may denote it by $\beta\omega_0+k_0$ where k_0 is a suitable natural. Assume, on the contrary, that $\tau<\varrho$. Then $\beta\omega_0+3k_0<\alpha\omega_0$ and consequently there is a set A_0 of class $c\big(A_0;\, a(\boldsymbol{B})\big)=\beta\omega_0+3k_0$. Denote $c(\chi_{A_0};\, \mathfrak{M}^0)=\gamma\omega_0+h$; here h is a non-negative integer, each class being 0 or an isolated ordinal. Evidently $\gamma\omega_0+h<\beta\omega_0+k_0$. From Theorem 2 it follows that $o(\chi_{A_0})\leqslant\gamma\omega_0+3h<\beta\omega_0+3k_0$. However $o(\chi_{A_0})=c\big(A_0;\, a(\boldsymbol{B})\big)$. Thus we have got a contradictory result $c(A_0)<\beta\omega_0+3k_0$.

Remark 2. If $\varrho=\alpha\omega_0+k$, $1<k<\omega_0$, is the least ordinal such that the ϱ-th class $\lambda^\varrho a(\boldsymbol{B})-\lambda^{\varrho-1}a(\boldsymbol{B})$ is empty, then from Lemma 5 it follows that each class $\varkappa^{\xi+1}\mathfrak{M}^0-\varkappa^{\xi}\mathfrak{M}^0$, $\xi\leqslant\alpha\omega_0$, is non-emtpy. In this case the number of all other non-empty classes $\varkappa^{\eta+1}\mathfrak{M}^0-\varkappa^{\eta}\mathfrak{M}^0$, $\eta>\alpha\omega_0$, is at most finite; this follows immediately from Theorem 3.

Remark 3. Let X be the set of all real numbers and $\boldsymbol{P}$ the system of all semiclosed intervals $\langle a, b)\subset X$ where $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Denote by $\mathfrak{L}$ the system of all real-valued continuous functions on X. Then $\sigma(\boldsymbol{P})$ is the system of all linear Borel sets, $\mathfrak{M}^0$ the system of all $a(\boldsymbol{P})$-measurable and $\mathfrak{M}$ the system of all B-measurable real functions, $\varkappa^{\omega_1}\mathfrak{L}$ is the system of all Baire functions.

First, let us prove that $\mathfrak{M}^0\subset\varkappa^3\mathfrak{L}$. Suppose that $g\in\mathfrak{M}_0$. Then $g(x)=\lim r_m(x)$ for each $x\in X$, r_m being simple functions. Since $\{a\leqslant g(x)<b\}=\lim\{a-1/n<g(x)\leqslant b-1/n\}\in\lambda a(\boldsymbol{P})$, we may suppose, with respect to Lemma 3 that the order $o(r_m)\leqslant 1$ for every m. According to Remark 1, each simple function of order α is the limit of a sequence of simple functions of order $\alpha-1$. Put here $\alpha=1$ and notice that each element of the algebra $a(\boldsymbol{P})$ is a finite disjoint union of semiclosed intervals so that each simple function of order 0 is the limit of a sequence of continuous functions. It follows that $r_m\in\varkappa^2\mathfrak{L}$ for each m so that $\mathfrak{M}^0\subset\varkappa^3\mathfrak{L}$.

Now prove that $\mathfrak{L}\subset\varkappa^3\mathfrak{M}^0$. Let $f\in\mathfrak{L}$ and let $\lim s_n(x)=f(x)$, for each $x\in X$, s_n being simple functions. Since each set $\{a\leqslant f(x)<b\}$ is a G_δ-set belonging to $\lambda^2a(\boldsymbol{P})$, we may suppose, in view of Lemma 3, that each order $o(s_n)\leqslant 2$ so that, by Lemma 5, also $c(s_n,\mathfrak{M}^0)\leqslant 2$. Consequently $f\in\varkappa^3\mathfrak{M}^0$ and hence $\mathfrak{L}\subset\varkappa^3\mathfrak{M}^0$.

Using the method of induction we easily prove that $\varkappa^n\mathfrak{M}^0\subset\varkappa^{n+3}\mathfrak{L}$ and $\varkappa^n\mathfrak{L}\subset\varkappa^{n+3}\mathfrak{M}^0$, $1\leqslant n<\omega_0$. Then we can conclude that $\varkappa^{\omega_0}\mathfrak{M}^0=\varkappa^{\omega_0}\mathfrak{L}$. Thus we have proved the following statement:

Each ξ-th class of Baire functions is identical with the ξ-th class of B-measurable functions, $\omega_0<\xi<\omega_1$.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1961

О диадических бикомпактах

П. Александров и **В. Пономарев** (Москва)

Введение

В этой работе дается внутренняя характеристика диадических бикомпактов, т.е. бикомпактов X, являющихся непрерывными образами так называемых обобщенных канторовых дисконтинуумов D^τ (под D^τ, где τ — бесконечное кардинальное число, понимается, как известно, топологическое произведение τ бикомпактов D_λ, каждый из которых состоит из конечного числа изолированных точек (1).

Важность класса диадических бикомпактов подтверждается, например, следующими фактами:

1°. Класс (2) диадических бикомпактов есть наименьший класс, удовлетворяющий следующим условиям

а) он содержит все бикомпакты, состоящие из конечного числа точек;

б) вместе с данными бикомпактами X_α он содержит их топологическое произведение $\prod\limits_\alpha X_\alpha$;

в) вместе с данным бикомпактом X он содержит и всякий бикомпакт Y, являющийся непрерывным образом бикомпакта X.

2°. Класс диадических бикомпактов совпадает с классом всех бикомпактов, являющихся непрерывными образами бикомпактных топологических групп. В частности, пространство всякой бикомпактной топологической группы есть диадический бикомпакт (теорема Ивановского-Кузьминова [4] (3)).

3°. Всякий диадический бикомпакт, удовлетворяющий 1-ой аксиоме счетности, метризуем (теорема А. С. Есенина-Вольпина [3]).

Из последнего предложения легко следует, что

4°. Всякий упорядоченный диадический бикомпакт гомеоморфен ограниченному множеству действительных чисел.

Интересные свойства диадических бикомпактов установлены Э. Марчевским (Шпильрайном) [6], Н. А. Шаниным [8] и другими исследователями.

(1) Без ограничения общности можно предполагать, что каждый множитель D_λ этого произведения состоит из двух точек.

(2) Можно ограничить его требованием, чтобы вес или мощность рассматриваемых бикомпактов не превосходил данного кардинального числа.

(3) Цифры в квадратных скобках означают ссылки на литературу, помещенную в конце статьи.

Даваемая нами в этой работе характеристика диадических бикомпактов состоит в требовании, чтобы в данном бикомпакте существовала измельчающаяся (4) система конечных замкнутых покрытий, являющаяся *ветвящейся* в смысле, установленном в § 1 этой работы; в § 1 приводятся и элементарные примеры ветвящихся систем покрытий. Дополнительное требование *дизъюнктности* (5) покрытий, образующих данную ветвящуюся систему, характеризует бикомпакты, гомеоморфные самим дисконтинуумам D^{τ} (теорема 1, § 2).

Основной результат доказывается в § 3.

В § 4 характеризуются диадические бикомпакты, являющиеся образами дисконтинуума D^{τ} при *неприводимых* (6) непрерывных отображениях.

В § 5 показывается, что кажущееся на первый взгляд естественным ослабление условий, наложенных на ветвящиеся системы покрытий, уже выводит нас за пределы диадических бикомпактов и приводит к новым характеристикам любых бикомпактов.

§ 1. Основные определения и примеры

1. Обозначим через Θ_{τ} направленное множество всех конечных подмножеств $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ произвольного абстрактного множества $W_{\tau} = \{\lambda\}$ (бесконечной) мощности τ, упорядоченное по включению: $\alpha' \succ \alpha$, если $\alpha' \supset \alpha$. Элементы $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ множества Θ_{τ} называем *индексами*. *Старшими* индексами называем индексы, не имеющие предшествующих в Θ_{τ}, т.е. индексы α, состоящие лишь из одного элемента $\lambda \in W_{\tau}$.

В дальнейшем мы отождествляем элемент $\lambda \in W_{\tau}$ с множеством $\alpha \in \Theta_{\tau}$, состоящим из одного этого элемента λ, так что $W_{\tau} \subset \Theta_{\tau}$.

2. Ветвящаяся система (мощности τ) покрытий пространства X есть по определению направленная по множеству $\Theta_{\tau} = \{\alpha\}$, $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda \in W_{\tau}$ система $\mathfrak{A} = \{\varphi_{\alpha}\}$ конечных (7) замкнутых покрытий, удовлетворяющая следующим двум условиям:

а) Если $\alpha = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то все элементы A_i^{α} покрытия φ_{α} суть непустые замкнутые множества (8), находящиеся во взаимнооднозначном соответствии со

(4) Система покрытий $\Sigma = \{\varphi_{\alpha}\}$ пространства X называется измельчающейся, если какова бы ни была точка $x \in X$ и ее окрестность Ox, найдется такое $\varphi_{\alpha} \in \Sigma$, что все элементы покрытия φ_{α}, содержащие точку x, лежат в Ox.

(5) Покрытие называется дизъюнктным, если оно состоит из попарно не пересекающихся множеств.

(6) Непрерывное отображение $f: X \to Y = fX$ называется неприводимым, если не существует никакого собственного замкнутого подмножества $X_0 \subset X$, для которого $fX_0 = Y$.

(7) В определении ветвящейся системы покрытий требование конечности покрытий не существенно; мы его вводим только потому, что все рассматриваемые в дальнейшем покрытия (за исключением одного примера 1° в п. 3 (стр. 421)) будут конечными.

(8) При этом мы допускаем, что два различных элемента A_i^{α} и A_j^{α} покрытия φ_{α} могут геометрически совпадать, т.е. состоять из тех же точек пространства X; другими словами, мы считаем, что элементы покрытия φ_{α} суть так называемые обозначенные мно-

всевозможными комбинациями $\{A_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, A_{i_n}^{\lambda_n}\}$ элементов покрытий $\varphi_{\lambda_1}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}$ и допускающие поэтому однозначную запись в виде $A_i^{\alpha} = A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, где i_k пробегает все значения от 1 до числа элементов s_{λ_k} покрытия φ_{λ_k}.

б) Элемент $A_k^{\alpha'}$ покрытия $\varphi_{\alpha'}$ называется (непосредственно) подчиненным элементу A_h^{α} покрытия φ_{α}, если $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\alpha' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda\}$, $A_h^{\alpha} = A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, $A_k^{\alpha'} = A_{i_1 \ldots i_n i}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n \lambda}$. Мы требуем, чтобы всякий элемент покрытия φ_{α}, $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ был суммой всех непосредственно подчиненных ему элементов любого покрытия $\varphi_{\alpha'}$, $\alpha' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda\}$, непосредственно следующего за φ_{α}, т.е. чтобы

$$A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \bigcup_{i=1}^{s_{\lambda}} A_{i_1 \ldots i_n i}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n \lambda}$$

Замечание 1. Если $A_i^{\alpha} = A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, то матрицу $\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix}$, определенную с точностью до произвольной перестановки ее столбцов, естественно назвать матрицей данного элемента A_i^{α} покрытия φ_{α}. Пополняя эту матрицу любым столбцом вида $\begin{matrix} \lambda \\ i \end{matrix}$, где $\lambda \in W$, $\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $i = 1, \ldots, s_{\lambda}$, получим любой элемент $A_{i_1 \ldots i_n i}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n \lambda} \in \varphi_{\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \lambda\}}$, непосредственно подчиненный данному; наоборот, вычеркивая из матрицы элемента A_i^{α} один какой-нибудь столбец, получим матрицу элемента, непосредственно подчиняющего себе данный элемент A_i^{α}. Понятие непосредственного подчинения естественно обобщается, если мы будем считать подчиняющим элементом для данного элемента A_i^{α} всякий элемент, матрица которого получается из матрицы данного элемента вычеркиванием любого числа ее столбцов. Очевидно, всякий элемент $A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ содержится во всяком подчиняющем его элементе; в частности

$$A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \subseteq A_{i_1}^{\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}^{\lambda_n},$$

откуда следует, что *любая система элементов A_i^{λ}, взятых по одному из всех (или из некоторых) старших покрытий φ_{λ}, $\lambda \in W_{\tau}$, является центрированной.*

Замечание 2. Пусть $\alpha' \succ \alpha$ в Θ_{τ}, т.е. $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\alpha' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда всякий элемент $A_j^{\alpha'} = A_{i_1 \ldots i_m \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m \ldots \lambda_n}$ покрытия $\varphi_{\alpha'}$ подчинен единственному элементу покрытия φ_{α}, а именно элементу $A_i^{\alpha} = A_{i_1 \ldots i_m}^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$; мы пишем тогда: $A_j^{\alpha'} < A_i^{\alpha}$.

3. Примеры ветвящихся систем покрытий.

1°. Пусть X — обычное пространство Бэра, точками которого являются произвольные бесконечные последовательности $x = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ натуральных чисел. Положим $\tau = \aleph_0$ и обозначим через W_{τ} множество всех натуральных чисел λ. Положим при $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$$A_i^{\alpha} = A_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \mathcal{E}(x = \{k_n\} \in X,\ k_{\lambda_1} = k_1, \ldots, k_{\lambda_n} = k_n).$$

жества (см. например [1a], гл. 1, § 1, п. 1:3 на стр. 25). С другой стороны, существенно, что все элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ любого множества $\alpha = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \Theta_{\tau}$ предполагаются различными.

Заметим, что в нашем случае каждое покрытие φ_a дизъюнктно, т.е. состоит из попарно не пересекающихся множеств. Ветвящаяся система покрытий $\mathfrak{A} = \{\varphi_a\}$ является измельчающейся системой (бесконечная [7]) покрытий.

2°. X — положительная числовая полупрямая, $\tau = \aleph_0$. Обозначим через W — множество всех натуральных чисел λ; через $A^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n}$, $i_k = 0, 1, \ldots, 9$ — обозначим множество всех положительных чисел, обладающих разложением в бесконечную десятичную дробь, у которой $\lambda_1^{\text{ый}}, \ldots, \lambda_n^{\text{ый}}$ десятичные знаки соответственно равны $i_1, \ldots, i_n$. Полученная ветвящаяся система покрытий φ_a снова измельчающаяся. Ни одно из φ_a не является дизъюнктным.

3°. Пространство D^τ имеет измельчающуюся ветвящуюся систему покрытий $\mathfrak{A} = \{\varphi\}_a$ мощности τ, при чем каждое φ_a дизъюнктно и состоит из открыто-замкнутых множеств, число которых при $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ равно 2^n. В самом деле, точки $\xi \in D^\tau$ суть всевозможные наборы $\xi = \{j_\lambda\}$, $j_\lambda = 0$ или 1. Полагаем при $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$$\varphi_a = \{A^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n}\}, \quad A^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n} = \mathcal{E}(\xi = \{j_\lambda\} \in D^\tau, j_{\lambda_1} = i_1, \ldots, j_{\lambda_n} = i_n) \text{ где } i_\nu = 0, 1.$$

§ 2. Характеристика D^τ

4. Докажем теперь следующее предложение

Если X имеет ветвящуюся измельчающуюся систему мощности τ конечных покрытий, $\mathfrak{A} = \{\varphi_a\}$, каждое из которых дизъюнктно:

$$\varphi_a = \{A^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n}\} \quad \text{при} \quad a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

то $X = D^\tau$.

Заметим прежде всего: из дизъюнктности покрытия φ_a следует, что его элементы суть открыто-замкнутые множества, а из комбинаторной вписанности дизъюнктного φ_a в [9] $\varphi_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{\lambda_n}$ легко вытекает, что $\varphi_a = \varphi_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{\lambda_n}$. Пусть $\varphi_\lambda = \{A^\lambda_1, \ldots, A^\lambda_{s_\lambda}\}$, $\lambda \in W_\tau$. Обозначим через D_λ множество натуральных чисел $1, 2, \ldots, s_\lambda$, снабженных индексом λ (причем пишем s_λ вместо $(s_\lambda)_\lambda$): $D_\lambda = \{1_\lambda, \ldots, s_\lambda\}$. Тогда каждой точке $x \in X$ однозначно соответствует набор $\{A^\lambda_{i_\lambda}\}$, определенный требованием $x \in A^\lambda_{i_\lambda}$, и следовательно — точка

$$fx = \xi = \{i_\lambda\} \in \prod_{\lambda \in W_\tau} D_\lambda = D^\tau.$$

Посмотрим теперь, скольким точкам $x \in X$ соответствует одна и та же точка $\xi = fx \in D^\tau$. По самому определению отображения f из $\xi = fx$, $\xi = \{i_\lambda\} \in \prod D_\lambda$ следует

$$x \in \bigcap_{a = (\lambda_1 \ldots \lambda_k) \in \Theta_\tau} A^a_{i_{\lambda_1} \ldots i_{\lambda_k}};$$

[9] Мы обозначаем через $\varphi_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{\lambda_n}$ покрытие, элементами которого являются всевозможные непустые множества вида

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}, \quad \text{где} \quad A_{i_1} \in \varphi_{\lambda_1}, \ldots, A_{i_n} \in \varphi_{\lambda_n}$$

так как система $\{\varphi_a\}$ — измельчающаяся, то последнее пересечение, содержа точку x, не может содержать никакой другой точки. Итак, отображение f есть взаимно-однозначное отображение в D^τ. Докажем, что f есть отображение на D^τ. Пусть $\xi = \{i_\lambda\} \in D^\tau$. Так как всегда по предположению $A^{\lambda_1}_{i_{\lambda_1}} \cap \ldots \cap A^{\lambda_n}_{i_{\lambda_n}} \neq \Lambda$, то система $\{A^\lambda_{i_\lambda}\}$ — центрирована, значит имеет непустое пересечение, которое по предыдущему не может содержать более одной точки; итак, $\bigcap_{\lambda \in W_\tau} A^\lambda_{i_\lambda}$ состоит из одной точки x, и тогда, по нашему построению, $fx = \xi$, так что f есть взаимно-однозначное отображение на D^τ. Так как φ_a — измельчающиеся открыто-замкнутые покрытия, то совокупность их элементов есть база пространства X. При отображении f эта база переходит в стандартную базу [10] пространства D^τ, т.е. взаимно-однозначное отображение f есть гомеоморфизм. Итак:

Теорема 1. *Пространство D^τ есть* (с точностью до гомеоморфизма) *единственный бикомпакт, имеющий ветвящуюся измельчающуюся систему мощности τ, состоящую из дизъюнктных покрытий.*

§ 3. Характеристика диадических бикомпактов

Пусть X — бикомпакт, имеющий измельчающуюся ветвящуюся систему покрытий мощности τ:

$$\mathfrak{A} = \{\varphi_a\}, \quad \varphi_a = \{A^a_1, \ldots, A^a_{s_a}\}, \quad a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \Theta_\tau.$$

Рассмотрим в $\Theta = \Theta_\tau$ старшие индексы $a \equiv \lambda \in W_\tau$ и соответствующие $\varphi_\lambda = \{A^\lambda_1, \ldots, A^\lambda_{s_\lambda}\}$.

Положим

$$D_\lambda = \{1_\lambda, \ldots, s_\lambda\}, \quad D^\tau = \prod_{\lambda \in W_\tau} D_\lambda.$$

Пусть дана точка $\xi = \{i_\lambda\} \in D^\tau$. Для каждого $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ положим

$$i(a) = \{i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_n}\},$$

где $i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_n}$ суть соответствующие координаты точки $\xi \in D^\tau$. Тогда при $a' > a$ (т.е. $a' \supset a$) очевидно $i(a') \supset i(a)$. Отсюда легко выводим, что система $\sigma = \{A^a_{i(a)}\}$, взятая по всем $a \in \Theta$, центрирована. В самом деле, если $\sigma_0 = \{A^{a_1}_{i(a_1)}, \ldots, A^{a_k}_{i(a_k)}\}$ — любая конечная подсистема системы σ, и $a = a_1 \cup \ldots \cup a_k$, то $A^a_{i(a)}$ подчинено любому из множеств $A^{a_1}_{i(a_1)}, \ldots, A^{a_k}_{i(a_k)}$ и значит содержится в их пересечении. Множества $A^a_{i(a)}$ образуя таким образом центрированную систему, имеют непустое пересечение $\bigcap_{a \in \Theta} A^a_{i(a)}$.

[10] Т.е. базу, элементами которой суть всевозможные

$$U^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n} = \mathcal{E}(\xi = \{j_\lambda\} \in D^\tau, j_{\lambda_1} = i_1, \ldots, j_{\lambda_n} = i_n).$$

Так как система $\{\varphi_a\}$ — измельчающаяся, то $\bigcap\limits_{a \in \Theta} A^a_{i(a)}$ не может содержать более одной точки x, и мы полагаем

$$x = \bigcap_{a \in \Theta} A^a_{i(a)} = f\xi . \tag{1}$$

1°. Отображение $f\colon D^\tau \to X$ есть отображение на X. В самом деле, пусть $x \in X$. Запишем $\Theta = \{a\}$ в виде вполне упорядоченного множества $\Theta = \{a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots\}$, $\nu < \omega(\tau)$, и возьмем какое-нибудь $A^{a_0}_i \equiv A(0) \in \varphi_{a_0}$, $x \in A(0)$. Предположим, что для всех $\mu < \nu$ выбраны $A(\mu) \in \varphi_{a_\mu}$, $x \in A(\mu)$, так, что, каковы бы ни были порядковые числа (в конечном числе)

$$\mu_1, \ldots, \mu_r < \nu ,$$

существует для некоторого $a_{\nu'}$, следующего за всеми $a_{\mu_1}, \ldots, a_{\mu_r}$, элемент $A(\nu') \ni x$ покрытия $\varphi_{a_{\nu'}}$, подчиненный всем $A(\mu_1), \ldots, A(\mu_r)$. Докажем, что среди $A(\nu) \in \varphi_{a_\nu}$ можно выбрать такое $A(\nu) \ni x$, что, каковы бы ни были $\mu_1, \ldots, \mu_r < \nu+1$, существует индекс $a_{\nu'} \in \Theta$, $a_{\nu'} > a_{\mu_1}, \ldots, a_{\mu_r}$ и в $\varphi_{a_{\nu'}}$ элемент, содержащий x и подчиненный всем $A(\mu_1), \ldots, A(\mu_r)$ и выбранному нами $A(\nu) \ni x$. Предположим, что такого $A(\nu)$ найти нельзя. Это значит, каково бы ни было $A^{a_\nu}_i \in \varphi_{a_\nu}$, можно подобрать совокупность (i) ранее отобранных множеств:

$$(i) = \{A(\mu^i_1), \ldots, A(\mu^i_{r(i)})\} , \qquad \mu^i_1, \ldots, \mu^i_{r(i)} < \nu ,$$

для которой нет никакого ν', удовлетворяющего следующим условиям:

(а) Индекс $a_{\nu'} \in \Theta$ следует за каждым из индексов $a_\mu \in \Theta$

$$\mu = \mu^i_1, \ldots, \mu^i_{r(i)} .$$

(б) Покрытие $\varphi_{a_{\nu'}}$, содержит множество $A(\nu') \ni x$, подчиненное всем $A(\mu^i_1), \ldots, A(\mu^i_{r(i)})$ и $A^{a_\nu}_i$.

Объединение всех систем (i), построенных для различных элементов $A^{a_\nu}_i \in \varphi_{a_\nu}$, есть конечная система σ множеств $A(\mu)$, $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_r < \nu$, для нее следовательно существует $a_{\nu''}$, следующее в Θ за всеми $a_{\mu_1}, \ldots, a_{\mu_r}$ и в покрытии $\varphi_{a_{\nu''}}$ — некоторое $A(\nu'') \ni x$, подчиненное всем $A(\mu) \in \sigma$. Берем $a_{\nu'}$, следующее в Θ за $a_{\nu''}$ и за a_ν. В покрытии $\varphi_{a_{\nu'}}$ существует элемент $A(\nu') \ni x$, подчиненный элементу $A(\nu'')$, следовательно всем $A(\mu) \in \sigma$. Пусть $A^{a_\nu}_{i_0}$ подчиняет себе элемент $A(\nu')$. Тогда $A(\nu')$ подчинен элементу $A^{a_\nu}_{i_0}$ и всем $A(\mu) \in \sigma$, в частности всем $A(\mu) \in (i_0)$, вопреки определению системы (i_0).

Итак по индукции для всякого $a \equiv a_\nu \in \Theta$ выбран $A(a_\nu) \equiv A^a_i \in \varphi_a$, $A^a_i \ni x$, так, что, каковы бы ни были $A^{a_1}_{i_1}, \ldots, A^{a_r}_{i_r}$, взятые в конечном числе из отобранных нами, всегда найдется некоторое $a_{\nu'}$, следующее в Θ за всеми $a_1, \ldots, a_r$ и в $\varphi_{a_{\nu'}}$ элемент $A^{a_{\nu'}}_j$, всем $A^{a_1}_{i_1}, \ldots, A^{a_r}_{i_r}$ подчиненный. Отсюда вытекает: если $a' > a$ в Θ, то $A^{a'}_{i'} < A^a_i$. В самом деле, если $A^{a''}_j < A^{a'}_{i'}$, $A^{a''}_j < A^a_i$, то беря единственный A^a_h, подчиняющий себе $A^{a'}_{i'}$, видим, что $A^{a''}_j < A^a_h$, откуда $A^a_h = A^a_i$ (в виду единственности подчиняющего элемента).

Итак, для каждого $x \in X$ имеется в каждом φ_a такой элемент $A^a_i \ni x$, что все эти A^a_i образуют „цепь" в том смысле, что из $a' > a$ в Θ вытекает $A^a_i > A^{a'}_{i'}$. Но тогда, при $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $a' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots, \lambda_{n'}\}$ имеем

$$i = i(a) = \{i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_1}\} \subset \{i_{\lambda_1}, \ldots, i_{\lambda_n}, \ldots, i_{\lambda_{n'}}\} ,$$

так что существует точка $\xi = \{i_\lambda\} \in D^\tau$, для которой $f\xi = x$.

2°. Отображение f непрерывно. В самом деле, пусть $\xi = \{i_\lambda\} \in D^\tau$, $x = f\xi$. Тогда определяя $U^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n}$ как в сноске (10), видим, что $x \in fU^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n} \subseteq A^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n} \in \varphi_a$, $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Так как система $\{\varphi_a\}$ измельчающаяся, то из сказанного сразу вытекает непрерывность отображения f.

Итак, всякий бикомпакт с ветвящейся измельчающейся системой покрытий есть диадический бикомпакт. Обратно, всякий диадический бикомпакт X имеет ветвящуюся измельчающиюся систему покрытий: в нее переходит естественная ветвящаяся измельчающиюся система покрытий $\{U^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}_{i_1 \ldots i_n}\}$ бикомпакта D^τ.

Итак, доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы бикомпакт X был диадическим, необходимо и достаточно, чтобы он имел ветвящуюся измельчающуюся систему покрытий.*

§ 4. Неприводимо-диадические бикомпакты

Разбиением или *каноническим покрытием* пространства X называется покрытие $\varphi_a = \{A^a_i\}$, состоящее из канонических замкнутых множеств (11) A^a_i, открытые ядра JA^a_i которых попарно не пересекаются.

Бикомпакт X называется *неприводимо диадическим*, если существует неприводимое (12) отображение $f\colon D^\tau \to X = fD^\tau$.

Теорема 3a. *Если X — неприводимо диадический бикомпакт, то в X существует измельчающаяся ветвящаяся система разбиений.*

Доказательство. Берем в D^τ естественную ветвящуюся измельчающиюся систему разбиений $\delta_a = \{U^{a=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}}_{i_1 \ldots i_n}\}$, и рассматриваем в $X = fD^\tau$, где $f\colon D^\tau \to X$ неприводимо, измельчающуюся ветвящуюся систему покрытий

$$\varphi_a = \{A^a_i\} = \{fU^{a=\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}}_{i_1 \ldots i_n}\} \ (^{13}) .$$

Утверждаем: φ_a *есть разбиение.*

(11) Каноническим замкнутым множеством называется множество, являющееся замыканием открытого множества.

(12) Определение неприводимого отображения дано во введении.

(13) Вместо $U^{a=\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}}_{i_1 \ldots i_n}$ и т.п. мы дальше пишем просто U^a_i.

1°. $V_i^a = JA_i^a \supseteq A_i^a \setminus \bigcup_{j\neq i} A_j^a = X \setminus \bigcup_{j\neq i} A_j^a \neq \Lambda$; если бы $X \setminus \bigcup_{j\neq i} A_j^a$ было пусто, то $X = \bigcup_{j\neq i} A_j^a = \bigcup_{j\neq i} fU_j^a = f\bigcup_{j\neq i} U_j^a$. Но так как множества U_j^a образуют дизъюнктное покрытие δ_a пространства D^τ, то $\bigcup_{j\neq i} U_j^a \neq D^\tau$ и равенство $f\bigcup_{j\neq i} U_j^a = X$ противоречит неприводимости отображения f.

2°. $V_i^a \cap V_j^a = \Lambda$.

В самом деле, если бы $V_i^a \cap V_j^a \neq \Lambda$, то $f^{-1}V_i^a \cap U_j^a = H_j^a$ было бы непустым открытым множеством $H_j^a \subseteq U_j^a$; вычитая его из U_j^a (и из D^τ) получаем замкнутое $D_0 \subset D^\tau$, при чем, так как $V_i^a \subseteq A_i^a = fU_i^a$, то $X = fD_0$, вопреки неприводимости f.

3°. *Всякое* A_i^a *канонично*, т.е. $A_i^a = [V_i^a]$ (14).

В самом деле, пусть $A_i^a \setminus [V_i^a] \neq \Lambda$. Тогда рассматривая f на бикомпакте $U_i^a \subset D^\tau$, $f\colon U_i^a \to A_i^a = fU_i^a$, имеем в бикомпакте U_i^a непустое открытое множество $H_i^a = f^{-1}(A_i^a \setminus [V_i^a])$. Если $\xi \in H_i^a$, то $f\xi \notin [V_i^a]$, т.е. $f\xi \in A_i^a \cap \bigcup_{j\neq i} A_j^a$, т.е. (рассматривая f снова на всем D^τ): $\xi \in f\bigcup_{j\neq i} U_j^a$. Поэтому, вычитая из U_i^a (и из D^τ) все точки $\xi \in H_i^a$ и рассматривая f на остатке $D_0 = D^\tau \setminus H_i^a$, мы не теряем ни одной точки X, т.е. $X = fD_0$ — вопреки неприводимости отображения f. Утверждение 3а доказано.

Теорема 3б. *Если в бикомпакте X существует измельчающаяся ветвящаяся система разбиений $\{\varphi_a\}$, то X — неприводимо диадический бикомпакт.*

В самом деле, докажем, что в этом случае отображение $f\colon D^\tau \to X$, построенное в § 3, формула (1) на основе системы $\{\varphi_a\}$ неприводимо. Если бы оно не было таковым, то существовало бы такое $U_i^a = U_{i_1\ldots i_n}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, что $f(D^\tau \setminus U_i^a) = X$. Но это невозможно, так как точки $x \in V_i^a = JA_i^a$ являются образами, при отображении f, лишь точек U_i^a. Итак доказана

Теорема 3. *Среди всех бикомпактов неприводимо диадические характеризуются тем, что у них имеется измельчающаяся ветвящаяся система разбиений.*

§ 5. Случай любых бикомпактов

Условия, наложенные нами на понятие ветвящейся системы покрытий, являются очень сильными — это видно, например, из того, что утверждение сделанное в § 1, замечание 1, является следствием этих условий. Легко, однако, построить пример недиадического бикомпакта, имеющего измельчающуюся систему разбиений $\{\varphi_a\}$ (в смысле § 4), слабо ветвящуюся в том смысле, что при $\varphi_a \succ \varphi_\beta$ каждый элемент φ_a распадается на два или более элементов φ_β.

(14) Квадратные скобки означают замыкание.

Определим пространство Δ_0 как ,,трансфинитную прямую'' (смотри [2], гл. 1), т.е. упорядоченное лексикографически пространство всех пар $x = (\xi, t)$, где ξ пробегает все порядковые числа $< \omega_1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, при чем $(\xi, 1) = (\xi+1, 0)$. Топология в Δ_0 — порядковая. Пополняем пространство Δ_0 точкой ω_1, следующей за всеми $x = (\xi, t)$, что — опять таки в порядковой топологии — дает бикомпакт $\Delta = \Delta_0 \cup \omega_1$. Возьмем теперь на отрезке $[0, 1]$ совершенное нигде не плотное множество P, все точки которого, за исключением принадлежащих ему точек 0 и 1 иррациональны, и рассмотрим подпространство X бикомпакта Δ, состоящее из точки ω_1 и всех точек $x = (\xi, t)$, $\xi < \omega_1$ — любое и $t \in P$. Пространство X очевидно бикомпакт и притом недиадический. Обозначим теперь через $W = \{\lambda\}$ множество (мощности $\aleph_1$) всех точек $\lambda = (\xi, r) \in \Delta_0$, где $\xi < \omega_1$ — любое порядковое и r — произвольное рациональное число интервала $(0, 1)$. Каждое λ разбивает упорядоченное множество Δ на два сегмента $\mathcal{E}(x \leqslant \lambda)$ и $\mathcal{E}(x \geqslant \lambda)$ с общим концом λ; пересечение этих сегментов с $X \subset \Delta$ дает разбиение φ_λ бикомпакта X на два дизъюнктных открыто-замкнутых множества A_1^λ и A_2^λ. Берем теперь $\Theta = \{a\}$, где $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и определяем покрытие φ_a как состоящее из всех непустых пересечений $A_{i_1}^{\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}^{\lambda_n}$, где каждое $i_1, \ldots, i_n$ принимает два значения 1 и 2. Ослабляем порядок в Θ, полагая $a' \succ a$ когда, кроме условия $a' \supset a$, выполнено и следующее условие: каждый элемент φ_a распадается на два или более элементов $\varphi_{a'}$. Легко проверяется, что полученное таким образом частично-упорядоченное множество покрытий φ_a — направленное и измельчающееся множество. Очевидно, однако, что среди пересечений $A_{i_1}^{\lambda_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}^{\lambda_n}$ имеются пустые, так, что наша система покрытий не является ветвящейся в смысле основного определения, данного в § 1.

Понятие подчинения, лежащее в основе ветвящихся систем покрытий заимствовано из определения A-операции, как она была определена одним из авторов этой статьи еще в 1916 году [1б]. Для нашей цели удобно говорить об A-системе покрытий (а не множеств) и определить ее в самом общем виде следующим образом:

Направленная по какому-нибудь множеству индексов $\Theta = \{a\}$ система замкнутых покрытий $\Sigma = \{\varphi_a\}$ пространства X называется A-системой, если при $a' \succ a$, $\varphi_a = \{A_i^a\}$, $\varphi_{a'} = \{A_j^{a'}\}$ каждый элемент $A_j^{a'} \in \varphi_{a'}$ подчинен единственному элементу $A_i^a \in \varphi_a$ (пишем: $A_j^{a'} < A_i^a$), причем при данных a и $a' \succ a$ каждое $A_i^a \in \varphi_a$ есть сумма всех подчиненных ему $A_j^{a'}$, и выполнено условие транзитивности: из $A_k^{a''} < A_j^{a'}$, $A_j^{a'} < A_i^a$ следует $A_k^{a''} < A_i^a$.

Цепью (или нитью) данной A-системы мы называем систему $\sigma = \{A_i^a\}$ множеств A_i^a, взятых по одному из каждого φ_a и удовлетворяющих условию: при $a' \succ a$ элемент $A_j^{a'}$ цепи σ подчинен элементу A_i^a этой цепи. Всякая цепь $\{A_i^a\}$ является, как легко видеть, центрированной системой множеств. Пересечение всех множеств, образующих цепь, называется ядром этой цепи. *Если ядро всякой цепи непусто, то A-система называется полной.*

Мы будем теперь предполагать, что все покрытия φ_a, образующие данную A-систему — конечные, и что сама система — измельчающаяся. Тогда ядро всякой цепи будет состоять не более чем из одной точки. Буквально повторяя рассуждения § 3 (т.е. по существу рассуждения пункта 2 заметки [7]) доказываем, что всякая точка $x \in X$ содержится в ядре некоторой цепи A-системы.

В работе [7] доказано, что всякое нормальное пространство X имеет „каноническую систему мощности τ'', т.е. измельчающуюся A-систему $\mathfrak{A} = \{\varphi_a\}$ мощности τ, состоящую из конечных канонических покрытий (разбиений φ_a): подчинение получаем, считая при $a' \succ a$ элемент $A_j^{a'} \in \varphi_{a'}$, подчиненным элементу $A_i^a \in \varphi_a$ всякий раз как $A_j^{a'} \subseteq A_i^a$ (легко видеть, что это единственное подчинение, возможное в A-системе канонических покрытий).

Если X — бикомпакт, то A-система $\{\varphi_a\}$ автоматически оказывается полной. Докажем обратное предложение: Если пространство X имеет измельчающуюся полную A-систему $\mathfrak{A} = \{\varphi_a\}$ мощности τ, состоящую из конечных покрытий, то X — бикомпакт веса $\leqslant \tau$. Достаточно показать, что в наших предположениях X является непрерывным образом некоторого замкнутого множества $D_0 \subseteq D^\tau$. Это доказательство проводится методом работы [7]. Пусть $\varphi_a = \{A_1^a, \ldots, A_{s_a}^a\}$. Полагаем

$$D_a = \{1_a, 2_a, \ldots, s_a\}$$

(т.е. D_a есть множество натуральных чисел $1, 2, \ldots, s_a$, снабженных индексом a; вместо $(s_a)_a$ пишем при этом просто s_a). Тогда топологическое произведение $\prod\limits_a D_a$ есть дисконтинуум D^τ. Точку $\xi = \{i_a\} \in D^\tau$, $i_a \in D_a$, назовем отмеченной, если $\{A_{i_a}^a\}$ есть цепь A-системы $\mathfrak{A}$. Множество D_0 всех отмеченных точек замкнуто. В самом деле, пусть $\xi_0 = \{\overset{0}{i}_a\} \in [D_0]$ (квадратные скобки означают замыкание в D^τ). Тогда всякая окрестность $U^{a_1 \ldots a_s}\xi$ содержит точки $\xi_0 \in D_0$, т.е. в D_0 существуют точки $\xi = \{i_a\}$, у которых $i_{a_1} = \overset{0}{i}_{a_1}, \ldots, i_{a_s} = \overset{0}{i}_{a_s}$. Пусть $a_2 \succ a_1$ выбраны произвольно; тогда в окрестности $U^{a_1 a_2}\xi_0$ существует хотя бы одна точка $\xi \in D_0$, и у этой точки будет $i_{a_1} = \overset{0}{i}_{a_1} = i$, $i_{a_2} = \overset{0}{i}_{a_2} = j$. Но ξ — отмеченная точка, поэтому $A_j^{a_2} < A_i^{a_1}$, а это (так как $a_2 \succ a_1$ — произвольны) и означает, что $\{A_{\overset{0}{i}_a}^a\}$ есть цепь, т.е. ξ_0 — отмеченная точка, $\xi_0 \in D_0$. Итак, D_0 — замкнуто в D^τ. Ставя в соответствие каждой точке $\xi = \{i_a\} \in D_0$ точку $f\xi$, являющуюся ядром цепи $\{A_{i_a}^a\}$, получим как легко видеть непрерывное отображение на весь бмкомпакт X. Нами доказана

Теорема 4. *Для того, чтобы хаусдорфово пространство X было бикомпактом, необходимо и достаточно, чтобы оно имело полную A-систему конечных замкнутых покрытий. Эти покрытия при этом всегда могут быть предположены каноническими, а мощность A-системы — равной весу пространства X.*

Теорема 4, являющаяся по существу перефразировкой известной теоремы А. Г. Куроша (см. [5] или [1б]) позволяет лучше уяснить ту характеристику диадических бикомпактов, которая дается теоремой 2.

С другой стороны, теорема 2 может быть легко переведена на язык проекционных спектров: всякий диадический бикомпакт веса τ и только диадический бикомпакт, имеет спектр $\{X_a, \omega_a^{a'}\}$, направленный по множеству Θ_τ и обладающий тем свойством, что всякий конечный набор вершин, $e_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, e_{i_n}^{\lambda_n}$, взятых по одной из комплексов $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$ (со старшими индексами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) определяет в X_a, где $a = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ единственную вершину e_a, проектирующуюся соответственно в $e_{i_1}^{\lambda_1}, \ldots, e_{i_n}^{\lambda_n}$; отсюда следует, что каждая вершина e_i^a однозначно записывается в виде $e_{i_1 \ldots i_n}^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ и что проекции этой вершины определяются вычеркиванием столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] П. Александров, а) *Комбинаторная топология*, Москва—Ленинград 1947.

б) *О понятии пространства в топологии*, Успехи матем. наук 2:1 (1947), стр. 5-7.

в) *Sur la puissance des ensembles mesurables B*, Comptes Rendus Acad. Paris 162 (1916), стр. 323-325.

[2] П. Александров и П. Урысон, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Kon. Akademie Amsterdam 1 sectie deel XIV, 1929. (*О компактных топологических-пространствах*, Труды Матем. Инстит. им. Стеклова Акад. Наук СССР 31 (1950)).

[3] А. Есенин-Вольпин, *О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах*, ДАН (Доклады Академии Наук СССР) 68 (1949), стр. 441-444.

[4] а) Л. Ивановский, *Об одной гипотезе П. С. Александрова*, ДАН 123 (1958), стр. 785-786.

б) В. Кузьминов, *О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп*, ДАН 125 (1959), стр. 727-729.

[5] А. Курош, *Über den kombinatorischen Aufbau der bikompakten topologischen Räume*, Comp. Math. 2 (1935), стр. 471-476.

[6] E. Marczewski (E. Szpilrajn), a) *Remarques sur les produits cartésiens d'espaces topologiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. URSS 31 (1941), стр. 525-528.

б) *Séparabilité et multiplication cartésienne*, Fund. Math. 34 (1947), стр. 127-143.

[7] В. Пономарев, *Нормальные пространства как образы нульмерных*, ДАН 132 (1960), стр. 1269-1272.

[8] Н. Шанин, *О произведении топологических пространств*, Труды Матем. Института им. Стеклова Акад. Наук СССР 24 (1948) стр. 1-112.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1961