantes dans des espaces à n dimensions.

Alors, comme il a été montré dans [1], dans ce cas général

$$g(x_2, x_1, x_3) = F^{-1}\big(F(x_2, x_1), x_3\big)$$

est aussi la solution générale du système (3), (4) et par conséquent (voir (2))

$$f(x_1, x_2, x_3) = F^{-1}\big(F(x_2, x_1), x_3\big) \tag{5}$$

représente dans le sens de (1) *la relation d'équivalence la plus générale satisfaisant aux conditions* I-III, *où* $y = F(x_2, x_1)$ *est une application arbitraire de l'espace à* $2n$ *dimensions à celle de* n *dimensions, inversible en ce sens qu'il existe une application semblable* $x_2 = F^{-1}(y, x_1)$ *telle que*

$$F^{-1}\big(F(x, x_1), x_1\big) = F\big(F^{-1}(x, x_1), x_1\big) = x\,. \tag{6}$$

2. Voyons maintenant quelles sont les conséquences de la condition supplémentaire IV pour la fonction F figurant dans la solution générale (5) de I-III, question examinée par M. Gołąb seulement dans les cas particuliers, à une dimension, où la fonction f est linéaire.

Supposons que la condition IV soit remplie et substituons (5) dans IV. Nous obtenons

$$F^{-1}\Big(F(x_1, x_2), F^{-1}\big(F(x_2, x_1), x_3\big)\Big) = x_3 \tag{7}$$

et en définissant x_4 par

$$x_4 = F^{-1}\big(F(x_2, x_1), x_3\big)$$

ou, ce qui revient au même d'après (6), par

$$F(x_2, x_1) = F(x_4, x_3)\,,$$

cette définition entraîne, avec (7),

$$F^{-1}\big(F(x_1, x_2), x_4\big) = x_3\,.$$

En tenant compte de (6) nous obtenons

$$F(x_1, x_2) = F(x_3, x_4)\,.$$

Cet argument est réversible.

Ainsi, dans la forme générale (5) *déterminée par* I-III, *la condition* IV *est équivalente à l'implication*

$$F(x_1, x_2) = F(x_3, x_4) \Rightarrow F(x_2, x_1) = F(x_1, x_3)\,. \tag{8}$$

Dans le cas d'un espace à une dimension la fonction $y = F(x_1, x_2)$ peut être interprétée comme fonction faisant correspondre à tout point (x_1, x_2) du plan le nombre y. Alors la condition (8) signifie que *l'égalité des valeurs de la fonction F en deux points* (x_1, x_2) *et* (x_3, x_4) *entraîne leur égalité aussi aux points symétriques par rapport à la droite* $x_2 = x_1$: (x_2, x_1) *et* (x_4, x_3).

Comme nous l'avons vu, la formule (5) contient une fonction arbitraire F de $2n$ (2 dans l'espace à 1 dimension) variables. À la question (posée par M. Gołąb) si par la condition IV on n'obtient pas au lieu de (5) de formule dans laquelle figure seulement une fonction arbitraire de n variables (resp. d'une variable), la réponse est *négative*. En effet, *si la fonction* $F(x, x)$ *prend toutes les valeurs possibles de* $F(x_1, x_2)$, *alors* (8) *se réduit à la symétrie*

$$F(x_1, x_2) = F(x_2, x_1)\,. \tag{9}$$

(8) *est donc une généralisation de la symétrie de* F et ausi les fonctions symétriques

$$F(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\big(G(x_1, x_2) + G(x_2, x_1)\big)$$

se laissent exprimer par des fonctions arbitraires G de $2n$ (resp. 2) variables.

L'autre cas extrême est si $F(x, x)$ est constante:

$$F(x, x) = c\,. \tag{10}$$

(9) signifie pour f en vertu de (5)

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_1, x_3)\,. \tag{11}$$

Cependant (10) et I donnent

$$f(x_1, x_1, x_3) = f(x_3, x_3, x_3) = x_3\,. \tag{12}$$

Les deux fonctions linéaires

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$$

et

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3$$

trouvées par M. Gołąb dans le cas d'une dimension sont justement des exemples typiques de (11) et (12).

Travaux cités

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Monografie Matematyczne 39, Warszawa 1960, Ch. II, § 1.

[2] S. Gołąb, *La relation d'équivalence et les objets géométriques*, Fund. Math. 50 (1962), p. 381-386.

Reçu par la Rédaction le 5. 12. 1961
