Характеры и типы точечных множеств

М. Катетов (Прага)

Понятие характера и псевдохарактера точки (т.е. наименьшей мощности т. наз. базы или, соответственно, псевдобазы изучаемого пространства в данной точке) было рассмотрено в классической работе [1]. Позднее, важные результаты, касающиеся характеров и псевдохарактеров точек, были получены, в частности, в работах [6], [7]. Рассматривались также характеры и псевдохарактеры точечных множеств (т.е. подмножеств топологических пространств); см., например, [3], [4], [5]. В настоящей заметке мы пользуемся как своего рода эталоном для характеризации поведения пространства в заданной точке или по отношению к заданному множеству пространствами с единственной неизолированной точкой. Определенные классы эквивалентности таких пространств и являются, по существу, рассматриваемыми здесь типами, заданием которых однозначно определяются характеры, псевдохарактеры и т.п.

В §§ 1, 2 приводятся основные определения и простейшие теоремы и леммы. В § 3 рассматриваются некоторые операции с E-пространствами (т.е., по существу, топологическими пространствами с единственной неизолированной точкой) и некоторые неравенства, касающиеся характеров и „γ-характеров". В § 4 рассматриваются „внешние типы" и „k-типы" пространств (ср. понятие внешнего характера и k-характера, введенное в [3]). Наконец, в § 5 доказывается теорема о существовании пространства с заданными типами точек, аналогичная известной теореме из [7].

Отметим еще, что как только введены основные определения, многие результаты получаются почти автоматически или доказываются так же, как аналогичные результаты для характеров. В связи с этим, некоторые отдельные доказательства только намечены.

1. 1.1. Мы употребляем, в основном, терминологию Н. Бурбаки (по русскому переводу *Элементов математики*). В рассматриваемых топологических пространствах предполагается выполнение аксиомы замкнутости конечных множеств. Мощность множества M обозначается через $\operatorname{card} M$. Если α—мощность, то вместо 2^α пишется $\exp \alpha$.

1.2. Пусть P — топологическое пространство, $a \in P$; пусть все точки $x \in P$, отличные от a, являются изолированными. Пару (P, a) мы будем называть *элементарным пространством с отмеченной точкой* или, короче, $\mathbb{E}$-*пространством*. Мы будем всегда рассматривать $\mathbb{E}$-пространства одновременно как топологические пространства, так что для них имеют смысл все обычные топологические понятия; $\mathbb{E}$-пространство (P, a) и соответствующее топологическое пространство P будет обычно обозначаться одной и той же буквой. Подпространством $\mathbb{E}$-пространства (P, a) мы будем, конечно, называть $\mathbb{E}$-пространство (Q, a), где Q — подпространство топологического пространства P. Отображение $\mathbb{E}$-пространства (P, a) в $\mathbb{E}$-пространство (Q, b) будет называться *допустимым*, если $f^{-1}(b) = (a)$.

Замечание. Вместе $\mathbb{E}$-пространств (в указанном смысле) мы могли бы рассматривать просто топологические пространства с единственной неизолированной точкой. Выбранное нами определение представляет некоторые формальные удобства, например, при введении произведения $\mathbb{E}$-пространств и т.п.

1.3. Напомним, что отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *замкнутым*, если для любого замкнутого $M \subset X$ множество $f(M)$ замкнуто в $f(X)$. В дальнейшем нам понадобится еще следующее определение: пусть имеется отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y и множество $B \subset f(X)$; тогда f называется *непрерывным относительно* B, если для $M \subset X$ из $\overline{M} \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ всегда вытекает $\overline{f(M)} \cap B \neq \emptyset$, *замкнутым относительно* B, если для $M \subset X$ из $\overline{M} \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ всегда вытекает $\overline{f(M)} \cap B = \emptyset$. Очевидно, если f непрерывно (замкнуто), то оно непрерывно (замкнуто) относительно любого $B \subset f(X)$.

1.4. Введем в классе всех $\mathbb{E}$-пространств отношение предпорядка: $P \leqslant Q$, если существует замкнутое непрерывное допустимое отображение P в Q. Обозначим через $\cong$ соответствующее отношение эквивалентности и сопоставим каждому $\mathbb{E}$-пространству P некоторый элемент, который мы будем обозначать через $\operatorname{typ} P$ и называть $\mathbb{E}$-*типом* (или просто *типом*) $\mathbb{E}$-пространства P, таким образом, чтобы $\operatorname{typ} P = \operatorname{typ} Q$, если и только если $P \cong Q$.

Замечание. Заслуживают рассмотрения также иные отношения предпорядка в классе $\mathbb{E}$-пространств (и соответствующие определения типов). Например, можно было бы положить $P \leqslant Q$, если существует непрерывное допустимое отображение P в Q; это отношение тесно связано с отношением предпорядка в классе всех направленных множеств, определенном в [8]. Однако, в настоящей заметке мы не будем заниматься этими вопросами.

1.5. Лемма. *Пусть f — замкнутое непрерывное отображение $\mathbb{E}$-пространства P в $\mathbb{E}$-пространство Q. Тогда существует подпространство $P_1 \subset P$ гомеоморфное с $f(P)$ и такое, что $P \cong P_1 \cong f(P)$.*

Доказательство. Положим $S = f(P)$; для каждого $y \in S$ выберем $g(y) \in f^{-1}(y)$. Легко установить, что g является гомеоморфным отображением S в P; положим $P_1 = g(S)$. Очевидно, $P \leqslant S$, $S \leqslant P$, так что $P \cong S$.

Замечание. Легко установить, что если P является $\mathbb{E}$-пространством, а подпространство P_1 окрестностью отмеченной точки в P, то $P \cong P_1$.

1.6. Если дано топологическое пространство X и множество $A \subset X$, то $\langle X, A\rangle$ будет обозначать $\mathbb{E}$-пространство, которое состоит из точек $x \in X - A$ и еще одной точки, являющейся отмеченной, и снабжено следующей топологией: множество $M \subset X - A$ замкнуто в $\langle X, A\rangle$, если и только если его замыкание в X не пересекает A. Заметим, что в случае $A = (x)$ вместо $\langle X, A\rangle$ пишется $\langle X, x\rangle$ и что в качестве отмеченной точки берется обычно A или, если $A = (a)$, точка a. Тип $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle$ будет называться *типом множества A в пространстве X*. Если $A \neq \emptyset$, то *естественным отображением X на $\langle X, A\rangle$* (рассматриваемое как топологическое пространство) мы будем называть отображение h такое, что $h(x) = x$ для $x \in X - A$, и $h(x)$ является отмеченной точкой в $\langle X, A\rangle$ при $x \in A$. Легко видеть, что естественное отображение замкнуто и непрерывно относительно отмеченной точки.

1.7. Если f — отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, $A \subset X$, $B \subset Y$, $A \supset f^{-1}(B)$, то мы будем обозначать через f' или подробнее через $f'_{A,B}$ продолжение отображения f_{X-A} до допустимого отображения $\langle X, A\rangle$ в $\langle Y, B\rangle$.

Лемма. *Пусть даны топологические пространства X, Y, множества $A \subset X$, $B \subset f(X)$ и отображение f пространства X в Y, причем $A = f^{-1}(B)$. Если f непрерывно (замкнуто) относительно B, то f' непрерывно (замкнуто).*

Доказательство. Пусть f непрерывно. Если $M \subset \langle X, A\rangle$, и отмеченная точка пространства $\langle X, A\rangle$ содержится в замыкании M, но не в M, то $\overline{M} \cap A \neq \emptyset$ (в пространстве X) и потому $\overline{f(M)} \cap B \neq \emptyset$ (в Y); следовательно, отмеченная точка пространства $\langle Y, B\rangle$ лежит в замыкании $f'(M)$. Итак, f' непрерывно. Аналогичным образом выводится замкнутость f' из замкнутости f.

1.8. Лемма. *Пусть дано топологическое пространство X, множество $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, и $\mathbb{E}$-пространство (P, a). Если существует замкнутое непрерывное отображение f пространства X в P (соответственно, на P) такое, что $f^{-1}(a) = A$, то $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle \leqslant \operatorname{typ} P$ (соответственно, $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle = \operatorname{typ} P$).*

Доказательство. По предыдущей лемме, f' является замкнутым непрерывным допустимым отображением $\langle X, A\rangle$ в (соответственно, на) пространство $\langle P, a\rangle = (P, a)$, из чего (в связи с 1.5) вытекает утверждение.

1.9. Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства, $A \subset X$, $B \subset Y$; пусть f — отображение X на Y, причем $A = f^{-1}(B)$. Если f непрерывно и замкнуто относительно B, то $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle = \operatorname{typ}\langle Y, B\rangle$.*

Доказательство. Вытекает из 1.7 и 1.5.

Замечание. Очевидно, если Y — топологическое пространство, $A \subset X \subset Y$, то $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle \leqslant \operatorname{typ}\langle Y, A\rangle$.

2. 2.1. Пусть X — топологическое пространство, $M \subset X$. Система $\mathfrak{A}$, состоящая из окрестностей множества M в X, называется *полной*, если для любой окрестности G множества M в X, отличной от X, существует $A \in \mathfrak{A}$ так, что $A \subset G$, *псевдополной*, если для любого $x \in X - M$ существует $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $x \notin A$; заметим, что для полной (псевдополной) системы окрестностей точки употребительно название база (псевдобаза) пространства в точке. Наименьшая мощность полной (соответственно, псевдополной) системы окрестностей множества называется его *характером* (соответственно, *псевдохарактером*) в пространстве X и будет обозначаться через $\chi(X, M)$ и, соответственно, $\psi(X, M)$. Отметим, что по нашему определению $\chi(X, X) = \psi(X, X) = 0$; если M открыто в X, $M \neq X$, то $\chi(X, M) = \psi(X, M) = 1$; во всех остальных случаях $\chi(X, M)$ и $\psi(X, M)$ — бесконечные мощности.

2.2. *Характером* (*псевдохарактером*) E-*пространства* P мы будем называть характер (псевдохарактер) его отмеченной точки; обозначения: $\chi(P)$ или χP и $\psi(P)$ или ψP.

2.3. Лемма. *Пусть отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно и замкнуто относительно множества $B \subset f(X)$; пусть $A = f^{-1}(B)$. Тогда $\chi(X, A) \leqslant \chi(Y, B)$, $\psi(X, A) \leqslant \psi(Y, B)$, а если $f(X) = Y$, то $\chi(X, A) = \chi(Y, B)$, $\psi(X, A) = \psi(Y, B)$.*

Доказательство. Из свойств f вытекает, что (1) если G является окрестностью B в Y, то $f^{-1}(G)$ является окрестностью A в X, (2) если H является окрестностью A в X, то $f(X) - f(X - H)$ является окрестностью B в $f(X)$ и потому существует окрестность G множества B в Y такая, что $f^{-1}(G) \subset H$. Следовательно, если $\mathfrak{G}$ является полной (псевдополной) системой окрестностей множества B, то система всех $f^{-1}(G)$, $G \in \mathfrak{G}$, является полной (псевдополной) системой окрестностей множества A. Из этого вытекают указанные в лемме неравенства. Если же $f(X) = Y$, то из (2) вытекает следующее: если $\mathfrak{H}$ — полная (псевдополная) система окрестностей множества A, то $f(H)$, где $H \in \mathfrak{H}$, составляют полную (псевдополную) систему окрестностей множества B; из этого уже вытекают указанные равенства.

Замечание. В частности, если $A \subset X \subset Y$, то $\chi(X, A) \leqslant \chi(Y, A)$, $\psi(X, A) \leqslant \psi(Y, A)$.

2.4. Согласно 2.3, из $P \cong Q$ вытекает $\chi P = \chi Q$, $\psi P = \psi Q$. Следовательно, можно определить характер $\chi\mathfrak{t}$ и псевдохарактер $\psi\mathfrak{t}$ любого E-типа $\mathfrak{t}$, полагая $\chi\mathfrak{t} = \chi P$, $\psi\mathfrak{t} = \psi P$, где $\mathfrak{t} = \operatorname{typ} P$. Из 2.3 теперь вытекает: если $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ — E-типы, $\mathfrak{t}_1 \leqslant \mathfrak{t}_2$, то $\chi\mathfrak{t}_1 \leqslant \chi\mathfrak{t}_2$, $\psi\mathfrak{t}_1 \leqslant \psi\mathfrak{t}_2$.

2.5. Теорема. *Характер (псевдохарактер) множества A в топологическом пространстве X равен характеру (псевдохарактеру) E-типа $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle$, т.е. $\chi(X, A\rangle = \chi \operatorname{typ}\langle X, A\rangle$, $\psi(X, A) = \psi \operatorname{typ}\langle X, A\rangle$, так что характер и псевдохарактер множества вполне определены его типом (в данном пространстве).*

Это утверждение вытекает непосредственно из предшествующих определений и лемм.

3. 3.1. Пусть даны E-пространства P, Q с отмеченными точками a, b. Обозначим через S топологическое пространство, полученное из топологической суммы топологических пространств P и Q отождествлением точек a и b в точку c. Тогда (S, c) является E-пространством; мы назовем его *суммой* E-пространств P и Q и обозначим $P + Q$.

3.2. Пусть дано семейство $\{P_z\}_{z \in Z}$ E-пространств; обозначим через a_z отмеченную точку пространства P_z, через a точку $\{a_z\}$ из топологического произведения R топологических пространств P_z; E-пространство $\langle R, a\rangle$ будет называться *произведением* семейства $\{P_z\}$ и обозначаться через $\prod\limits_z P_z$. Если все P_z совпадают с одним и тем же E-пространством Q, то вместо $\prod\limits_z P_z$ пишется Q^Z или просто Q^α, где $\alpha = \operatorname{card} Z$.

3.3. Пусть имеются семейства E-пространств $\{P_z\}$, $\{Q_z\}$ и семейство $\{f_z\}$ замкнутых непрерывных допустимых отображений P_z в Q_z. Легко установить, что отображение, сопоставляющее каждому $\{x_z\} \in \prod P_z$ элемент $\{f_z(x_z)\} \in \prod Q_z$, является замкнутым непрерывным допустимым отображением. Итак, если $P_z \leqslant Q_z$ для каждого индекса z, то $\operatorname{typ} \prod P_z \leqslant \operatorname{typ} \prod Q_z$; следовательно, если $\operatorname{typ} P_z = \operatorname{typ} Q_z$ для каждого z, то $\operatorname{typ} \prod P_z = \operatorname{typ} \prod Q_z$. Из этого вытекает, что можно пределить произведение любого семейства $\{\mathfrak{t}_z\}$ E-типов, полагая $\prod \mathfrak{t}_z = \operatorname{typ} \prod P_z$, где $\mathfrak{t}_z = \operatorname{typ} P_z$; можно также определить степень $\mathfrak{t}^\alpha$, где $\mathfrak{t}$ является E-типом, а α — мощность. Аналогичные результаты и определения для суммы E-пространств мы здесь опускаем.

3.4. Назовем *γ-характером* E-*пространства* P и обозначим через γP или $\gamma(P)$ наименьшую мощность α такую, что существует E-пространство $Q \cong P$ с $\operatorname{card} Q = \alpha + 1$. Назовем *$\gamma$-характером* E-*типа* $\mathfrak{t}$ и обозначим через $\gamma\mathfrak{t}$ мощность γP, где $\operatorname{typ} P = \mathfrak{t}$.

3.5. Если α — мощность, то обозначим через D_α дискретное E-пространство мощности $\alpha + 1$; очевидно, $D_\alpha \cong D_\beta$, если $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$. Положим $\mathfrak{d} = \operatorname{typ} D_\alpha$, где $\alpha \geqslant 1$, и $\mathfrak{d}_0 = \operatorname{typ} D_0$; очевидно $\mathfrak{d}_0 \neq \mathfrak{d}$.

3.6. Теорема. *Пусть α — бесконечная мощность. Тогда $\mathfrak{d}^\alpha$ является наибольшим из всех E-типов $\mathfrak{t}$ таких, что $\chi\mathfrak{t} \leqslant \alpha$.*

Доказательство. Обозначим через B топологическое пространство, состоящее из двух точек $0, 1$, а через D_1 — E-пространство $(B, 1)$. Пусть множество Z имеет мощность α. E-пространство D_1^Z (см. 3.2) равно $\langle B^Z, \{1\}\rangle$; так как характер каждой точки в B^Z равен, как известно, α, то $\chi(\mathfrak{d}^\alpha) = \chi(D_1^Z) = \alpha$.

Пусть дано E-пространство P, $\chi P \leqslant \alpha$. Пусть $\mathfrak{G}$ — полная система окрестностей точки a в P, $\operatorname{card}\mathfrak{G} \leqslant \alpha$. Пусть φ — отображение Z на $\mathfrak{G}$. Для каждого $x \in P$ обозначим через h_x функцию на Z, определенную следующим образом: $h_x(z) = 1$, если $x \in \varphi(z)$, $h(z) = 0$, если $x \notin \varphi(z)$; очевидно, $h_x \in D_1^Z$. Для каждого $x \in P$ положим $F(x) = h_x$; легко установить, что F —

допустимое отображение P в D_1^Z. Пусть $z_i \in Z$, $i=1,\ldots,n$, и пусть M состоит из $g \in D_1^Z$ таких, что $g(z_i)=1$, $i=1,\ldots,n$. Тогда, очевидно, $F^{-1}(M)=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$, где $G_i=\varphi(z_i)\in\mathfrak{G}$, так что $F^{-1}(M)$ является окрестностью a в P. Из этого вытекает, что F непрерывно. Пусть теперь S замкнуто в P, $a\notin S$. Тогда существует $G\in\mathfrak{G}$ такое, что $G\cap S=\emptyset$. Пусть $G=\varphi(z_0)$. Если $x\in S$, то $h_x(z_0)=0$; следовательно, $F(S)$ содержится в множестве $g\in D_1^Z$ таких, что $g(z_0)=0$. Из этого вытекает, что $F(S)$ замкнуто в D_1^Z. Итак, F — замкнутое непрерывное допустимое отображение, так что $P\leqslant D_1^Z$.

3.7. Теорема. *Для любого* E*-типа* $\mathfrak{t}$ *имеют место неравенства* $\psi\mathfrak{t}\leqslant\chi\mathfrak{t}$, $\psi\mathfrak{t}\leqslant\gamma\mathfrak{t}$, $\chi\mathfrak{t}\leqslant\exp\gamma\mathfrak{t}$, $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\exp\chi\mathfrak{t}$.

Доказательство. Первые два неравенства непосредственно вытекают из определений. Если P — E-пространство мощности α, то, очевидно, $\chi P\leqslant\exp\alpha$ (так как имеется только $\exp\alpha$ подмножеств пространства P); из этого вытекает, что всегда $\chi\mathfrak{t}\leqslant\exp\gamma\mathfrak{t}$. Наконец, если $\chi\mathfrak{t}\leqslant\alpha$, то, согласно 3.6, $\mathfrak{t}\leqslant\mathfrak{d}^{\alpha}$ и потому $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\gamma(\mathfrak{d}^{\alpha})\leqslant\exp\alpha$.

Замечание. Как известно, для любой бесконечной мощности α существует топологическое пространство P с единственной неизолированной точкой a такое, что $\operatorname{card}P=\alpha$, $\chi(P,a)=\exp\alpha$; следовательно, неравенство $\chi\mathfrak{t}\leqslant\exp\gamma\mathfrak{t}$ нельзя улучшить. Мы покажем в дальнейшем, что, вообще говоря, также неравенство $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\exp\chi\mathfrak{t}$ нельзя улучшить.

3.8. Назовем E-пространство P *неразложимым*, если для любых P_1, P_2 таких, что P_1+P_2 гомеоморфно с P, одно из пространств P_1, P_2 является дискретным.

3.9. Лемма. *Пусть* P *— неразложимое* E*-пространство,* P_1 *— его недискретное подпространство. Тогда* P_1 *является окрестностью отмеченной точки и* $P_1\cong P$.

Доказательство. Предположим, что $P-P_1$ не является замкнутым; тогда $P_2=(a)\cup(P-P_1)$ является недискретным E-пространством и P гомеоморфно с P_1+P_2, что является противоречием. Итак, $P-P_1$ замкнуто и потому является окрестностью отмеченной точки. Из 1.5 (замечание) вытекает $P_1\cong P$.

3.10. Теорема. *Если* S *и* P *являются* E*-пространствами,* $S\leqslant P$, P *неразложимо, то или* S *дискретно или* $S\cong P$.

Доказательство. Пусть S недискретно; пусть f — замкнутое непрерывное допустимое отображение S в P. Очевидно, $f(S)$ недискретно. Согласно 3.9, $f(S)\cong P$; согласно 1.5, $f(S)\cong S$.

Замечание. Существуют, конечно, также E-пространства P, не являющиеся неразложимыми, но такие, что для недискретного S из $S\leqslant P$ вытекает $S\cong P$.

3.11. Лемма. *Для того, чтобы недискретное* E*-пространство* P *было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно с пространством вида* $T\cup(x)$, *где* T *— дискретное топологическое пространство,* $x\in\beta T-T$ *(*βT *означает чеховское максимальное компактное расширение пространства* T*).*

Доказательство. I. Пусть P неразложимо, a — его отмеченная точка. Если $A\subset P$, $a\in\bar{A}-A$, то, согласно 3.9, $A\cup(a)$ является окрестностью точки a. Из этого вытекает: если f — ограниченная действительная функция на $P-(a)$, то при любом $\varepsilon>0$ существует интервал $(\xi,\xi+\varepsilon)$ и окрестность G точки a так, что $\xi<f(y)<\xi+\varepsilon$ при $y\in G$, $y\neq a$. Следовательно, можно продолжить f на точку a как непрерывную функцию. Из этого уже вытекает, что P имеет указанный в лемме вид.

II. Пусть P имеет указанный вид $T\cup(x)$. Предположим, что $P=P_1+P_2$, где P_1, P_2 недискретны. Определим функцию f на T, полагая $f(y)=0$ для $y\in P_1$, $y\neq x$, $f(y)=1$ для $y\in P_2$, $y\neq x$. Очевидно, нельзя непрерывно продолжить f на точку x; мы получили противоречие, так как $x\in\beta T$.

3.12. Теорема. *Пусть* α *— бесконечная мощность. Множество всех* E*-типов* $\mathfrak{t}$ *таких, что* $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\alpha$, *а также множество всех* E*-типов* $\mathfrak{t}$ *таких, что* $\mathfrak{t}=\operatorname{typ}P$ *при подходящем неразложимом* P *мощности* $\leqslant\alpha$, *имеет мощность* $\exp\exp\alpha$.

Доказательство. Пусть S — дискретное пространство мощности α. Для $x\in\beta S-S$ обозначим через A_x пространство $S\cup(x)\subset\beta S$; согласно 3.11, E-пространство A_x неразложимо. Пусть задано $x\in\beta S-S$. Если $y\in\beta S-S$ и $A_x\leqslant A_y$, то существует отображение f_y некоторого подпространства S в S такое, что f_y непрерывно продолжается на точку x, принимая в ней значение y. Очевидно, для различных y также отображения f_y различны. Так как мощность множества всех отображений подмножеств S в S равна $\exp\alpha$, то существует не более $\exp\alpha$ точек $y\in\beta S$ таких, что $A_x\leqslant A_y$. Как известно, $\operatorname{card}(\beta S-S)=\exp\exp\alpha$. Из этого, а также из того, что мощность множества всех топологий, которыми можно снабдить заданное множество мощности α, равна $\exp\exp\alpha$, вытекает наше утверждение.

3.13. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{t}_0$ *—* E*-тип и пусть* $\mathfrak{t}\leqslant\mathfrak{t}_0$ *для каждого* E*-типа* $\mathfrak{t}$ *такого, что* $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\alpha$ *(где* α *— заданная бесконечная мощность). Тогда* $(\gamma\mathfrak{t}_0)^{\alpha}\geqslant\exp\exp\alpha$ *и, следовательно,* $\gamma\mathfrak{t}_0>\exp\alpha$.

Доказательство. Положим $\delta=\gamma\mathfrak{t}_0$; пусть $\operatorname{typ}Q=\mathfrak{t}_0$, $\operatorname{card}Q=\delta$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество E-типов $\mathfrak{t}$ таких, что $\gamma\mathfrak{t}\leqslant\alpha$ и существует неразложимое $P(\mathfrak{t})$ мощности $\leqslant\alpha$ такое, что $\mathfrak{t}=\operatorname{typ}P(\mathfrak{t})$.

Согласно 3.12, имеем $\operatorname{card}\mathfrak{T}=\exp\exp\alpha$. Пусть $\mathfrak{t}\leqslant\mathfrak{t}_0$; тогда $P(\mathfrak{t})\leqslant Q$ и потому, согласно 1.5, существует подпространство $Q(\mathfrak{t})\subset Q$ такое, что

$Q(\mathfrak{t}) \cong P(\mathfrak{t})$, $\operatorname{card} Q(\mathfrak{t}) \leqslant \alpha$. Очевидно, при различных $\mathfrak{t}$ пространства $Q(\mathfrak{t})$ различны. Однако, имеется только δ^{α} подмножеств мощности $\leqslant \alpha$ в пространстве Q; следовательно, $\delta^{\alpha} \geqslant \exp\exp\alpha$.

Следствие. Пусть α — бесконечная мощность, $\varepsilon = \exp\alpha$. Тогда $\gamma(\mathfrak{d}^{\varepsilon}) > \varepsilon$ (и следовательно, если предполагать обобщенную гипотезу континуума, $\gamma(\mathfrak{d}^{\varepsilon}) = \exp\varepsilon$, так что последнее неравенство в 3.6, вообще говоря, нельзя улучшить). Действительно, если $\gamma\mathfrak{t} \leqslant \alpha$, то $\chi\mathfrak{t} \leqslant \varepsilon$, так что, согласно 3.7, $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{d}^{\varepsilon}$; следовательно $\gamma(\mathfrak{d}^{\varepsilon}) > \exp\alpha = \varepsilon$.

4. 4.1. Если X — топологическое пространство, то через $\mathrm{k}X$ будет обозначаться E-пространство, состоящее из точек $x \in X$ и еще одной точки, являющейся отмеченной, и снабженное топологией, в которой множество $M \subset X$ замкнуто, если и только если его замыкание в топологическом пространстве X компактно. Тип E-пространства $\mathrm{k}X$, т.е. $\operatorname{typ}\mathrm{k}X$ будет обозначаться также через $\mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}X$ и называться k-*типом* (или *внутренним типом*) пространства X.

Очевидно, если топологическое пространство Y компактно, $X \subset Y$, то $\mathrm{k}X$ гомеоморфно с $\langle Y, Y - X\rangle$.

4.2. *Пусть* X, Y — *топологические пространства*, f — *отображение* X *в* Y, *причем для компактного* $A \subset X$ *компактно также* $f(A)$, *а для компактного* $B \subset Y$ *компактно также* $f^{-1}(B)$. *Тогда* $\mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}X \leqslant \mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}Y$, *а если* $f(X) = Y$, *то* $\mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}X = \mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}Y$.

Доказательство. Продолжив f до допустимого отображения $\mathrm{k}X$ в $\mathrm{k}Y$, получаем замкнутое непрерывное отображение $\mathrm{k}X$ в $\mathrm{k}Y$.

Замечание. В частности, если $X \subset Y$, X замкнуто в Y, то $\mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}X \leqslant \mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}Y$.

4.3. Лемма. *Пусть* X, Y — *топологические пространства, причем* X *регулярно. Пусть* f — *непрерывное отображение* X *в* Y. *Пусть* $A \subset X$, $\overline{A} = X$; *пусть сужение* f_A *замкнуто и пусть каждое* $f_A^{-1}(y)$ *замкнуто в* X. *Тогда* $A = f^{-1}(f(A))$.

Доказательство. Предположим, что существует $a \in X - A$ так, что $f(a) \in f(A)$. Обозначим через B множество точек $x \in A$ таких, что $f(x) = f(a)$. По условию, B замкнуто в X. Найдем окрестность U точки a так, чтобы $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Множество $f(\overline{U} \cap A)$ замкнуто в $f(A)$; следовательно, $f(a)$ не лежит в его замыкании (в Y). Но, с другой стороны, a лежит в замыкании множества $\overline{U} \cap A$, так что $f(a)$ лежит в замыкании $f(\overline{U} \cap A)$. Мы получили противоречие.

4.4. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется, как известно, *совершенным*, если оно замкнуто и непрерывно, а прообразы точек компактны.

Лемма. *Пусть* X *и* Y — *топологические пространства, причем* X *регулярно. Пусть* f — *непрерывное отображение* X *в* Y. *Пусть* $A \subset X$, $\overline{A} = X$ *и пусть отображение* f_A *совершенно. Тогда* $A = f^{-1}(f(A))$.

Доказательство: вытекает из 4.3.

4.5. Теорема. *Пусть* X *и* Y — *вполне регулярные топологические пространства и пусть существует совершенное отображение* X *на* Y. *Пусть* K *и* L — *компактные хаусдорфовы пространства*, $X \subset K$, $\overline{X} = K$, $Y \subset L$, $\overline{Y} = L$. *Тогда* $\operatorname{typ}\langle K, X\rangle = \operatorname{typ}\langle L, Y\rangle$.

Доказательство. I. Обозначим через g тождественное отображение X на X и продолжим его до непрерывного отображения $\bar{g}$ пространства βX на K. Согласно 4.4, получаем $X = \bar{g}^{-1}(X)$, так что, в силу 1.9, $\operatorname{typ}\langle\beta X, X\rangle = \operatorname{typ}\langle K, X\rangle$. Пусть f — совершенное отображение X на Y; продолжим f до непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства βX на L. Согласно 4.4, получаем $X = \bar{f}^{-1}(Y)$, из чего вытекает $\operatorname{typ}\langle\beta X, X\rangle = \operatorname{typ}\langle L, Y\rangle$. Итак, $\operatorname{typ}\langle K, X\rangle = \operatorname{typ}\langle L, Y\rangle$.

4.6. Если X — вполне регулярное пространство, то согласно 4.5 тип E-пространства $\langle K, X\rangle$, где K — компактное вполне регулярное пространство, $\overline{X} = K$, не зависит от K; мы будем называть его *внешним типом* пространства X и обозначать $\mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X$.

Очевидно, если Y — вполне регулярное пространство, $X \subset Y$, $\overline{X} = Y$, то $\operatorname{typ}\langle Y, X\rangle \leqslant \mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X$.

4.7. Теорема. *Пусть* X *и* Y — *вполне регулярные топологические пространства*, f — *совершенное отображение* X *на* Y. *Тогда* $\mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X = \mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}Y$, $\mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}X = \mathrm{k}\text{-}\operatorname{typ}Y$ *и для любого* $B \subset X$ *имеет место* $\operatorname{typ}\langle X, A\rangle = \operatorname{typ}\langle Y, B\rangle$, *где* $A = f^{-1}(B)$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из 4.5, второе из 4.2 и того известного факта, что при совершенном отображении прообразы компактных множеств компактны. Третье утверждение содержится в 1.9.

4.8. Теорема. *Если* Y — *вполне регулярное пространство*, $X \subset Y$, X *замкнуто в* Y, *то* $\mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X \leqslant \mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}Y$.

Доказательство. Пусть K — компактное хаусдорфово пространство, $Y \subset K$; обозначим через L замыкание X в K. Рассматривая $h'_{X,Y}$ (см. 1.7), где h обозначает тождественное отображение L в K, получаем $\operatorname{typ}\langle L, X\rangle \leqslant \operatorname{typ}\langle K, Y\rangle$.

4.9. Легко установить, что (для любого вполне регулярного X) $\chi(\mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X)$ и, соответственно, $\psi(\mathrm{e}\text{-}\operatorname{typ}X)$ равно внешнему характеру $\mathrm{e}\chi(X)$ (соответственно, внешнему псевдохарактеру $\mathrm{e}\psi(X)$, введеному в заметке [3]. Аналогично, $\chi(\mathrm{k}X)$, $\psi(\mathrm{k}X)$ соответственно равны (для любого топологического пространства X) k-характеру $\mathrm{k}\chi(X)$ и k-псевдохарактеру $\mathrm{k}\psi(X)$, введеным в упомянутой статье.

4.10. Назовем вполне регулярные пространства X, Y *ассоциированными*, если существует компактное вполне регулярное пространство K и множества $X_1 \subset K$, $Y_1 \subset K$ такие, что $X_1 \cup Y_1 = K$, $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$, $\overline{X}_1 = K$, $\overline{Y}_1 = K$, X_1 гомеоморфно с X, Y_1 гомеоморфно с Y.

Теорема. *Если X и Y — ассоциированные пространства, то* $\text{k-typ}\, X = \text{e-typ}\, Y$, $\text{e-typ}\, X = \text{k-typ}\, Y$.

Доказательство. Взяв K, X_1, Y_1 с указанными свойствами, получаем, что kX_1 гомеоморфно с $\langle K, Y_1 \rangle$, из чего следует $\text{k-typ}\, X_1 = \text{e-typ}\, Y_1$.

5. 5.1. Отметим следующий почти очевидный факт: каждое бесконечное множество M можно упорядочить таким образом, что (1) для любого $x \in M$ множество всех $y \in M$ таких, что $y \leqslant x$, конечно и совершенно упорядочено, (2) для любого $x \in M$ множество всех $z \in M$, непосредственно следующих за x (т.е. таких, что $x < z$ и не существует t такого, чтобы $x < t < z$), имеет мощность равную $\operatorname{card} M$.

Действительно, достаточно взять множество R с $\operatorname{card} R = \operatorname{card} M$, обозначить через S множество всех конечных последовательностей элементов из R, для $\xi \in S$, $\eta \in S$ положить $\xi \leqslant \eta$, если (и только если) ξ является сужением η, и затем отобразить взаимно однозначно множество S на M.

5.2. Теорема. *Пусть M — бесконечное множество; пусть каждому $x \in M$ сопоставлен E-тип $\mathfrak{t}_x$ такой, что $\gamma \mathfrak{t}_x \leqslant \operatorname{card} M$. Тогда существует топология на M такая, что M является наследственно нормальным и для любого $x \in M$ имеет место* $\operatorname{typ}\langle M, x\rangle = \mathfrak{t}_x$.

Доказательство. I. Проведем сначала одно построение (в предположениях несколько более общих, чем необходимо для доказательства теоремы). Пусть M — бесконечное упорядоченное множество. Обозначим для каждого $x \in M$ через $A(x)$ множество всех $y \in M$ таких, что $y \leqslant x$, через $R(x)$ множество всех $y \in M$ таких, что $y \geqslant x$, через $B(x)$ множество всех $y \in M$, непосредственно следующих за x, через $B'(x)$ множество $(x) \cup B(x)$. Будем предполагать, что (a) каждое $A(x)$ совершенно упорядочено, (b) для любого $y \in R(x)$, $y \neq x$, множество $A(y) \cap B(x)$ непусто (и, следовательно, как вытекает из (a), содержит единственный элемент). Пусть для каждого x множество $B'(x)$ снабжено топологией.

Построим теперь топологию на множестве M. Для каждого $x \in M$ полную систему окрестностей будут составлять, по определению, множества V^* вида $V^* = (x) \cup \bigcup_{z \in V \cap B(x)} R(z)$, где V — окрестность точки x в $B'(x)$ (при заданной на $B'(x)$ топологии). Легко установить, что таким образом мы действительно получаем топологию на M (причем множества указанного вида открыты). В частности, если $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y$, то если $x \leqslant y$ не имеет места, то, очевидно, y не содержится ни в одной из окрестностей точки x, имеющих указанный вид; если же $x < y$, то, по предположению (b), найдем $r \in B(x)$ так, чтобы $r \leqslant y$, и положим $V = B'(x) - (r)$; тогда $y \notin V^*$ (так как иначе мы бы имели $y \in R(z)$, $z \in B(x)$, $z \neq r$, и r и z были бы несравнимыми, что противоречит предположению (a)).

Докажем, что M, снабженное указанной топологией, является наследственно нормальным пространством. Для этого достаточно показать, что для любых $C \subset M$, $D \subset M$ таких, что $C \cap \overline{D} = \emptyset$, $\overline{C} \cap D = \emptyset$, существуют открытые $G \supset C$, $H \supset D$ такие, что $G \cap H = \emptyset$. Для каждого $x \in C$ (соответственно, $x \in D$) найдем окрестность V_x точки x в $B'(x)$ так, чтобы $V_x^* \cap D = \emptyset$ (или, соответственно, $V_x^* \cap C = \emptyset$). Положим $G = \bigcup_{x \in C} V_x^*$, $H = \bigcup_{x \in D} V_x^*$ и докажем, что $G \cap H = \emptyset$ (включения $G \supset C$, $H \supset D$ очевидны). Предположим, что $z \in G \cap H$. Тогда существует, во-первых, $x \in C$ и $r \in V_x$, $r \neq x$, такие, что $r \leqslant z$, во-вторых, $y \in D$ и $s \in V_y$, $s \neq y$, такие, что $s \leqslant z$. По предположению (a), или $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$; пусть, например, $x \leqslant y$ и, следовательно, $x < y$ (так как $x \neq y$). Тогда $y < r$ невозможно (так как $r \in B(x)$); значит, по предположению (a), $r \leqslant y$, из чего вытекает $y \in V_x^*$. Мы получили противоречие.

Докажем, наконец, что $\langle M, x\rangle \cong \langle B'(x), x\rangle$ для каждого $x \in M$. Положим $f(x) = x$; для каждого $y \in R(x)$, $y \neq x$, положим $f(x)$ равным тому $z \in B(x)$, для которого $z \leqslant y$; выберем произвольно $b \in B(x)$ и для $y \in M - R(x)$ положим $f(y) = b$. Легко установить, что отображение f пространства M на $B'(x)$ непрерывно и замкнуто относительно точки x. Из этого по 1.9 вытекает наше утверждение.

II. Доказательство теперь заканчивается совсем просто: упорядочим заданное M так, чтобы были выполнены условия, указанные в 5.1. Для каждого $x \in M$ снабдим $B'(x)$ (что, очевидно, возможно, так как $\gamma \mathfrak{t}_x \leqslant \operatorname{card} M$) топологией такой, чтобы $\operatorname{typ}\langle B'(x), x\rangle = \mathfrak{t}_x$. Проведем теперь конструкцию, указанную в первой части доказательства. Получаем наследственно нормальное пространство M, причем $\operatorname{typ}\langle M, x\rangle = \mathfrak{t}_x$ для каждой точки $x \in M$.

Замечание. Доказанная теорема является частичным усилением теоремы из главы I работы [7], из которой также заимствован, по существу, метод доказательства.

Литература

[1] P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 14, No 1 (1929).

[2] E. Čech et B. Pospíšil, *Sur les caractères des points dans les espaces L*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university 258 (1938), стр. 1-47.

[3] M. Katětov, *Remarks on characters and pseudocharacters*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 1, No 1 (1960), стр. 20-25.

[4] M. Katětov, *On the space of irrational numbers*, Commentationes mathematicae universitatis Carolinae 1, No 2 (1960), стр. 38-42.

[5] J. Novák, *Charakter množiny*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 66 (1937), стр. 206-209.

[6] B. Pospíšil, *Théorèmes d'existence pour les caractères des points*, ibid. 67 (1938), стр. 249-355.

[7] — *Sur les caractères des points dans les espaces topologiques*, Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university 256 (1938), стр. 1-23.

[8] J. W. Tuckey, *Convergence and uniformity in topology*, Annals of Mathematics Studies, no. 2, Princeton 1940.

Reçu par la Rédaction le 19. 1. 1961

La relation d'équivalence et les objets géométriques

par

S. Gołąb (Kraków)

Il est bien connu que les relations réflexives, symétriques et transitives nommées tout court relations d'équivalence jouent un rôle important dans presque tous les domaines des mathématiques.

Dans la Note présente nous voulons attirer l'attention sur un rapport qui existe entre les relations d'équivalence pour deux vecteurs glissants (situés sur une même droite) et les objets géométriques non différentiels à une dimension.

Sur une droite affine (et en général dans l'espace affine à n dimensions) on définit un vecteur comme un couple de points (P_1, P_2), un vecteur libre comme l'ensemble de tous les vecteurs équipollents. La relation R d'équipollence est définie dans ce cas comme il suit. Si nous désignons par x_i la coordonnée affine du point P_i (dans n'importe quel système de coordonnées), alors l'assertion

$$(P_1, P_2) R (P_3, P_4) \tag{1}$$

veut dire que l'on a

$$x_4 - x_3 = x_2 - x_1 . \tag{2}$$

Du point de vue géométrique la définition la plus simple de la relation R est la suivante: *le milieu du segment P_1P_4 se confond avec le milieu du segment P_2P_3* (le milieu d'un segment est une notion invariante de la géométrie affine). Par contre, il est mieux — à mon avis — d'éviter de déterminer les vecteurs équipollents comme ceux qui possèdent même direction, orientation et longueur, car cette dernière définition pourrait suggérer que la notion de vecteurs équipollents peut être introduite seulement dans les espaces métriques.

On démontre sans difficulté que la relation (1) définie par la condition (2) est une relation d'équivalence et qu'elle a un caractère invariant par rapport aux transformations affines de la coordonnée x ($\bar{x} = ax + b$, $a \neq 0$).

On peut poser la question suivante: quelles sont les autres relations d'équivalence (outre (2)) entre les couples de vecteurs? Bien entendu la détermination de toutes les relations possible de ce genre n'est pas un