[4] M. Katětov, *On the space of irrational numbers*, Commentationes mathematicae universitatis Carolinae 1, No 2 (1960), стр. 38-42.

[5] J. Novák, *Charakter množiny*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 66 (1937), стр. 206-209.

[6] B. Pospíšil, *Théorèmes d'existence pour les caractères des points*, ibid. 67 (1938), стр. 249-355.

[7] — *Sur les caractères des points dans les espaces topologiques*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university 256 (1938), стр. 1-23.

[8] J. W. Tuckey, *Convergence and uniformity in topology*, Annals of Mathematics Studies, no. 2, Princeton 1940.

Reçu par la Rédaction le 19. 1. 1961

La relation d'équivalence et les objets géométriques

par

S. Gołąb (Kraków)

Il est bien connu que les relations réflexives, symétriques et transitives nommées tout court relations d'équivalence jouent un rôle important dans presque tous les domaines des mathématiques.

Dans la Note présente nous voulons attirer l'attention sur un rapport qui existe entre les relations d'équivalence pour deux vecteurs glissants (situés sur une même droite) et les objets géométriques non différentiels à une dimension.

Sur une droite affine (et en général dans l'espace affine à n dimensions) on définit un vecteur comme un couple de points (P_1, P_2), un vecteur libre comme l'ensemble de tous les vecteurs équipollents. La relation R d'équipollence est définie dans ce cas comme il suit. Si nous désignons par x_i la coordonnée affine du point P_i (dans n'importe quel système de coordonnées), alors l'assertion

$$(P_1, P_2) R (P_3, P_4) \tag{1}$$

veut dire que l'on a

$$x_4 - x_3 = x_2 - x_1 . \tag{2}$$

Du point de vue géométrique la définition la plus simple de la relation R est la suivante: *le milieu du segment P_1P_4 se confond avec le milieu du segment P_2P_3* (le milieu d'un segment est une notion invariante de la géométrie affine). Par contre, il est mieux — à mon avis — d'éviter de déterminer les vecteurs équipollents comme ceux qui possèdent même direction, orientation et longueur, car cette dernière définition pourrait suggérer que la notion de vecteurs équipollents peut être introduite seulement dans les espaces métriques.

On démontre sans difficulté que la relation (1) définie par la condition (2) est une relation d'équivalence et qu'elle a un caractère invariant par rapport aux transformations affines de la coordonnée x ($\bar{x} = ax + b$, $a \neq 0$).

On peut poser la question suivante: quelles sont les autres relations d'équivalence (outre (2)) entre les couples de vecteurs? Bien entendu la détermination de toutes les relations possible de ce genre n'est pas un problème facile. Nous simplifierons la question en cherchant toutes les relations (1) d'équivalence pour lesquelles la condition généralisée (2) peut être écrite sous forme de la relation fonctionnelle

$$x_4 = f(x_1, x_2, x_3) \,. \tag{3}$$

Alors les conditions de réflexivité, de symétrie et de transitivité prendront respectivement la forme analytique

I. $$f(x_1, x_2, x_1) = x_2 \,,$$

II. $$f[x_3, f(x_1, x_2, x_3), x_1] = x_2 \,,$$

III. $$f[x_3, f(x_1, x_2, x_3), x_4] = f(x_1, x_2, x_4) \,.$$

Nous supposons que la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ satisfait aux équations fonctionnelles I, II, III pour tous les systèmes (x_1, x_2, x_3) et nous en tirons quelques conséquences. Remarquons tout d'abord que les équations I, II, III ne sont pas indépendantes. Posons notamment dans l'équation III $x_4 = x_1$ et tenons compte de l'équation I. Nous obtenons alors l'équation II. Nous avons donc:

Lemme. *L'équation* II *est une conséquence des équations* I *et* III.

Nous pouvons alors conclure que, sous l'hypothèse (3) quant à la forme de la relation R, la symétrie découle de la réflexivité et de la transitivité.

Posons ensuite

$$g(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x_2, x_1, x_3) \,. \tag{4}$$

Les équations I et III (il suffit de traiter seulement ces deux équations) prendront la forme

$$g(x_2, x_1, x_1) = x_2 \,, \tag{5}$$

$$g[g(x_2, x_1, x_3), x_3, x_4] = g(x_2, x_1, x_4) \,. \tag{6}$$

Or, les équations (5) et (6) sont précisément identiques aux équations (8) et (10) de mon travail [1] qui caractérisent tous les objets géométriques non différentiels à une composante dans l'espace à une dimension. La règle de transformation de la composante Ω d'un tel objet est

$$\overline{\Omega} = g(\Omega, \xi, \overline{\xi}) \,, \tag{7}$$

où Ω et $\overline{\Omega}$ sont respectivement les composantes de l'objet dans deux systèmes quelconques de coordonnées (non nécessairement affines), défini au point dont les coordonnées sont égales à ξ resp. $\overline{\xi}$. Dans le travail cité j'ai donné la solution générale du système (5) et (6) sans faire aucune hypothèse de régularité sur la fonction g. De la définition d'un objet géométrique il suit que la fonction $g(\Omega, \xi, \overline{\xi})$ doit, pour chaque couple de valeurs $\xi, \overline{\xi}$, être inversible par rapport à la variable Ω.

La solution générale du système (5), (6) est de la forme

$$g(x_1, x_2, x_3) = G[G^{-1}(x_1, x_2), x_3] \,, \tag{8}$$

où $G(x_1, x_2)$ désigne une fonction arbitraire inversible (pour chaque x_2) par rapport à x_1, $G^{-1}(x_1, x_2)$ désignant la fonction unique telle que les équations

$$x_3 = G(x_1, x_2) \,, \qquad x_1 = G^{-1}(x_3, x_2)$$

sont équivalentes, c'est-à-dire telle que

$$G[G^{-1}(x_3, x_2), x_2] = x_3 \,. \tag{9}$$

Comme la formule (8) nous donne la solution générale du système (5), (6), la formule

$$f(x_1, x_2, x_3) = G[G^{-1}(x_2, x_1), x_3]$$

fournit la solution générale des équations fonctionnelles I-III. Nous avons donc:

Théorème 1. *Sous l'hypothèse que la relation d'équivalence R entre deux vecteurs glissants remplit la condition* (3), *toutes les relations R sont contenues dans la formule* (10), *où la fonction G est arbitraire pourvu qu'elle soit inversible par rapport à la première variable, G^{-1} désignant la fonction vérifiant la relation* (9).

Remarque 1. Grâce au théorème 1 nous avons obtenu une interprétation géométrique des objets non différentiels à une composante dans l'espace à une dimension.

Remarque 2. Nous obtenons, en particulier, la relation classique d'équipollence R des vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_3P_4}$, exprimée par la relation (2), en posant

$$G(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \,. \tag{11}$$

En admettant l'hypothèse plus restrictive que la fonction f soit linéaire

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta \,, \tag{12}$$

nous obtenons, en tenant compte de l'équation I,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_1 + \delta = x_2 \,,$$

d'où il suit

$$\beta = 0 \,, \qquad \gamma = -\alpha \,, \qquad \delta = 0$$

et la fonction f prend la forme

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \alpha(x_1 - x_3) \,. \tag{13.1}$$

L'hypothèse (12) appliquée à l'équation II donne

$$\beta(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta)+\alpha x_3+\gamma x_1+\delta = x_2\,,$$

ce qui entraîne

$$\beta^2=1\,,\quad \beta\alpha+\gamma=0\,,\quad \beta\gamma+\alpha=0\,,\quad \delta(\beta+1)=0$$

ou

$$\beta=\varepsilon\,,\quad \gamma=-\varepsilon\alpha\,,\quad (\delta=0 \text{ ou } \beta=-1)\,,$$

donc la fonction f est, dans ce cas, de la forme

(13.2) $\qquad f(x_1,x_2,x_3)=x_2+\alpha(x_1-x_3)$

$$\text{ou bien}\quad f(x_1,x_2,x_3)=-x_2+\alpha(x_1+x_3)+\delta\,.$$

Enfin, en substituant (12) dans III, nous obtenons

$$\beta(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta)+\alpha x_3+\gamma x_4+\delta = \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_4+\delta\,,$$

ce qui conduit ou bien à la solution triviale

$$\alpha=\beta=0;\quad \gamma,\delta \text{ arbitraires}$$

que nous rejetons, car nous admettons implicitement que la fonction f dépend essentiellement de toutes les trois variables, ou bien à la solution

$$\beta=1\,,\quad \gamma=-\alpha\,,\quad \delta=0$$

ce qui signifie que f possède la forme

(13.3) $$f(x_1,x_2,x_3)=x_2+\alpha(x_1-x_3)\,.$$

En résumant les résultats nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses que la relation R entre les vecteurs d'une droite est de la forme* (12), *les conditions* I *et* II *sont équivalentes et conduisent au même résultat* (13.1) $\equiv$ (13.3). *Les conditions* I *ou* III *entraînent* II, *mais non réciproquement*; II *n'entraîne ni* I *ni* III.

Nos introduirons maintenant une nouvelle propriété IV consistant en ce que les deux vecteurs sont en relation R si nous changeons simultanément leurs orientations, c'est-à-dire si

$$(\overrightarrow{P_1P_2})R(\overrightarrow{P_3P_4}) \Rightarrow (\overrightarrow{P_2P_1})R(\overrightarrow{P_4P_3})\,.$$

Cette propriété s'exprime analytiquement par l'équation fonctionelle

IV. $$f[x_2,x_1,f(x_1,x_2,x_3)]=x_3\,.$$

Nous n'analyserons pas ici en détail le rapport logique entre la condition IV et les conditions I-III. On peut montrer que la condition IV n'est pas une conséquence logique des conditions I-III. Cela résulte des considérations valables pour le cas particulier où la fonction f est linéaire. Or, en supposant la fonction f linéaire, la condition IV conduit à l'identité

$$\alpha x_2+\beta x_1+\gamma(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta)+\delta = x_3$$

ce qui donne pour les coefficients $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ les équations

$$\beta+\alpha\gamma=0\,,\quad \alpha+\beta\gamma=0\,,\quad \gamma^2=1\,,\quad \delta(\gamma+1)=0\,.$$

Ces dernières donnent

$$\gamma=\varepsilon\,,\quad \beta=-\varepsilon\alpha\,,\quad (\delta=0 \text{ ou } \gamma=-1)\,,\quad \text{où}\quad \varepsilon^2=1\,,$$

et la fonction f est, par conséquent, de la forme

(13.4) $$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} x_3+\alpha(x_1-x_2) & \text{ou}\\ -x_3+\alpha(x_1+x_2)+\delta\,. \end{cases}$$

Il est donc évident que (13.1) n'entraîne pas (13.4).

Si nous supposons (12), c'est-à-dire que la fonction f est linéaire et que les propriétés I et IV ont simultanément lieu, nous obtenons

$$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1+x_2+x_3 \quad\text{ou}\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2-x_3\,.$$

D'autre part, les propriétés II et IV étant simultanément vérifiées, on a

$$f=x_3+\alpha(x_1-x_2)\quad\text{ou}\quad f=x_1-x_2+x_3\quad\text{ou}$$
$$f=x_2-x_1-x_3\quad\text{ou}\quad f=-(x_1+x_2+x_3)+\delta\,.$$

Toutes les quatre propriétés ayant simultanément lieu (il suffit de supposer seulement II, III, IV), on obtient

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2+\varepsilon(x_1-x_3)\qquad(\varepsilon^2=1)\,.$$

Nous povons donc énoncer le

THÉORÈME 3. *Les seules relations d'équivalence linéaire et remplissant la condition* IV *entre deux vecteurs d'une droite affine, sont la relation classique* (*conduisant à la notion de vecteur libre*) *ou bien la relation $x_4=x_1+x_2-x_3$ consistant en ce que tous les deux vecteurs ont un milieu commun.*

En supposant la fonction f linéaire et en admettant toutes les trois propriétés I, II, III pour la relation R, nous aurons en comparant (13.1) et (13.2)

(14) $$f(x_1,x_2,x_3)=x_2+\alpha(x_1-x_3)\,,\qquad \alpha \text{ arbitraire} \neq 0\,.$$

Pour $\alpha\neq-1$ nous obtenons une équivalence différente de l'équivalence classique ($\alpha=-1$). Pourtant on peut dire que dans la famille (14) d'équivalences il en existe une seule essentiellement différente. Du point de vue de la notion de similitude (équivalence) on peut affirmer qu'il existe dans la famille (14) un seul objet, à l'équivalence près. La notion de similitude, introduite par nous [2], a été utilisée dans le cas particulier des objets à une composante. Nous disons que les objets Ω_1 et Ω_2 sont semblables (équivalents) s'il existe une fonction $\Phi(u)$ strictement monotone et telle que la relation

$$\Omega_2 = \Phi(\Omega_1) \tag{15}$$

subsiste dans tous les systèmes de coordonnées. En écrivant cette relation pour le système $\bar{\xi}$ nous devons avoir

$$\bar{\Omega}_2 = \Phi(\bar{\Omega}_1) \, . \tag{16}$$

Mais on a (d'apres (4) et (7))

$$\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 + \alpha_1(\xi - \bar{\xi}) \, , \qquad \alpha_1 \neq 0 \, , \tag{17}$$

$$\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 + \alpha_2(\xi - \bar{\xi}) \, , \qquad \alpha_2 \neq 0 \, . \tag{18}$$

En substituant (17), (18) dans (16) et en tenant compte de (15) nous obtenons

$$\Phi(\Omega_1) + \alpha_2(\xi - \bar{\xi}) = \Phi[\Omega_1 + \alpha_1(\xi - \bar{\xi})] \, .$$

Il est évident qu'en posant

$$\Phi(u) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u$$

on obtient pour Φ une fonction strictement monotone et en même temps l'identité de (15) par rapport aux variables $\Omega_1, \xi, \bar{\xi}$. Donc les deux objets géométriques Ω_1 et Ω_2 admettant les règles de transformation (17) et (18) sont équivalents et, par conséquent, il est permis de dire que les relations correspondantes R sont „équivalents".

De ce qui précède on peut tirer comme conséquence:

THÉORÈME 4. *Si la fonction f est linéaire, il existe une seule relation essentielle (en faisent abstraction des objets équivalents) R satisfaisant aux propriétés* I, II, III.

Travaux cités

[1] S. Gołąb, *Sur les objets géométriques non-différentiels*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. Sci. Math. Nat., 2 (1949), p. 67-72.

[2] — *La notion de similitude parmi les objets géométriques*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. Sci. Math., 3 (1950), p. 1-7.

Reçu par la Rédaction le 30. 1. 1961

On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$

by

M. Kuczma (Kraków)

One of the most important and best known functional equations is the functional equation of Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \, . \tag{1}$$

In the present paper we consider equation (1) for functions $f(x)$ whose domain and range are multidimensional spaces.

H. Kestelman ([2], th. 2) has proved a theorem which after taking into account the recent results of S. Kurepa [3] may be formulated as follows:

If a function $f(x)$ whose domain and range are an n-dimensional and an m-dimensional euclidean space respectively satisfies functional equation (1) *and is bounded on a set V of positive Lebesgue measure, i.e.*

$$\|f(x)\| \leqslant a \quad \text{for} \quad x \in V \, , \quad |V| > 0 \, , \tag{2}$$

then for every $x(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ we have

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j f(u^j) \, , \tag{3}$$

where u^j $(j = 1, \ldots, n)$ are the unit vectors of the n-dimensional space which is the domain of the function $f(x)$.

As is well known ([2], [5]), when the domain as well as the range of the function $f(x)$ is the space of real numbers, a stronger theorem can be proved. Namely, condition (2) may be replaced by a weaker one:

$$f(x) \leqslant a \quad \text{for} \quad x \in V \, , \quad |V| > 0 \, . \tag{4}$$

(Thus in this case we assume that $f(x) \leqslant a$ instead of $|f(x)| \leqslant a$.) The question arises whether an analogical weakening of hypothesis (2) in the theorem of H. Kestelman is also possible in the multidimensional case. The purpose of the present note is to give an answer to this question.