Quelques théorèmes de l'Algèbre de Boole et leurs applications topologiques

par

R. Engelking et **K. Kuratowski** (Warszawa)

Donnons-nous une algèbre de Boole $(A, +, ', \cdot, 0, 1)$. Nous la désignerons, tout court, par A. Pour tout $X \subset A$ le symbole sX désignera *la somme des éléments de* X (si cette somme existe); c'est-à-dire que:

1° $x \subset sX$ pour tout $x \in X$,

2° pour tout a tel que $(x \in X \Rightarrow x \subset a)$ on a $sX \subset a$.

L'algèbre A est dite *complète* lorsque la somme sX existe pour *tout* $X \subset A$ (cf. [6], p. 58). Pour certaines applications topologiques, la notion d'algèbre complète se montre trop restrictive: au lieu d'admettre que sX existe pour tout $X \subset A$, il convient mieux d'admettre qu'elle existe sous certaines conditions imposées à X. Ces conditions seront exprimées en termes de *recouvrements*; elles conduisent à la notion d'algèbre $\boldsymbol{C}$*-complète* où $\boldsymbol{C}$ est une famille de recouvrements dite régulière (voir § 1); à savoir, l'algèbre A est dite $\boldsymbol{C}$*-complète* lorsque la somme sX existe pour tout sous-ensemble X d'un recouvrement arbitraire appartenant à $\boldsymbol{C}$.

Pour avoir un exemple d'une algèbre $\boldsymbol{C}$-complète, considérons le cas où $\mathcal{X}$ est un espace topologique et où A est l'algèbre de Boole ayant pour éléments tous les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$ et définissons $\boldsymbol{C}$ comme la famille de tous les recouvrements de $\mathcal{X}$ formés d'ensembles fermés-ouverts, disjoints et dont l'union coïncide avec $\mathcal{X}$ (ce qui est une condition plus restrictive que celle que la somme algébrique coïncide avec $\mathcal{X}$, voir Deuxième partie, remarque 1). L'algèbre A est alors $\boldsymbol{C}$-complète (mais n'est pas complète).

Dans le même ordre d'idées, nous considérons la notion de $\boldsymbol{C}$*-filtre*, c'est-à-dire d'un filtre (maximal) qui n'est disjoint d'aucun des recouvrements appartenant à $\boldsymbol{C}$. Comme on verra, la notion de $\boldsymbol{C}$-filtre correspond à celle de quasi-composante de l'espace $\mathcal{X}$ (A étant — comme auparavant — l'algèbre des sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$).

Les notions d'algèbre $\boldsymbol{C}$-complète et de $\boldsymbol{C}$-filtre permettrons d'appliquer l'algèbre de Boole à certains problèmes topologiques considérés ailleurs (voir [4], Appendice).

Nous démontrons en outre quelques théorèmes de l'algèbre de Boole qui paraissent présenter un intérêt par eux-mêmes. Tels sont en particulier les théorèmes qui utilisent la notion de limite inverse. Ajoutons qu'a l'aide de cette notion nous obtenons comme cas particulier le théorème bien connu de M. H. Stone sur la représentation des Algèbres de Boole (§ 3, Remarque 3).

Première partie. Algèbre de Boole

§ 1. Recouvrements. Algèbres C-complètes.

Définition 1. Tout ensemble $C\subset A$ sera dit un *recouvrement* de A (à termes disjoints) en symbole $C\in \boldsymbol{R}$, lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes:

(1) $\quad$ si $a_1\in C$ et $a_2\in C$, on a $a_1\cdot a_2=0$,

(2) $$sC=1,$$

c'est-à-dire: à tout $a\neq 1$ correspond un $x\in C$ tel que $x-a\neq 0$,

(3) $$0 \text{ non-}\in C.$$

La famille $\boldsymbol{R}$ est *partiellement ordonnée* par la relation $C_0\leqslant C_1$ qui signifie que le recouvrement C_1 est *plus fin* que C_0, c'est-à-dire que tout élément de C_1 est contenu dans un élément de C_0 (donc — les éléments de C_0 étant disjoints — est contenu dans *un seul* élément de C_0).

La famille $\boldsymbol{R}$ est *dirigée* (est filtrant à droite), c'est-à-dire que:

(4) $\quad$ si $C_1, C_2\in\boldsymbol{R}$, il existe un $C_3\in\boldsymbol{R}$ tel que $C_1\leqslant C_3$ et $C_2\leqslant C_3$.

Plus précisément, en désignant par $C_1\circ C_2$ l'ensemble composé de tous les produits non vides $x\cdot y$ où $x\in C_1$ et $y\in C_2$, on a:

(5) $$C_1\leqslant C_1\circ C_2 \quad\text{et}\quad C_2\leqslant C_1\circ C_2.$$

Pour se convaincre que $(C_1\circ C_2)\in\boldsymbol{R}$, considérons un $a\neq 1$. D'après (2) il existe un $x\in C_1$ tel que $x-a\neq 0$, c'est-à-dire que $x'+a\neq 1$. Comme $C_2\in\boldsymbol{R}$, il existe un $y\in C_2$ tel que $y-(x'+a)\neq 0$, d'où $y\cdot x-a\neq 0$. Comme $y\cdot x\in C_1\circ C_2$, la formule $(C_1\circ C_2)\in\boldsymbol{R}$ se trouve établie.

Donnons-nous à présent un ensemble *dirigé* T (composé d'éléments arbitraires) et faisons correspondre à tout $t\in T$ un recouvrement C_t:

$$C\colon\ T\to\boldsymbol{R}.$$

Admettons en outre que

(6) $$(t_0\leqslant t_1)\equiv(C_{t_0}\leqslant C_{t_1}).$$

Dans le cas où $t_0\leqslant t_1$, désignons par $g_{t_0}^{t_1}(x)$ pour tout $x\in C_{t_1}$ l'élément de C_{t_0} (défini de façon univoque) tel que

(7) $$x\subset g_{t_0}^{t_1}(x)\in C_{t_0}.$$

On a ainsi

(8) $$g_{t_0}^{t_1}\colon\ C_{t_1}\to C_{t_0}.$$

Remarque. Cette transformation est une transformation *sur* C_{t_0}; c'est-à-dire que

$$g_{t_0}^{t_1}(C_{t_1})=C_{t_0}.$$

Supposons, en effet, que $y\in C_{t_0}$ n'est pas une valeur de la fonction $g_{t_0}^{t_1}$, c'est-à-dire que, pour tout $x\in C_{t_1}$, on a $g_{t_0}^{t_1}(x)\neq y$, donc (les éléments de C_{t_0} étant disjoints) que $y\cdot g_{t_0}^{t_1}(x)=0$, d'où $y\cdot x=0$ (selon (7)), et par conséquent $x\subset y'$. Comme $y'\neq 1$ (d'après (3)), on parvient à une contradiction avec (2).

En vertu des conditions (6) et (7), le système $\{C_t, g_{t_0}^{t_1}\}$ est un système inverse (cf. [1], p. 212). Nous le désignerons d'une façon plus brève par $\{C_t,\supset\}$ [1]. L'ensemble $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{C_t,\supset\}$ est donc le sous-ensemble du produit cartésien PC_t, où $t\in T$, composé des points $\{x^t\}$ tels que

(9) $$x^t\in C_t \quad\text{et}\quad x^{t_0}\supset x^{t_1} \quad\text{dès que}\quad t_0\leqslant t_1.$$

Définition 2. Toute famille $\boldsymbol{C}=\{C_t\}$, $t\in T$, de recouvrements sera dite *régulière*, lorsque:

(10) $\quad$ *pour tout* $a\in A$ *il existe un* $t\in T$ *tel que* $C_t=(a, a')$,

(11) $\quad$ *si* $t_1\in T$ *et* $t_2\in T$, *il existe un* $t_3\in T$ *tel que* $C_{t_3}=C_{t_1}\circ C_{t_2}$.

On en déduit facilement que

(12) $\quad$ *chaque famille régulière contient tous les recouvrements finis.*

Évidemment

(12′) $\quad$ *La famille* $\boldsymbol{R}$ *est régulière*

(on pose ici $T=\boldsymbol{R}$ et on écrit C au lieu de C_C).

Envisageons le cas particulier où *il existe dans* T *le dernier élément*; désignons-le par t_0. Autrement dit, le recouvrement C_{t_0} est le plus fin parmi tous les C_t. La famille $C=\{C_t\}$ étant supposée régulière, nous allons montrer que

(13) $\quad$ C_{t_0} *coïncide avec l'ensemble des atomes* [2] *de l'algèbre* A.

---

[1] Soit, d'une façon générale, $\{X_t\}$ un système de sous-ensembles d'une algèbre de Boole, le paramètre t parcourant un ensemble dirigé T. Admettons qu'étant donné un couple $t_0\leqslant t_1$, il existe pour tout $x\in X_{t_1}$ un seul élément de X_{t_0} qui contient x; désignons le par $g_{t_0}^{t_1}(x)$. On vérifie facilement que $\{X_t, g_{t_0}^{t_1}\}$ est un système inverse. Sa limite — que nous désignons $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{X_t,\supset\}$ — se compose des ensembles $\{x^t\}$ tels que $x^t\in X_t$ et $x^{t_0}\supset x^{t_1}$ dès que $t_0\leqslant t_1$.

[2] On appelle *atome* d'une algèbre de Boole tout élément $a\neq 0$ qui ne contient aucun élément différent de 0 et de a.

En effet, en supposant que $a \epsilon C_{t_0}$ et que $0 \neq b \subset a$ et $a-b \neq 0$, considérons (cf. (12)) le recouvrement $C_t = (b, a-b, a')$. Évidemment a n'est contenu dans aucun élément de C_t; mais cela est incompatible avec l'hypothèse que $C_t \leqslant C_{t_0}$.

Réciproquement, soit a un atome; posons $C_t = (a, a')$. Comme $C_t \leqslant C_{t_0}$, il existe un $b \epsilon C_{t_0}$ tel que $b \subset a$, d'où $a = b$. Donc $a \epsilon C_{t_0}$.

DÉFINITION 3. Soit $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$, $t \epsilon T$, une famille régulière de recouvrements. Nous dirons que l'algèbre A est $\boldsymbol{C}$-*complète*, lorsque la somme sX existe pour tout $X \subset C_t$.

§ 2. $\boldsymbol{C}$-filtres. Rappelons qu'un ensemble $V \subset A$ est dit un (vrai) *filtre* de l'algèbre A lorsqu'il jouit des propriétés suivantes:

(1) *si* $a \epsilon V$ *et* $a \subset b$, *on a* $b \epsilon V$,

(2) *si* $a \epsilon V$ *et* $b \epsilon V$, *on a* $(a \cdot b) \epsilon V$,

(3) 0 non-ϵ V.

DÉFINITION 4. Étant donnée une famille $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$, $t \epsilon T$, de recouvrements, nous dirons qu'un filtre V est *un* $\boldsymbol{C}$-*filtre*, en symbole $V \epsilon \boldsymbol{U_C}$, lorsqu'on a $V \frown C_t \neq 0$ quel que soit $t \epsilon T$.

L'intersection $V \frown C_t$ se réduisant à un seul élément (en vertu de (2), (3) et de § 1 (1)), désignons-le par $h^t(V)$. On a donc

$$(4) \qquad (h^t(V)) = V \frown C_t \quad \textit{quel que soit} \quad t \epsilon T.$$

On constate aussitôt que, *si la famille* $\boldsymbol{C}$ *est régulière, tout* $\boldsymbol{C}$-*filtre* V *est un filtre maximal* (un „ultrafiltre"), c'est-à-dire que

(5) *pour tout* $a \epsilon A$, *on a soit* $a \epsilon V$, *soit* $a' \epsilon V$

(d'ailleurs il n'y a que l'une de ces possibilités qui puisse se présenter).

La réciproque n'est pas vraie en général (voir § 4, remarque 1). Cependant, *si tout recouvrement* $C_t \epsilon \boldsymbol{C}$ *est fini, chaque filtre maximal est un* $\boldsymbol{C}$-*filtre*.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

Rappelons que l'ensemble $S \subset T$ est dit *cofinal* avec T lorsque à tout $t \epsilon T$ correspond un $s \epsilon S$ tel que $t \leqslant s$. Nous dirons alors que la famille $\boldsymbol{D} = \{D_s\}$ où $s \epsilon S$, est cofinale avec la famille $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$ où $t \epsilon T$.

(6) *Si* $\boldsymbol{D} = \{D_s\}$ *est cofinal avec* $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$, *on a* $\boldsymbol{U_D} = \boldsymbol{U_C}$.

Tout $\boldsymbol{C}$-filtre étant évidemment un $\boldsymbol{D}$-filtre, il s'agit de montrer qu'en supposant que $V \epsilon \boldsymbol{U_D}$, on a $V \epsilon \boldsymbol{U_C}$; c'est-à-dire, qu'étant donné un $t \epsilon T$, on a $V \frown C_t \neq 0$. Or, soit $t \leqslant s \epsilon S$. Comme $V \epsilon \boldsymbol{U_D}$, il existe un $a \epsilon V \frown D_s$, et comme $C_t \leqslant C_s$ (cf. § 1 (6)), il existe un $b \epsilon C_t$ tel que $a \subset b$. Donc $b \epsilon V$ d'après (1). On a ainsi $b \epsilon V \frown C_t$.

COROLLAIRE. *Si la famille* $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$ *est régulière et contient le dernier élément, la condition nécessaire et suffisante pour que* $V \epsilon \boldsymbol{U_C}$, *est qu'il existe un atome* a *tel que* V *coïncide avec l'ensemble* $V(a)$ *de tous les* x *qui contiennent* a.

Désignons, en effet, par t_0 le dernier élément de T et posons $\boldsymbol{D} = (C_{t_0})$. En supposant que $V \epsilon \boldsymbol{U_C}$, posons $a = h^{t_0}(V)$. On constate aussitôt que l'ensemble $V(a)$ est un $\boldsymbol{C}$-filtre, contenu dans V, donc identique à V. De plus, d'après § 1 (13), a est un atome.

Réciproquement, si a est un atome, on a $a \epsilon C_{t_0}$, donc $V(a) \epsilon \boldsymbol{U_D}$ et d'après le théorème précédent, $V(a) \epsilon \boldsymbol{U_C}$ puisque $\boldsymbol{D}$ est cofinal avec $\boldsymbol{C}$.

§ 3. Représentation de la famille $\boldsymbol{U_C}$ des $\boldsymbol{C}$-filtres comme limite inverse de recouvrements.

THÉORÈME 1. $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$, $t \epsilon T$, *étant une famille régulière de recouvrements, l'application* $h = \{h^t\}$, *définie par la formule* (4) *du* § 2, *transforme de façon biunivoque la famille* $\boldsymbol{U_C}$ *sur la limite inverse* $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{C_t, \supset\}$.

En symbole (³)

$$(1) \qquad h\colon\ \boldsymbol{U_C} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{C_t, \supset\}.$$

Démonstration. D'abord $h(V) \epsilon \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{C_t, \supset\}$. Autrement dit (cf. § 1 (9)) $h^t(V) \epsilon C_t$ et $h^{t_0}(V) \supset h^{t_1}(V)$ dès que $t_0 \leqslant t_1$. En effet, d'après § 2 (4), $h^{t_1}(V) \epsilon V \frown C_{t_1}$, et comme selon § 1 (6), $C_{t_0} \leqslant C_{t_1}$, il existe dans C_{t_0} un élément qui contient $h^{t_1}(V)$. D'après § 2 (1), cet élément appartient à V et, par conséquent (d'après § 2 (4)) est identique à $h^{t_0}(V)$.

Puis, la transformation h est biunivoque. Soit, en effet, $V_0 \neq V_1$. Supposons que $a \epsilon V_0 - V_1$, d'où $a' \epsilon V_1$ (selon § 2 (5)). La famille C étant régulière, soit conformément à § 1 (10), $C_t = (a, a')$. On a donc $h^t(V_0) = a$ et $h^t(V_1) = a'$, d'où $h(V_0) \neq h(V_1)$.

Il reste à démontrer qu'étant donné $\{x^t\}$ satisfaisant à la condition (9) du § 1, il existe un $V \epsilon \boldsymbol{U_C}$ tel que $h^t(V) = x^t$ quel que soit $t \epsilon T$.

Or définissons V par la condition:

$$(2) \qquad a \epsilon V \equiv \text{il existe un } t \text{ tel que } x^t \subset a.$$

V est un filtre. En effet, les conditions (1) et (3) du § 2 étant évidemment satisfaites, il s'agit d'établir la condition § 2 (2). Posons donc $x^{t_1} \subset a_1$, $x^{t_2} \subset a_2$ et $t_1 \leqslant t_3$, $t_2 \leqslant t_3$. Il vient d'après § 1 (9), $x^{t_3} \subset x^{t_1} \cdot x^{t_2} \subset a_1 \cdot a_2$, d'où $a_1 \cdot a_2 \epsilon V$.

Finalement V est un $\boldsymbol{C}$-filtre, c'est-à-dire que $V \frown C_t \neq 0$, quel que soit $t \epsilon T$. En effet, d'après (2) et § 1 (9), on a $x^t \epsilon V \frown C_t$.

Remarque 1. Soient A et B deux algèbres de Boole. Soient, comme auparavant, T un ensemble dirigé et $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$ une famille de recouvre-

(³) Nous écrivons $f\colon X \leftrightarrow Y$, lorsque f est une transformation biunivoque de l'ensemble X sur l'ensemble Y (tout entier).

ments de A. Soit, pour tout $t \in T$, f^t une transformation de C_t dans B telle que

(3) $(x_0 \supset x_1) \equiv [f^{t_0}(x_0) \supset f^{t_1}(x_1)]$ dès que $x_0 \in C_{t_0}$, $x_1 \in C_{t_1}$ et $t_0 \leqslant t_1$.

En posant $f = \{f^t\}$ et $D_t = f^t(C_t)$, on a

(4) $$f\colon \varprojlim\{C_t, \supset\} \leftrightarrow \varprojlim\{D_t, \supset\}.$$

La démonstration est immédiate.

Il en résulte que, la famille $\boldsymbol{C}$ étant supposée régulière et la transformation h étant définie par la formule § 2 (4), la fonction composée fh satisfait à la condition:

(5) $$fh\colon \boldsymbol{U_C} \leftrightarrow \varprojlim\{D_t, \supset\}.$$

Cela présente une légère généralisation du théorème 1.

Remarque 2. La formule (1) induit une topologie dans l'ensemble $\boldsymbol{U_C}$ des $\boldsymbol{C}$-filtres. A savoir, on définit la fermeture de tout $V \subset \boldsymbol{U_C}$ par l'équivalence

(6) $$(V \in \overline{V}) \equiv [h^t(V) \in h^t(V) \text{ quel que soit } t \in T].$$

Définissons les ensembles $\boldsymbol{W_x}$ pour $x \in A$, par l'équivalence:

(7) $$V \in \boldsymbol{W_x} \equiv x \in V.$$

Conformément à (6) les $\boldsymbol{W_x}$ sont fermés-ouverts et constituent une base de l'espace $\boldsymbol{U_C}$. En outre, l'espace $\boldsymbol{U_C}$ est complètement régulier de dimension 0 (cf. [4], p. 442).

Dans le cas particulier, où tous les recouvrements $C_t \in \boldsymbol{C}$ sont finis, l'espace $\boldsymbol{U_C}$ est bicompact.

Car dans ce cas, le produit cartésien PC_t est bicompact (d'après le théorème de Tychonoff) et il en est de même de son sous-ensemble fermé $\varprojlim\{C_t, \supset\}$, donc de $\boldsymbol{U_C}$, qui lui est homéomorphe.

Ajoutons que — comme nous l'avons fait observer dans le § 2 — l'espace $\boldsymbol{U_C}$ coïncide dans le cas considéré avec l'ensemble $\boldsymbol{U}$ de tous les filtres maximaux de l'algèbre A. L'espace $\boldsymbol{U}$ étant bicompact et les ensembles fermés-ouverts $\boldsymbol{W_x}$, où $x \in A$, formant sa base, tout sous-ensemble fermé-ouvert de $\boldsymbol{U}$ est l'union d'un nombre fini de ces ensembles. Comme, d'autre part, $\boldsymbol{W}$ est une isomorphie (cf. [6], p. 22), il vient, en désignant par $(0,1)^{\boldsymbol{U}}$ la famille des sous-ensembles fermés-ouverts de $\boldsymbol{U}$:

(8) $$\boldsymbol{W}\colon A \leftrightarrow (0,1)^{\boldsymbol{U}}.$$

On parvient ainsi au théorème bien connu de M. H. Stone.

§ 4. Mesures entières. Admettons, à présent, que *l'algèbre A est $\boldsymbol{C}$-complète* (voir définition 3 du § 1), où $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$, $t \in T$, est une famille régulière de recouvrements.

DÉFINITION 5. Soit μ une fonction qui attache à tout $x \in A$ un nombre entier $\mu(x)$; soit $\mu(0) = 0$. Nous l'appelerons $\boldsymbol{C}$-mesure entière, ou tout court *$\boldsymbol{C}$-mesure,* lorsqu'elle est assujettie à la condition suivante *d'additivité* pour tout $t \in T$: si $X = \{z_\tau\} \subset C_t$ (les z_τ étant différents deux à deux), on a

(1) $$\mu\Big(\sum_\tau z_\tau\Big) = \sum_\tau \mu(z_\tau).$$

Bien entendu, cette égalité implique qu'il n'y a dans C_t qu'un nombre fini d'éléments dont la mesure $\neq 0$.

Nous désignons par $\mathfrak{M}_C$ *l'ensemble de toutes les $\boldsymbol{C}$-mesures.*

C étant un recouvrement de A, désignons par $\widehat{C}$ l'algèbre de Boole générée par C; elle a donc pour éléments toutes les sommes (finies ou infinies) d'éléments de C et, par conséquent, elle est une algèbre complète. Nous désignerons par $\mathfrak{M}(\widehat{C})$ l'ensemble des mesures entières définies sur $\widehat{C}$.

Soit $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$ une famille régulière de recouvrements. Evidemment, si $t_0 \leqslant t_1$, on a $\widehat{C}_{t_0} \subset \widehat{C}_{t_1}$ (cf. § 1 (6) et (1)). Désignons par $\{\mathfrak{M}(\widehat{C}_t), \mathrm{restr}\}$ le système inverse par rapport à l'opération de *restriction*; c'est-à-dire que

$$\mathrm{restr}_{t_0}^{t_1}(\mu) = \mu|\widehat{C}_{t_0} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathfrak{M}(\widehat{C}_{t_1}) \text{ et } t_0 \leqslant t_1.$$

Nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *L'opération de restriction $\{\mu|\widehat{C}_t\}$, où $t \in T$, donne lieu à la relation*

(2) $$\mathfrak{M}_C \leftrightarrow \varprojlim\{\mathfrak{M}(\widehat{C}_t), \mathrm{restr}\}.$$

Démonstration. D'abord, l'opération envisagée transforme le membre gauche de la formule (2) dans son membre droit. Car en admettant que $\mu \in \mathfrak{M}_C$, on a

$$(\mu|\widehat{C}_t) \in \mathfrak{M}(\widehat{C}_t) \quad \text{et} \quad ((\mu|\widehat{C}_{t_1})|\widehat{C}_{t_0}) = \mu|\widehat{C}_{t_0}.$$

Puis, l'opération de restriction est biunivoque. Car en supposant que $\mu_1 \neq \mu_2$, il existe un $a \in A$ tel que $\mu_1(a) \neq \mu_2(a)$. En désignant par $t(a)$ l'indice tel que

(3) $$C_{t(a)} = (a, a')$$

(cf. § 1 (10)), il vient $\mu_1|\widehat{C}_{t(a)} \neq \mu_2|\widehat{C}_{t(a)}$.

Nous nous proposons de démontrer à présent que l'opération envisagée est une transformation „sur" le membre droit de 2.

Il s'agit donc de prouver qu'étant donné un système $\{\nu_t\}$ où $t \in T$ et où

(4) $$\nu_t \in \mathfrak{M}(\widehat{C}_t) \quad \text{et} \quad \nu_{t_0} = \nu_{t_1}|\widehat{C}_{t_0} \quad \text{dès que} \quad t_0 \leqslant t_1,$$

il existe un $\mu \in \mathfrak{M}_C$ tel que

(5) $$\mu|\widehat{C}_t = \nu_t \quad \text{quel que soit} \quad t \in T.$$

Nous allons montrer en effet que telle est la fonction μ définie par la condition (cf. (3)):

(6) $$\mu(a) = \nu_{t(a)}(a) \quad \text{quel que soit} \quad a \in A.$$

D'abord $\mu \in \mathfrak{M}_C$. Pour s'en convaincre, posons $a = \sum a_\tau$ où $\{a_\tau\} \subset C_t$. Il s'agit de prouver que

(7) $$\nu_{t(a)}(a) = \sum_\tau \nu_{t(a_\tau)}(a_\tau).$$

Or on constate aussitôt que $(a, a') \leqslant C_t$ et $(a_\tau, a'_\tau) \leqslant C_t$, d'où (selon § 1 (6)) $t(a) \leqslant t$ et $t(a_\tau) \leqslant t$, donc en vertu de (4) on a

(8) $$\nu_{t(a)}(a) = \nu_t(a) \quad \text{et} \quad \nu_{t(a_\tau)}(a_\tau) = \nu_t(a_\tau).$$

L'égalité (7) en résulte en vertu de l'additivité de la fonction ν_t (qui est élément de $\mathfrak{M}(\widehat{C}_t)$).

Reste à établir la formule (5). Cela revient à dire, qu'étant donné $a \in C_t$, on a $\mu(a) = \nu_t(a)$, ou encore (conformément à (6)), que $\nu_{t(a)}(a) = \nu_t(a)$. Mais cela est vrai d'après (8).

Remarque. En tenant compte de la formule (2) qui permet de représenter l'ensemble de $\boldsymbol{C}$-mesures comme limite des ensembles $\mathfrak{M}(\widehat{C}_t)$, il importe de remarquer qu'en général, une algèbre $\boldsymbol{C}$-complète ne se laisse pas représenter comme limite des algèbres $\widehat{C}_t$. Plus précisément: soit $f_{t_0}^{t_1}(x)$, où $x \in \widehat{C}_{t_1}$, le plus petit élément de $\widehat{C}_{t_0}$ qui contient x. On voit facilement que

$$f_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_s x_s\Big) = \sum_s f_{t_0}^{t_1}(x_s) \quad \text{et} \quad f_{t_0}^{t_1}(x_1 - x_2) = f_{t_0}^{t_1}(x_1) - f_{t_0}^{t_1}(x_2).$$

Il en résulte que la limite $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\widehat{C}_t, f_{t_0}^{t_1}\}$ est une algèbre complète, vu que les algèbres $\widehat{C}_t$ sont complètes (4).

Comme dans le cas des filtres maximaux, on a le théorème suivant (cf. [6], p. 17):

THÉORÈME 3. *La fonction caractéristique d'un $\boldsymbol{C}$-filtre est une $\boldsymbol{C}$-mesure.*

Réciproquement, toute $\boldsymbol{C}$-mesure qui n'admet que deux valeurs 0 et 1 (et qui n'est pas identiquement nulle) est la fonction caractéristique d'un $\boldsymbol{C}$-filtre.

(4) En ce qui concerne la représentation des algèbres de Boole par des systèmes inverses d'algèbres de Boole, voir [2].

Démonstration. Soit, en effet, α_V la fonction caractéristique de V, c'est-à-dire que

$$\alpha_V(a) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad a \in V, \\ 0 & \text{pour} \quad a \in A - V. \end{cases}$$

Soit $\boldsymbol{C} = \{C_t\}$. Pour $t \in T$, $h^t(V)$ est le seul élément de $C_t \cap V$ (cf. § 2 (4)); tous les autres en sont disjoints. On a donc $\alpha_V(h^t(V)) = 1$ et $\alpha_V(x) = 0$ pour tout $x \in C_t - (h^t(V))$. Soit $z = \sum z_\tau$ où $z_\tau \in C_t$; si l'un des z_τ est identique à $h^t(V)$, on a $z \supset h^t(V)$, d'où $z \in V$, donc $\alpha_V(z) = 1 = \sum \alpha_V(z_\tau)$, dans le cas contraire $z \cdot h^t(V) = 0$, d'où $z \in A - V$, donc $\alpha_V(z) = 0 = \sum \alpha_V(z_\tau)$.

La fonction α_V est donc une $\boldsymbol{C}$-mesure (cf. (1)).

Réciproquement, admettons que μ est une $\boldsymbol{C}$-mesure à valeurs 0 et 1, et désignons par V l'ensemble des x tels que $\mu(x) = 1$. Evidemment $\mu(1) = 1$ (puisque le recouvrement (x, x') appartient à la famille $\boldsymbol{C}$). Il s'en suit que dans tout recouvrement C_t il existe un (donc un seul élément) a_t tel que $\mu(a_t) = 1$.

Nous en concluons que les conditions (1)-(3) du § 2 sont satisfaites (c'est-à-dire que V est un filtre). En effet, si $a \subset b$ et $\mu(a) = 1$, on en déduit, en considérant le recouvrement $(a, b-a, b')$ (cf. § 1 (12)), que $\mu(b-a) = 0$, d'où $\mu(b) = \mu(a) + \mu(b-a) = 1$. La condition (1) est donc satisfaite. Pour établir (2), nous envisageons le recouvrement $(a \cdot b, a \cdot b', a' \cdot b, a' \cdot b')$ (en omettant au besoin les termes vides); si $\mu(a) = 1 = \mu(b)$, il vient $\mu(a') = 0 = \mu(b')$, d'où $\mu(a \cdot b') = 0 = \mu(a' \cdot b) = \mu(a' \cdot b')$; donc $\mu(a \cdot b) = 1$.

V est donc un $\boldsymbol{C}$-filtre et $\mu = \alpha_V$.

§ 5. L'ensemble $\mathfrak{M}_C$ de $\boldsymbol{C}$-mesures conçu comme groupe topologique. On confère à $\mathfrak{M}_C$ le caractère d'un groupe abélien en convenant que

(1) $$(\mu_1 + \mu_2)(a) = \mu_1(a) + \mu_2(a) \quad \text{quel que soit} \quad a \in A.$$

On constate aussitôt que, pour tout $t \in T$, *$\mu|\widehat{C}_t$ est une homomorphie de $\mathfrak{M}_C$ dans $\mathfrak{M}(\widehat{C}_t)$* et, pour tout $a \in A$, *$\mu(a)$ est une homomorphie de $\mathfrak{M}_C$ dans $\mathfrak{Z}$* (groupe des nombres entiers).

Conférons à $\mathfrak{M}_C$ la topologie induite par la formule § 4 (2), c'est-à-dire que la fermeture de tout $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_C$ est définie par l'équivalence:

(2) $$(\mu \in \overline{\mathfrak{N}}) \equiv [(\mu|\widehat{C}_t) \in (\mathfrak{N}|\widehat{C}_t) \text{ quel que soit } t \in T].$$

On prouve facilement (cf. [4], Appendice § 1, II) que $\mathfrak{M}_C$ est un groupe topologique complètement régulier et de dimension 0.

THÉORÈME 4. *Étant donné un système de $\boldsymbol{C}$-filtres $V_1, \ldots, V_m$, distincts deux à deux, leurs fonctions caractéristiques $\alpha_{V_1}, \ldots, \alpha_{V_m}$ sont linéairement indépendantes; c'est-à-dire que l'implication suivante est satisfaite:*

(3) $$(k_1\alpha_{V_1} + \ldots + k_m\alpha_{V_m} = 0) \Rightarrow (k_1 = \ldots = k_m = 0).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer l'existence d'un système $a_1, \dots, a_m$ tel que

$$(4) \qquad a_i \in V_i \quad \text{et} \quad a_i \cdot a_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j .$$

Car on en déduira aussitôt que $a_{V_i}(a_i) = 1$ et $a_{V_i}(a_j) = 0$ pour $i \neq j$, d'où l'implication (3) suivra immédiatement.

Or, pour établir (4), procédons par induction. Soit $m = 2$. En supposant que $a \in V_1 - V_2$, on pose $a_1 = a$ et $a_2 = a'$. Admettons donc que $m > 2$ et que notre proposition est vraie pour tout $k < m$. Soit $a \in V_{m-1} - V_m$ et soient $b_1, \dots, b_{m-1}$ et $c_1, \dots, c_{m-1}$ deux systèmes, chacun composé d'éléments disjoints, et tels que

$$b_i \in V_i \text{ pour } i = 1, \dots, m-1, \quad \text{et} \quad c_i \in V_i \text{ pour } i = 1, \dots, m-2, m .$$

Posons: $a_i = b_i \cdot c_i$ pour $i \leqslant m-2$, $a_{m-1} = b_{m-1} \cdot a$ et $a_m = c_m \cdot a'$.

On vérifie facilement que les conditions (4) se trouvent réalisées.

Considérons à présent le cas particulier, où parmi les recouvrements C_t, $t \in T$, il existe le recouvrement le plus fin. Il se compose donc des atomes de l'algèbre A (cf. § 1 (13)). D'après le corollaire du § 2, tout atome a détermine alors un C-filtre $V(a)$ composé des x qui contiennent a; posons $\bar{a}_a = a_{V(a)}$. La fonction $\bar{a}_a$, que nous appelerons *mesure caractéristique* de a, satisfait à la condition

$$\bar{a}_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad a \subset x , \\ 0 & \text{pour} \quad a \cdot x = 0 . \end{cases}$$

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Dans les hypothèses ci-dessus, les mesures caractéristiques des atomes, sont les générateurs du groupe $\mathfrak{M}_C$.*

Démonstration. Soit $\mu \in \mathfrak{M}_C$. Posons $k_a = \mu(a)$ où la variable a parcourt l'ensemble de tous les atomes de A. Il s'agit de prouver que

$$(5) \qquad \mu = \sum_a k_a \bar{a}_a, \text{ c'est-à-dire } \mu(x) = \sum_a k_a \bar{a}_a(x) \text{ quel que soit } x \in A .$$

Il suffit évidemment d'établir la dernière égalité pour le cas où x est un atome. Dans ce cas-ci, cette égalité suit des formules $\bar{a}_x(x) = 1$ et $\bar{a}_a(x) = 0$ pour $x \neq a$.

La démonstration se trouve achevée en rapprochant l'égalité (5) du théorème 4.

Dans les cas particulièrement simples où le recouvrement le plus fin se compose d'un nombre fini (soit m) ou dénombrable d'atomes, le groupe $\mathfrak{M}_C$ est isomorphe respectivement à $\mathfrak{Z}^m$ ou à $\mathfrak{Z}^\omega$ (le dernier désignant le groupe additif de toutes les suites infinies de nombres entiers, chacune ne contenant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$).

Dans le cas général, où le nombre des atomes est arbitraire, on obtient un résultat analogue.

Deuxième partie. Applications topologiques

Donnons-nous un espace métrique séparable $\mathcal{X}$ et considérons l'algèbre de Boole ayant pour éléments les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$. Dans cette interprétation, $A + B$ désigne l'union des ensembles (fermés-ouverts) A et B, $A \cdot B$ désigne leur intersection, $1 = \mathcal{X}$, $A = (0,1)^{\mathcal{X}}$ (famille de tous les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$).

Soit $\boldsymbol{C}$ une famille arbitraire d'ensembles fermés-ouverts, non vides, disjoints et dont l'union est l'espace $\mathcal{X}$ tout entier. Désignons par $\mathbf{R}$ la classe de toutes les familles de ce genre. $\boldsymbol{C}$ est un recouvrement dans le sens de la définition 1 du § 1. Autrement dit (cf. § 1 (2)), étant donné un ensemble fermé-ouvert $Z \neq \mathcal{X}$, il existe un $X \in \boldsymbol{C}$ tel que $X \not\subset Z$; en effet, p étant un point de $\mathcal{X} - Z$, l'ensemble X tel que $p \in X \in \boldsymbol{C}$ est l'ensemble demandé.

On constate facilement que la classe $\mathbf{R}$ est régulière dans le sens de la définition 2 du § 1 (cf. aussi § 1 (12')) ([5]).

Remarque 1. La classe $\mathbf{R}$ ne coïncide pas en général avec la classe $\boldsymbol{R}$ (cf. définition 1); c'est-à-dire qu'il peut exister un recouvrement de $\mathcal{X}$ (dans le sens de la définition 1) tel que l'union de ses éléments n'est pas identique à $\mathcal{X}$. Pour s'en convaincre, considérons l'espace $\mathcal{X}$ formé d'une suite convergente de points $p_1, p_2, \dots$ et de leur limite q. Soit $P_n = (p_n)$. Il vient $s\{P_n\} = \mathcal{X}$ tandis que $\bigcup P_n \neq \mathcal{X}$.

Dans la même algèbre de Boole, il existe un filtre maximal qui n'est pas un $\boldsymbol{R}$-filtre. Tel est, en effet, le filtre V composé de tous les ensembles fermés-ouverts qui contiennent le point q. Car $(P_1, P_2, \dots)$ est un recouvrement-élément de $\mathbf{R}$ et cependant aucun P_n n'appartient à V.

§ 6. Quasi-composantes de l'espace $\mathcal{X}$.

Désignons par $\boldsymbol{Q}(\mathcal{X})$, ou — plus court — par $\boldsymbol{Q}$, la famille de toutes les quasi-composantes ([6]) de l'espace $\mathcal{X}$. Attachons à toute quasi-composante Q de $\mathcal{X}$ la famille $\boldsymbol{E}(Q)$ de tous les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$ qui contiennent Q. On constate facilement que $\boldsymbol{E}(Q)$ *est un* $\mathbf{R}$*-filtre*

$$(1) \qquad \boldsymbol{E}: \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{U}_{\mathbf{R}} .$$

On a le théorème plus précis suivant:

THÉORÈME 6. *$\boldsymbol{E}$ est une transformation biunivoque de $\boldsymbol{Q}$ sur $\boldsymbol{U}_{\mathbf{R}}$. Autrement dit, à tout $\mathbf{R}$-filtre V correspond une et une seule quasi-composante Q de $\mathcal{X}$ telle que $V = \boldsymbol{E}(Q)$. En symbole*

$$\boldsymbol{E}: \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{U}_{\mathbf{R}} .$$

([5]) Comme dans le cas de la formule § 1 (12'), on pose ici $T = \mathbf{R}$ et on écrit $\boldsymbol{C}$ au lieu de $\boldsymbol{C}_C$.

([6]) La quasi-composante du point p est, par définition, l'intersection de tous les sous-ensembles fermés-ouverts de l'espace qui contiennent ce point.

Démonstration (7). D'abord, la transformation $\boldsymbol{E}$ est biunivoque. En effet, si $Q_1 \neq Q_2$, il existe un Z fermé-ouvert tel que $Q_1 \subset Z$ et $Q_2 \cap Z = \emptyset$. Donc $Z \in \boldsymbol{E}(Q_1) - \boldsymbol{E}(Q_2)$.

Afin de démontrer que la transformation $\boldsymbol{E}$ est „sur $\boldsymbol{U}_{\mathbf{R}}$“, considérons un $V \in \boldsymbol{U}_{\mathbf{R}}$. Il s'agit de démontrer l'existence d'un point commun à tous les $Z \in V$ (on désignera alors par Q la quasi-composante de ce point). Supposons, par contre, qu'à tout $x \in \mathcal{X}$ correspond un $Z_x \in V$ tel que $x \in Z'_x$. Il en résulte que $\bigcup_x Z'_x = \mathcal{X}$, et en vertu du théorème de Lindelöf, il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\bigcup_i Z'_{x_i} = \mathcal{X}$. Posons

$$G_i = Z'_{x_i} - \bigcup_{j<i} Z'_{x_j}, \quad \text{d'où} \quad \bigcup_i G_i = \mathcal{X} \text{ et } G_i \cap G_j = 0 \text{ pour } i \neq j .$$

La suite $G_1, G_2, \ldots$ est donc un recouvrement-élément de $\mathbf{R}$ (en y éloignant, au besoin, les G_i vides), et V étant un $\mathbf{R}$-filtre, il existe (cf. la définition 4 du § 2) un indice i tel que $G_i \in V$. Comme $G_i \subset Z'_{x_i}$, il vient en vertu de § 2 (1), $Z'_{x_i} \in V$. Mais ceci est impossible puisque $Z_{x_i} \in V$.

Les théorèmes 1 et 6 impliquent le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Désignons par $H^{\boldsymbol{C}}(Q)$ pour tout $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}$, l'ensemble-élément de $\boldsymbol{C}$ défini (de façon univoque) par la condition suivante*

$$Q \subset H^{\boldsymbol{C}}(Q) \in \boldsymbol{C} . \tag{2}$$

L'application $H = \{H^{\boldsymbol{C}}\}$, où $\boldsymbol{C}$ parcourt $\mathbf{R}$ est alors une transformation biunivoque de $\boldsymbol{Q}$ sur la limite inverse $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}, \supset\}$. En symbole (cf. le renvoi (1) *du* § 3):

$$H\colon \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}, \supset\} . \tag{3}$$

On a, en effet, $H = h\boldsymbol{E}$. Car en posant $V = \boldsymbol{E}(Q)$, il vient, d'après § 2 (4), $h^{\boldsymbol{C}}(V) \in \boldsymbol{V}$, donc $h^{\boldsymbol{C}}(V) \in \boldsymbol{E}(Q)$, d'où $Q \subset h^{\boldsymbol{C}}(V)$; comme en outre (d'après § 2 (4)) $h^{\boldsymbol{C}}(V) \in \boldsymbol{C}$, on conclut de (2) que $H^{\boldsymbol{C}}(Q) = h^{\boldsymbol{C}}(V) = h^{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{E}(Q))$.

Remarque 2. Le cas considéré au § 1 où parmi les recouvrements $C_t \in \boldsymbol{C}$, il existe le plus fin, correspond dans l'interprétation topologique envisagé à celui où toutes les quasi-composantes de $\mathcal{X}$ sont ouvertes (elles coïncident alors avec les composantes de $\mathcal{X}$). Ces quasi-composantes sont alors les atomes de l'algèbre de Boole $(0, 1)^{\mathcal{X}}$.

Tel est, en particulier, le cas où $\mathcal{X}$ est localement connexe.

Remarque 3. Le théorème 7 admet la généralisation suivante:

Admettons que $\mathbf{C} = \{C_t\}, t \in T$, se compose de tous les éléments de $\mathbf{R}$ (ou — plus généralement — est cofinale avec $\mathbf{R}$) et désignons par $K^t(Q)$ pour tout $Q \in \boldsymbol{Q}$ l'ensemble-élément de $\boldsymbol{C}_t$ défini (de façon univoque) par la condition suivante

$$Q \subset K^t(Q) \in \boldsymbol{C}_t . \tag{4}$$

On a alors

$$K\colon \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}_t, \supset\} . \tag{5}$$

En effet, on a (cf. § 2 (6)) $\boldsymbol{U}_{\mathbf{C}} = \boldsymbol{U}_{\mathbf{R}}$, donc (comme dans la démonstration du théorème 7) $K = HE$ où $(H^t(V)) = V \cap \boldsymbol{C}_t$ (cf. § 2 (4)).

Remarque 4. Dans le théorème 7, *la propriété de Lindelöf de l'espace $\mathcal{X}$ est essentielle.* Pour s'en convaincre, envisageons l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$ comme espace $\mathcal{X}$ (avec la topologie habituelle) et désignons par V la famille de tous les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$ qui contiennent un intervalle final de $\mathcal{X}$. On constante facilement que V est un $\mathbf{R}$-filtre et que cependant l'intersection des ensembles-éléments de V est vide.

Remarque 5. Comme nous l'avons vu (Remarque 2 du § 3), la formule (1) du § 3 induit une topologie dans l'ensemble des $\boldsymbol{C}$-filtres. En vertu du théorème 6, la même topologie s'applique à l'ensemble $\boldsymbol{Q}$ des quasi-composantes de $\mathcal{X}$. Plus précisément, en appliquant la formule (3), on définit la fermeture de $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Q}$ par l'équivalence:

$$(Q \in \overline{\boldsymbol{X}}) \equiv [H^{\boldsymbol{C}}(Q) \in H^{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{X}) \text{ quel que soit } \boldsymbol{C} \in \mathbf{R}] . \tag{6}$$

L'espace $\boldsymbol{Q}$ devient ainsi complètement régulier de dimension 0.

Il est à remarquer que cette topologie de $\boldsymbol{Q}$ ne coïncide pas en général avec la topologie-quotient où $\boldsymbol{Q}$ est considéré comme quotient de $\mathcal{X}$ par la relation „x et y appartiennent à la même quasi-composante de $\mathcal{X}$“ (ce que l'on exprime aussi en disant que $\mathcal{X}$ est *connexe entre x et y*). Car il existe des espaces de *dimension positive* (même de dimension infinie) dont les quasi-composantes se réduisent à des points individuels (cf. [4], p. 95); un espace de ce genre est évidemment homéomorphe à l'espace-quotient précité.

Ajoutons que dans le cas de $\mathcal{X}$ *compact*, les deux topologies: la topologie-quotient et celle définie par la formule (6), coïncident.

§ 7. Quasi-composantes de l'espace $\mathcal{X}$ considéré comme sous-ensemble d'un espace $\mathcal{Y}$ localement connexe. Dans ce cas on parvient à une caractérisation de l'ensemble $\boldsymbol{Q}$ en utilisant la Remarque 1 du § 3.

Désignons, à ce but, par $\boldsymbol{T}$ *la famille de tous les ensembles G ouverts (dans $\mathcal{Y}$) tels que $\mathcal{X} \subset G$.* Cette famille est partiellement ordonnée par la relation d'inclusion:

$$(G_0 \leqslant G_1) \equiv (G_0 \supset G_1) . \tag{1}$$

Comme $G_1 \supset (G_1 \cap G_2)$ et $G_2 \supset (G_1 \cap G_2)$, la famille $\boldsymbol{T}$ est *dirigée*.

(7) Dans la démonstration actuelle nous avons tenu compte de simplifications suggérées par M. R. Sikorski.

Désignons, comme d'habitude, par $\boldsymbol{Q}(G)$ la famille des quasi-composantes de l'ensemble G (qui coïncident d'ailleurs avec les composantes de G).

On voit aussitôt que, si $G_0 \leqslant G_1$, à tout $W \in \boldsymbol{Q}(G_1)$ correspond un et un seul $U \in \boldsymbol{Q}(G_0)$ tel que $W \subset U$. Le système $\{\boldsymbol{Q}(G), \supset\}$, où $G \in \boldsymbol{T}$, est donc un système inverse et sa limite a pour éléments les $\{W^G\}$ tels que

$$(2) \qquad W^G \in \boldsymbol{Q}(G) \quad \text{et} \quad W^{G_0} \supset W^{G_1} \quad \text{dès que} \quad G_0 \leqslant G_1 .$$

THÉORÈME 8 [8]. *Désignons, pour tout $Q \in \boldsymbol{Q}(\mathcal{X})$, par $L^G(Q)$ l'ensemble défini par la condition*

$$(3) \qquad Q \subset L^G(Q) \in \boldsymbol{Q}(G) .$$

L'application $L = \{L^G\}$, où $G \in \boldsymbol{T}$, est alors une transformation biunivoque de $\boldsymbol{Q}(\mathcal{X})$ sur $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{Q}(G), \supset\}$:

$$(4) \qquad L\colon \boldsymbol{Q}(\mathcal{X}) \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{Q}(G), \supset\} .$$

Démonstration. Désignons, pour tout $G \in \boldsymbol{T}$, par $\boldsymbol{C}_G$ la famille de toutes les intersections non vides $Z = \mathcal{X} \cap W$ où $W \in \boldsymbol{Q}(G)$.

On constate aussitôt qu'à tout $Z \in \boldsymbol{C}_G$ correspond un seul $W \in \boldsymbol{Q}(G)$ tel que $Z = \mathcal{X} \cap W$; désignons le par $F^G(Z)$. On a donc

$$(5) \qquad Z = \mathcal{X} \cap F^G(Z) \quad \text{et} \quad F^G(Z) \in \boldsymbol{Q}(G) .$$

Les composantes W de G étant fermés-ouvertes dans G, on voit facilement que $\boldsymbol{C}_G$ est un recouvrement de $\mathcal{X}$ à termes disjoints, c'est-à-dire que $\boldsymbol{C}_G \in \mathbf{R}$. Nous allons démontrer que la classe $\mathbf{C} = \{\boldsymbol{C}_G\}$ où $G \in \boldsymbol{T}$ est *cofinale* avec $\mathbf{R}$, c'est-à-dire qu'étant donné un $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}$, il existe un $G \in \boldsymbol{T}$ tel que $\boldsymbol{C} \leqslant \boldsymbol{C}_G$.

Posons $\boldsymbol{C} = \{Z_\tau\}$. Les ensembles Z_τ étant disjoints et ouverts dans $\mathcal{X}$, il existe une famille $\{V_\tau\}$ d'ensembles disjoints, ouverts dans $\mathcal{Y}$ et tels que $\mathcal{X} \cap V_\tau = Z_\tau$ (cf. [3], p. 122, théorème 2). Posons $G = \bigcup_\tau V_\tau$. Il vient $\boldsymbol{C} \leqslant \boldsymbol{C}_G$. En effet, $F^G(Z)$ étant une composante de G (cf. (5)), il existe un τ tel que $F^G(Z) \subset V_\tau$. Par conséquent

$$Z = \mathcal{X} \cap F^G(Z) \subset (\mathcal{X} \cap V_\tau) = Z_\tau \in \boldsymbol{C} .$$

La classe $\mathbf{C} = \{\boldsymbol{C}_G\}$ étant cofinale avec $\mathbf{R}$, la Remarque 3 du § 6 est applicable en substituant à la formule (4) du § 6 la suivante

$$(6) \qquad Q \subset K^G(Q) \in \boldsymbol{C}_G \quad \text{pour} \quad Q \in \boldsymbol{Q}(\mathcal{X}) .$$

[8] Ce théorème a été démontré par S. Mrówka, voir [5].

On en conclut (d'après § 6 (5)) que

$$(7) \qquad K\colon \boldsymbol{Q}(\mathcal{X}) \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}_G, \supset\} .$$

D'autre part, les formules (5) et (6) impliquent aussitôt que

$$(8) \qquad Q \subset K^G(Q) \subset F^G K^G(Q) \in \boldsymbol{Q}(G) , \quad \text{d'où} \quad L^G(Q) = F^G K^G(Q)$$

en vertu de (3).

Donc pour déduire la formule (4) de la formule (7) (ce qui achevera la démonstration du théorème 8), il reste à montrer qu'en posant

$$(9) \qquad F\{Z^G\} = \{F^G(Z^G)\} \quad \text{pour tout} \quad \{Z^G\} \in \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}_G, \supset\} ,$$

on a

$$(10) \qquad F\colon \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}_G, \supset\} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{Q}(G), \supset\} .$$

Nous allons appliquer à ce but la Remarque 1 du § 3.

Or soient $G_0 \leqslant G_1$ et $Z_0 \in \boldsymbol{C}_{G_0}$, $Z_1 \in \boldsymbol{C}_{G_1}$. Il vient

$$(11) \qquad (Z_1 \subset Z_0) \equiv [F^{G_1}(Z_1) \subset F^{G_0}(Z_0)] .$$

Soit, en effet, $Z_1 \subset Z_0$. Comme $F^{G_1}(Z_1) \in \boldsymbol{Q}(G_1)$ (selon (5)) et $G_1 \subset G_0$, il n'existe qu'une seule composante U de G_0 telle que $F^{G_1}(Z_1) \subset U$; il vient $U = F^{G_0}(Z_0)$ puisque $Z_1 \subset U \cap F^{G_0}(Z_0)$ d'après les formules

$$Z_1 \subset Z_0 \subset F^{G_0}(Z_0) \quad \text{et} \quad Z_1 \subset F^{G_1}(Z_1) \subset U .$$

L'implication de gauche à droite est donc établie. L'implication inverse résulte directement de (5).

L'équivalence (11) implique (cf. les formules (3) et (4) du § 3) que

$$(12) \qquad F\colon \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{C}_G, \supset\} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{F^G(\boldsymbol{C}_G), \supset\} .$$

La formule (10) sera donc établie dès que nous aurons prouvé que

$$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{F^G(\boldsymbol{C}_G), \supset\} = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\{\boldsymbol{Q}(G), \supset\};$$

autrement dit: qu'étant donnée une famille $\{W^G\}$ satisfaisant à (2), on a pour tout $G \in \boldsymbol{T}$, $W^G = F^G(\boldsymbol{C}_G)$, c'est-à-dire (cf. (5)) que $\mathcal{X} \cap W^G \neq 0$.

Or, en supprimant de G toutes les composantes disjointes de $\mathcal{X}$, on obtient un ensemble ouvert $G_1 \supset \mathcal{X}$ tel que $G \leqslant G_1$. Donc $G_1 \in \boldsymbol{T}$ et $\mathcal{X} \cap W^{G_1} \neq 0$. Il en résulte en vertu de (2) que $\mathcal{X} \cap W^G \neq 0$.

§ 8. Applications topologiques de mesures entières [9]. $\mathcal{X}$, $\boldsymbol{A}$ et $\mathbf{R}$ ayant le même sens qu'auparavant, soit $\mathbf{C} = \{\boldsymbol{C}_t\}$, $t \in T$, une famille contenant comme éléments tous les recouvrements qui appartiennent à $\mathbf{R}$. L'ensemble $\mathfrak{M}_{\mathbf{C}}$, que nous désignerons à présent $\mathcal{M}(\mathcal{X})$, coïncide

[9] Tous les théorèmes du § 8 se trouvent dans [4], Appendice.

alors avec celui de toutes les mesures entières définies sur les sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathcal{X}$; plus précisément, si $Z = \bigcup Z_\tau$, où $Z, Z_\tau \in (0,1)^{\mathcal{X}}$ et $Z_\tau \cap Z_{\tau'} = 0$ pour $\tau \neq \tau'$, alors $\mu(Z) = \sum_\tau \mu(Z_\tau)$.

Tous les theorèmes des §§ 4 et 5 se traduisent alors en théorèmes topologiques. En particulier

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}) \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\{\mathfrak{M}(\widehat{C}_i)\,,\ \mathrm{restr}\} \tag{1}$$

où l'opération $\{\mu|C_i\}$ est l'isomorphie demandée, qui est en même temps une homéomorphie, la topologie étant définie par la formule (2) du § 5.

A la place de fonction caractéristique d'un $\mathbf{R}$-filtre V, on considère la „mesure caractéristique" de la quasi-composante Q qui correspond à V conformément au théorème 2 du § 6.

En considérant, comme dans le § 7, $\mathcal{X}$ comme sous-ensemble d'un espace $\mathcal{Y}$ localement connexe, on parvient à la caractérisation *extérieure* suivante du groupe $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Désignons, d'une façon générale par $\mu^{\mathcal{Y}}$, pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, *l'extension* de la mesure μ sur $(0,1)^{\mathcal{Y}}$ en posant

$$\mu^{\mathcal{Y}}(H) = \mu(\mathcal{X} \cap H) \quad \text{quel que soit} \quad H \in (0,1)^{\mathcal{Y}}.$$

On montre alors (voir [4], p. 469) que l'opération d'extension $\{\mu^G\}$, où G parcourt les sous-ensembles ouverts de $\mathcal{Y}$ qui contiennent $\mathcal{X}$, est une isomorphie (et en même temps, une homéomorphie):

$$\mathcal{M}(\mathcal{X}) \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\{\mathcal{M}(G)\,,\ \mathrm{ext}\}\,. \tag{2}$$

Ces théorèmes jouent un rôle important dans la démonstration des théorèmes de dualité entre le groupe de cohomotopie et celui de mesures. Plus précisément: désignons par $\mathcal{E}^n$ l'espace euclidien, par $\mathcal{S}_n$ la sphère n-dimensionnelle et par $\mathcal{P}_n$ l'espace $\mathcal{E}^n$ diminué du point 0. Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}^n$. Soit $\mathcal{N}(\mathcal{Y})$ le groupe des mesures satisfaisant à la condition $\mu(\mathcal{Y}) = 0$. On a alors l'isomorphie (voir [4], p. 497):

$$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\{\boldsymbol{Q}(\mathcal{P}_n^F)\,,\ \mathrm{restr}\} \leftrightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\,\{\mathcal{N}(G)\,,\ \mathrm{ext}\} \tag{3}$$

où F parcout les sous-ensembles compacts de $\mathcal{X}$ et $G = \mathcal{S}_n - F$ et où $\boldsymbol{Q}(\mathcal{P}_n^F)$ est conçu comme groupe relativement à l'opération de la multiplication cohomotopique (de Borsuk).

D'autre part, on montre que l'opération de restriction $\{\Gamma|F\}$ est une isomorphie de $\boldsymbol{Q}(\mathcal{P}_n^{\mathcal{X}})$ dans le membre gauche de (3) et que la formule (2) reste vraie en remplaçant $\mathcal{M}$ par $\mathcal{N}$. Il en résulte l'existence d'une isomorphie de $\boldsymbol{Q}(\mathcal{P}_n^{\mathcal{X}})$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{S}_n - \mathcal{X})$. Cette isomorphie est „sur":

$$\boldsymbol{Q}(\mathcal{P}_n^{\mathcal{X}}) \leftrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{S}_n - \mathcal{X}) \tag{4}$$

si $\mathcal{X}$ est localement compact (voir [4], p. 499).

Ce sont bien ces considérations qui nous ont suggérées d'analyser le rôle de l'Algèbre de Boole dans les raisonnements qui y intervenaient et de réunir dans une étude séparée ceux qui se prêtaient à être formulés en termes de cette Algèbre.

Travaux cités

[1] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton 1952.

[2] F. Haimo, *Some limits of Boolean algebras*, Proc. Amer. math. Soc. 2, pp. 566-576.

[3] K. Kuratowski, *Topologie I*, éd. IV, Warszawa 1959.

[4] — *Topologie II*, éd. III, Warszawa 1961.

[5] S. Mrówka, *On the sets of quasi-components*, Bull. Acad. Pol. Sci. VII (1959), pp. 703-705.

[6] R. Sikorski, *Boolean algebras*, Berlin 1960.

Reçu par la Rédaction le 29. 8. 1961