Die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit der Tangentialrichtungen einer geschlossenen Fläche *

von

H. Freudenthal (Utrecht)

Sei F eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlechte p und M die dreidimensionale Mannigfaltigkeit der Paare, die bestehen aus einem Punkt p von F und einer Tangentialrichtung in p. Dann ist M ein Faserraum mit der Basis F und Kreisfasern (den Kompassen in den Punkten von F). Die natürliche Projektion von M auf F heiße π. Das übliche Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe von F bestehe aus den geschlossenen Wegen $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ mit dem Anfangs- und Endpunkt o und der Relation

$$c = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \ldots b_p^{-1} \sim 1 .$$

Sei O ein Punkt von M mit $\pi O = o$. Man hat geschlossene Wege A_i, B_i in M mit dem Anfangs- und Endpunkt O und so daß

$$\pi A_i = a_i , \quad \pi B_i = b_i$$

ist. Man darf π auf A_i und B_i eineindeutig voraussetzen. Die Faser von M durch O (der Kompaß in o) als geschlossener Weg aufgefasst, heißt Z. Dabei sei Z folgendermassen orientiert:

Man orientiere F so, daß c die (nicht auf c gelegenen) Punkte von F positiv umläuft, und Z als Kompaß in o so, daß seine Orientierung mit der positiven Orientierung von F übereinstimmt.

Es ist klar, daß die Fundamentalgruppe von M erzeugt wird von den

$$A_i, B_i, Z$$

mit den definierenden Relationen:

$$Z \in \text{Zentrum} ,$$

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 \ldots B_p^{-1} \sim Z^k ,$$

* Die hier beantwortete Frage wurde mir von L. Auslander gestellt. Die Arbeit entstand im Rahmen eines N. S. F.-Kontraktes während eines Gastjahres an Yale University. Von W. T. van Est höre ich, daß das Resultat und ein weitergehendes ihm seit einigen Jahren bekannt ist. Seine Resultate werden unabhängig veröffentlicht werden.

wo k eine näher zu bestimmende ganze Zahl ist (unabhängig von der Wahl der A_i, B_i).

Satz. *k ist die Euler-Charakteristik von F.*

Beweis. Als Modell von F wähle man die übliche konvexe $4p$-Ecksfläche F_0 der hyperbolischen Ebene mit dem Randweg

$$\gamma = \alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1'\alpha_2 \dots \beta_p' .$$

Beim Übergang von F_0 nach F wird $\alpha_i'(t)$ mit $\alpha_i(1-t)$ und $\beta_i'(t)$ mit $\beta_i(1-t)$ identifiziert; alle $\alpha_i(0)$, $\alpha_i(1)$, $\alpha_i'(0)$, $\alpha_i'(1)$, $\beta_i(0)$ usw. werden miteinander identifiziert.

A_i bestimmt ein Richtungenfeld in der Menge der Punkte $\alpha_i(t)$ und $\alpha_i'(t)$, B_i ebenso in der der Punkte $\beta_i(t)$ und $\beta_i'(t)$. Das so entstehende Richtungenfeld in den Punkten $\gamma(t)$ wird fortgesetzt zu einem Richtungenfeld η in $F_0\setminus(\varrho)$, wo ϱ ein innerer Punkt von F_0 und η auf jeder Strecke aus ϱ konstant ist. η, als Feld auf F aufgefaßt, hat in dem ϱ entsprechenden Punkte r eine Singularität, deren Index bekanntlich die Euler-Charakteristik e ist.

η bildet also die im Sinne von γ orientierte Mannigfaltigkeit der $\gamma(t)$ mit dem Grade e ab auf den Kompaß in einem Punkte von F_0 (im Sinne von F orientiert).

Dem Punkte $A_i(t)$ entsprechen im Modell die Paare

$$\ulcorner\alpha_i(t)\,,\ \eta\alpha_i(t)\urcorner \quad \text{und} \quad \ulcorner\alpha_i'(1-t)\,,\ \eta\alpha_i'(1-t)\urcorner,$$

analog dem Punkte $B_i(t)$

$$\ulcorner\beta_i(t)\,,\ \eta\beta_i(t)\urcorner \quad \text{und} \quad \ulcorner\beta_i'(1-t)\,,\ \eta\beta_i'(1-t)\urcorner .$$

Dem $C(t)$, wo

$$C = A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2 \dots B_p^{-1} ,$$

entspricht

$$\ulcorner\gamma(t)\,,\ \eta\gamma(t)\urcorner .$$

Für jedes t möge $\gamma_s(t)$ die Strecke von $\gamma(t)$ nach ϱ im Verhältnis $s:(1-s)$ teilen. Durch

$$\ulcorner\gamma_s(t)\,,\ \eta\gamma(t)\urcorner$$

wird eine Zusammenziehung $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ von C auf Z_0^e definiert, wo Z_0 der Kompaß in r ist, im positiven Sinne durchlaufen.

Bekanntlich läßt sich C dann auch unter Festhaltung von Anfangs- und Endpunkt auf Z^e zusammenziehen.

Reçu par la Rédaction 20. 9. 1961