[5] E. Marczewski, *A general scheme of the notions of independence in mathematics*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 6 (1958), S. 731-736.
[6] J. C. C. McKinsey und A. Tarski, *The algebra of topology*, Ann. Math. 45 (1944), S. 141-191.
[7] S. Mrówka, *Two remarks on my paper: "On the ideals' extension theorem and its equivalence to the axiom of choice"*, Fund. Math. 46 (1959), S. 165-166.
[8] W. Nitka, *Self-dependent elements in abstract algebras*, Coll. Math. 8 (1961), S. 15-17.
[9] J. Schmidt, *Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie*, Math. Nachr. 7 (1952), S. 165-182.
[10] — *Über einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren*, Ber. Math. Tag. Berlin 1953, S. 21-48.
[11] — *Mehrstufige Austauschstrukturen*, Z. math. Logik Grundl. Math. 2 (1956), S. 233-249.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT KÖLN

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1961

Zusatz bei der Korrektur: Herr Dr. S. Świerczkowski hat mit freundlich auf seine im „Colloquium Mathematicum" erscheinende Arbeit *A sufficient condition for independence* aufmerksam gemacht. In dieser Arbeit wird das auf p. 495 oben gestellte Problem dahingehend gelöst, daß das Analogon zum Korollar 2, p. 492 nun auch für die relative algebraische Unabhägigkeit in Sinne von Marczewski gillt; damit erweist sich auch der entsprechende Existenzsatz (p. 491) als mit dem Auswahlaxiom äquivalent.

Remarque à un travail de Z. Waraszkiewicz

par

J. J. Charatonik (Wrocław)

Le travail de Z. Waraszkiewicz *Sur quelques invariants des transformations continues*, paru en 1934 dans le volume XXIII de „Fundamenta Mathematicae", contient une erreur. Cette erreur se laise d'ailleurs corriger sans modifier la suite des raisonnements, mais elle semble mériter d'être envisagée, car elle donne lieu à quelques considérations d'ordre plus général.

Le travail de Waraszkiewicz dont il est question apporte, entre autres, une construction d'une famille $\mathcal{S}$ de $2^{\aleph_0}$ courbes (c'est-à-dire de continus de dimension 1) topologiquement assez simples, mais bien singulières: aucune d'elles n'est image continue d'aucune autre (incomparabilité), pas plus qu'elles ne sont à la fois des images continues d'aucune d'entre elles (absence de modèle commun parmi elles).

Waraszkiewicz fait correspondre d'une manière univoque à chaque suite $a = \{a_i\}$ d'entiers positifs une suite $\overline{a} = \{\overline{a}_i\}$ non-décroissante d'entiers positifs qu'il appelle *la base de a*. La définition qu'il donne à cette notion est assez compliquée (voir ibidem, p. 173 et 174), mais telle que $\overline{a}$ coïncide avec a dans le cas particulier où a est une suite croissante — le seul cas qui nous intéresse ici.

Puis, deux suites $\alpha = \{a_i\}$ et $\beta = \{b_i\}$ d'entiers positifs sont appelées par Waraszkiewicz incomparables lorsque leurs bases $\overline{\alpha} = \{\overline{a}_i\}$ et $\overline{\beta} = \{\overline{b}_i\}$ sont croissantes et qu'il existe pour tout i et j un k satisfaisant à la condition

$$\frac{\overline{a}_{i+k+2}-\overline{a}_{i+k+1}}{\overline{a}_{i+k+1}-\overline{a}_{i+k}} \neq \frac{\overline{b}_{j+k+2}-\overline{b}_{j+k+1}}{\overline{b}_{j+k+1}-\overline{b}_{j+k}}$$

(ibidem, p. 175). L'erreur consiste dans l'affirmation que les suites $\{\mathrm{E}(10^i\cdot x)\}$ et $\{\mathrm{E}(10^i\cdot y)\}$ sont „évidemment incomparables pour chaque couple $x\neq y$ des nombres réels dépassant 1, ..." (ibidem, p. 185).

Cette affirmation est inexacte. En effet, la définition précitée de l'incomparabilité équivaut par contraposition à la suivante:

(1) Deux suites α et β d'entiers positifs sont *comparables* lorsque l'une des alternatives (qui s'excluent mutuellement) se présente:

1° une au moins des bases $\{\bar{a}_i\}$ et $\{\bar{b}_i\}$ de ces suites n'est pas croissante,

2° le deux bases étant croissantes, il existe un i et un j tels que

$$\frac{\bar{a}_{i+k+2}-\bar{a}_{i+k+1}}{\bar{a}_{i+k+1}-\bar{a}_{i+k}} = \frac{\bar{b}_{j+k+2}-\bar{b}_{j+k+1}}{\bar{b}_{j+k+1}-\bar{b}_{j+k}} \tag{2}$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots$

Or les deux suites

$$\{\mathrm{E}(10^i\cdot x)\} \quad \text{et} \quad \{\mathrm{E}(10^i\cdot y)\} \tag{3}$$

sont évidemment croissantes pour tout $x > 1$ et tout $y > 1$; par conséquent, elles sont leurs propres bases et l'on peut montrer aussitôt qu'elles sont comparables au sens 2° pour $x = 10/9$ et $y = 11/9$ par exemple. En effet, en posant

$$i = j = 1\,, \qquad a_k = \bar{a}_k = \mathrm{E}\left(10^k\cdot\frac{10}{9}\right) \quad \text{et} \quad b_k = \bar{b}_k = \mathrm{E}\left(10^k\cdot\frac{11}{9}\right),$$

on a

$$\bar{a}_k = \sum_{s=0}^{k} 10^s \quad \text{et} \quad \bar{b}_k = 10^k + 2\cdot\sum_{s=0}^{k-1} 10^s;$$

le membre gauche de l'égalité (2) est alors

$$\frac{\bar{a}_{i+k+2}-\bar{a}_{i+k+1}}{\bar{a}_{i+k+1}-\bar{a}_{i+k}} = \frac{\sum_{s=0}^{k+3} 10^s - \sum_{s=0}^{k+2} 10^s}{\sum_{s=0}^{k+2} 10^s - \sum_{s=0}^{k+1} 10^s} = 10\,,$$

son membre droit étant

$$\frac{\bar{b}_{j+k+2}-\bar{b}_{j+k+1}}{\bar{b}_{j+k+1}-\bar{b}_{j+k}} = \frac{\left(10^{k+3}+2\cdot\sum_{s=0}^{k+2}10^s\right)-\left(10^{k+2}+2\cdot\sum_{s=0}^{k+1}10^s\right)}{\left(10^{k+2}+2\cdot\sum_{s=0}^{k+1}10^s\right)-\left(10^s+2\cdot\sum_{s=0}^{k}10^s\right)} = 10\,.$$

L'égalité (2) est donc satisfaite pour tout $k = 1, 2, \ldots$

Les théorèmes 1 et 2 qui suivent montrent qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable des x et y pour lesquels les suites (3) sont comparables.

THÉORÈME 1. *Pour que deux suites d'entiers positifs $\alpha = \{a_i\}$ et $\beta = \{b_i\}$ soient comparables au sens 2°, il suffit et il faut qu'il existe des constantes entières positives i, j et des constantes rationelles g, h telles que l'on ait*

$$\bar{b}_{j+k} = g\cdot\bar{a}_{i+k}+h \quad \textit{pour tout} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Démonstration. La condition est suffisante, car en substituant dans le membre droit de l'égalité (2) les valeurs données par (4), on constate aussitôt que cette égalité est identiquement vraie.

Pour voir que la condition est nécessaire, rappelons que la comparabilité des suites α et β entraîne par définition (voir 2°) l'existence des indices i et j tels que l'on a pour tout $k' = 1, 2, \ldots$ l'égalité (2), donc aussi l'égalité

$$\prod_{k=1}^{k'} \frac{\bar{a}_{i+k+2}-\bar{a}_{i+k+1}}{\bar{a}_{i+k+1}-\bar{a}_{i+k}} = \prod_{k=1}^{k'} \frac{\bar{b}_{j+k+2}-\bar{b}_{j+k+1}}{\bar{b}_{j+k+1}-\bar{b}_{j+k}}\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\bar{a}_{i+k'+2}-\bar{a}_{i+k'+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}} = \frac{\bar{b}_{j+k'+2}-\bar{b}_{j+k'+1}}{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}\,.$$

La dernière égalité étant trivialement vraie aussi pour $k' = 0$, il vient pour tout $k'' = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}}\cdot\sum_{k'=0}^{k''}(\bar{a}_{i+k'+2}-\bar{a}_{i+k'+1}) = \frac{1}{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}\cdot\sum_{k'=0}^{k''}(\bar{b}_{j+k'+2}-\bar{b}_{j+k'+1})\,,$$

c'est-à-dire $\dfrac{\bar{a}_{i+k''+2}-\bar{a}_{i+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}} = \dfrac{\bar{b}_{j+k''+2}-\bar{b}_{j+1}}{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}$, d'où

$$\bar{b}_{j+k''+2} = \frac{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}}\cdot\bar{a}_{i+k''+2}+\left(\bar{b}_{j+1}-\bar{a}_{i+1}\cdot\frac{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}}\right). \tag{5}$$

En y posant

$$k = k''+2\,, \qquad g = \frac{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}} \quad \text{et} \quad h = \bar{b}_{j+1}-\bar{a}_{i+1}\cdot\frac{\bar{b}_{j+2}-\bar{b}_{j+1}}{\bar{a}_{i+2}-\bar{a}_{i+1}}\,, \tag{6}$$

l'égalité (5) devient (4) pour $k = 2, 3, \ldots$ et, en vertu de (6), on a (4) également pour $k = 1$.

THÉORÈME 2. *Il existe un ensemble T de $2^{\aleph_0}$ nombres réels dépassant 1 et tels que, pour chaque couple x, y d'éléments distincts de T, les suites (3) sont incomparables.*

Démonstration. Partageons tous les nombres réels supérieurs à 1 en classes en rangeant dans une même classe, avec un x, tous les y tels que chaque $b_j = \bar{b}_j = \mathrm{E}(10^j\cdot y)$ est, pour tous les i, j entiers positifs et g, h rationels, de la forme

$$\bar{b}_j = g\cdot\bar{a}_i+h\,,$$

où $a_i = \bar{a}_i = \mathrm{E}(10^i\cdot x)$. On aura ainsi $2^{\aleph_0}$ classes dénombrables et il résulte du théorème 1 que si deux nombres x_1 et x_2 appartiennent à des classes différentes, les suites $\{E(10^i \cdot x_1)\}$ et $\{E(10^i \cdot x_2)\}$ sont incomparables. Il existe donc (axiome du choix) un ensemble T de $2^{\aleph_0}$ nombres réels distincts x pour lesquels les suites $\{E(10^i \cdot x)\}$ sont incomparables deux à deux.

Il est à noter que, dans le travail précité de Waraszkiewicz, c'est seulement la *puissance* $2^{\aleph_0}$ de l'ensemble des x et y pour lesquels les suites (3) sont incomparables et non pas sa *structure continue* qui intervient dans la construction de la famille $\mathcal{S}$ de $2^{\aleph_0}$ spirales S_x incomparables deux à deux (dans le sens défini au début). Ce fait permet de maintenir le résultat de Waraszkiewicz par la simple correction consistant à réduire la famille $\mathcal{S}$ à celle des spirales S_x où x ne parcourt que l'ensemble T de valeurs donné par le théorème 2.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1961

Suspension of transgression

by

I. M. James (Oxford)

1. Introduction. In a fibre bundle, there exist relations between the homotopy invariants of the fibre, the total space, and the base. It is interesting to investigate how such relations depend on the fibration. For homology much is already known. Here (see also [7]) we study the suspension of the transgression homomorphism in the homotopy exact sequence of the fibration. Information about the transgression is obtained which adds something to our scanty knowledge of the relation between the homotopy groups of the fibre, the total space, and the base.

Consider a fibre bundle with fibre Y and projection $f\colon B \to X$, where B is the total space and X is the base. Let SY denote the suspension of Y. We study the composition

$$\pi_r(X) \xrightarrow{\Delta} \pi_{r-1}(Y) \xrightarrow{E} \pi_r(SY),$$

where Δ is the transgression and E is the suspension operator. The Hopf fibration of S^7 over S^4 provides an example where $E\Delta$ is not induced by a map $X \to SY$.

To construct SY we take C^0 and C^1, two copies of the cone on Y, and identify their bases, so that

$$Y = C^0 \cap C^1, \quad SY = C^0 \cup C^1.$$

Since fY is a point, we regard the cone on Y as a subspace of the mapping cylinder of $f\colon B \to X$. Let Γ^0 and Γ^1 be copies of this mapping cylinder, with their bases identified, and let ΣB denote their union, so that

$$(SY;\ C^0, C^1) \subset (\Sigma B;\ \Gamma^0, \Gamma^1).$$

We extend f to a fibration $g\colon \Sigma B \to X$ by defining $g(Sz) = fz$, where $Sz \subset \Sigma B$ denotes the suspension of $z \in B$. Thus if $x \in X$ then $g^{-1}x$ is the suspension of $f^{-1}x$, and an admissible map $SY \to g^{-1}x$ is the suspension of an admissible map $Y \to f^{-1}x$. Similarly Γ^i $(i = 0, 1)$ is represented as a fibre bundle over X with fibre C^i and projection $g|\Gamma^i$. The mapping cylinder of f contains X as a subspace, and so there exist cross-sections $h^i\colon X \to \Sigma B$ such that $h^i X \subset \Gamma^i$. Let $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ be basepoints, with