$\leqslant k$ ($\leqslant m$) can be covered by $m-k+1$ contractible open sets. Hence since $C(Y)$ is simply connected ([5], Theorem 4.5) and acyclic in all dimensions, it follows that $C(Y)$ is contractible and hence is an absolute retract.

QUESTION. For what class of continua is $C(X)$ a quasi-complex? We know that if X is locally connected (in which case $C(X)$ is an absolute retract) or a snake-like continuum that $C(X)$ is a quasi-complex.

References

[1] R. H. Bing, *Snake-like continua*, Duke Math. J. 18 (1951), pp. 653-663.

[2] E. Dyer, *A fixed point theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., (1956), pp. 662-672.

[3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton 1952.

[4] R. H. Fox, *On the Lusternik Schnirelmann category*, Annals of Math. (1941), pp. 333-370.

[5] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), pp. 22-36.

[6] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 27, New York 1942.

[7] — *Topics in topology*, Annals of Math. Studies, no. 10, 1942.

[8] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), pp. 152-182.

[9] J. Segal, *Hyperspaces of the inverse limit space*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), pp. 706-709.

THE UNIVERSITY OF WASHINGTON
SEATTLE, WASHINGTON, U. S. A.

Reçu par la Rédaction le 26. 11. 1960

Sur la représentation topologique des graphes

par

Á. Császár (Budapest)

1. Nous entendons par *graphe* (abstrait) le système (S, A, e) composé d'un ensemble S (dont les éléments sont appelés *sommets* du graphe), d'un ensemble A (dont les éléments s'appellent *arêtes* du graphe) et d'une application e qui fait correspondre à chaque arête $a \in A$ un ensemble $e(a) = \{s_1, s_2\} \subset S$ composé de deux sommets distincts, appelés *extrémités* de l'arête a (1).

Nous dirons qu'un graphe (S, A, e) est *fini* si les ensembles S et A sont finis, et qu'il est *dénombrable* si S et A sont *dénombrables* (2). Le graphe (S, A, e) est dit *connexe* si, deux sommets distincts $s, s' \in S$, $s \neq s'$ étant donnés, on peut toujours trouver une suite finie d'arêtes $a_1, \ldots, a_n$ telles que $s \in e(a_1)$, $s' \in e(a_n)$ et que $e(a_i) \cap e(a_{i+1}) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

2. On a l'habitude de représenter un graphe *fini* (S, A, e) par un sous-ensemble G de l'espace euclidien E^3, composé de certains points $s'_1, \ldots, s'_m$ et de certains arcs $a'_1, \ldots, a'_n$ (où m est égal à la puissance de l'ensemble S et n à celle de l'ensemble A), de manière que les points s'_i correspondent biunivoquement aux sommets $s_i \in S$ et les arcs a'_k aux arêtes $a_k \in A$, l'arc a'_k ayant pour extrémités les points s'_i et s'_j si et seulement si l'arête correspondante a_k a pour extrémités les sommets s_i et s_j qui correspondent à s'_i et s'_j respectivement, et deux arcs a'_k et a'_l n'ayant d'autres points communs que leurs extrémités au plus. Beaucoup de propriétés du graphe (S, A, e) peuvent être formulées au moyen des propriétés topologiques de l'ensemble G; p.ex. le graphe (S, A, e) est connexe si et seulement si l'ensemble G est connexe (au sens topologique).

Pour un graphe (S, A, e) quelconque (fini ou non), on peut définir une représentation topologique analogue de la façon suivante. Considérons un ensemble G dont les éléments sont d'une part les sommets $s \in S$ du graphe, de l'autre les couples (a, x) formés par une arête $a \in A$

(1) D'après la terminologie adoptée par D. König ([3], pp. 1 et 2), il faudrait encore postuler que, pour $s \in S$, il existe au moins un $a \in A$ tel que $s \in e(a)$; d'après C. Berge ([1], p. 27), on devrait dire *multi-graphe* au lieu de graphe. Cependant, la terminologie que nous venons d'introduire conviendra mieux à nos buts.

(2) C'est-à-dire finis ou dénombrablement infinis.

et par un nombre réel x. Choisissons ensuite dans chacun des ensembles $e(a)$ un élément qui sera appelé *extrémité positive* de l'arête a et désigné par $e^+(a)$, tandis que l'autre extrémité de a sera appelée *extrémité négative* et désignée par $e^-(a)$, et posons pour $a \epsilon A$ et pour tout entier positif n

$$(s, a, n) = \begin{cases} \{(a, x)\colon\ x > n\}\,, & \text{si} \quad s = e^+(a)\,, \\ \{(a, x)\colon\ x < -n\}\,, & \text{si} \quad s = e^-(a)\,. \end{cases}$$

Posons ensuite pour $s \epsilon S$

$$(s; n) = \{s\} \cup \bigcup_{s \epsilon e(a)} (s, a, n)\,,$$

et pour $a \epsilon A$ et deux nombres réels $c < d$

$$(a; c, d) = \{(a, x)\colon\ c < x < d\}\,.$$

Munissons enfin l'ensemble G d'une topologie dont les ensembles $(s; n)$ ($s \epsilon S$, $n = 1, 2, \ldots$) et $(a; c, d)$ ($a \epsilon A$, c et d réels, $c < d$) forment une base. On constate aisément que si un élément de G est contenu dans deux ensembles de la base, il existe un ensemble de la base qui contient cet élément et qui est contenu dans l'intersection de ces deux ensembles, de sorte que l'on a bien introduit une topologie sur G.

On voit aisément que deux espaces topologiques G et G' qui résultent d'un même graphe au moyen de la construction précédente, mais à l'aide de deux choix différents des extrémités positives, sont homéomorphes l'un à l'autre. Tous les espaces topologiques de ce genre seront appelés *représentants* du graphe en question; leur type topologique est donc déterminé univoquement par le graphe.

Il est facile de voir que, dans le cas d'un graphe fini, les représentants que nous venons de définir sont homéomorphes à ceux dont nous avons parlé plus haut.

Le but de cette note est d'étudier quelques propriétés topologiques des représentants des graphes, et de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace topologique donné puisse être considéré comme le représentant d'un graphe convenablement choisi.

3. Désignons par G un représentant d'un graphe (S, A, e).

Les deux propositions suivantes résultent immédiatement de la définition de la topologie de G.

(3.1) *Pour $a \epsilon A$ quelconque, l'ensemble $D_a = \{(a, x)\colon\ -\infty < x < +\infty\}$ est ouvert, et sa fermeture $\overline{D}_a$ est un arc ayant les éléments de $e(a)$ pour extrémités. Plus précisément, l'application $g(0) = e^-(a)$, $g(1) = e^+(a)$, $g(x) = \left(a, \operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})\right)$ $(0 < x < 1)$ est un homéomorphisme du segment $[0, 1]$ sur $\overline{D}_a$.*

(3.2) *L'ensemble $S \subset G$ n'admet pas de points d'accumulation dans G. Il en est de même de l'ensemble $\{(a, x)\colon\ a \epsilon A\}$ pour un x réel fixé.*

On démontre ensuite aisément:

(3.3) *L'espace topologique G est régulier.*

En effet, si $a \epsilon A$ et $c < d$, on a d'après (3.1)

(3.4) $\operatorname{Fr}(a; c, d) = \{(a, c), (a, d)\}\,,$

et on vérifie aussi sans difficulté la formule

(3.5) $\operatorname{Fr}(s; n) = \{(a, n)\colon\ s = e^+(a)\} \cup \{(a, -n)\colon\ s = e^-(a)\}$

pour $s \epsilon S$ et $n = 1, 2, \ldots$ Il en résulte $\overline{(a; c, d)} \subset (a; c', d')$ pour $a \epsilon A$, $c' < c < d < d'$ et $\overline{(s; n+1)} \subset (s; n)$ pour $s \epsilon S$, $n = 1, 2, \ldots$, d'où vient l'énoncé.

(3.6) *La topologie de G admet une base qui est la réunion d'une infinité dénombrable de systèmes localement finis.*

En effet, le n-ième des systèmes cherchés se compose des ensembles $(s; n)$, où $s \epsilon S$, et des ensembles $\left(a; \frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ et $\left(a; \frac{2p-1}{2n}, \frac{2p+1}{2n}\right)$, où $a \epsilon A$ et p est un entier tel que $|p| \leqslant n^2$.

Les propositions (3.3) et (3.6) entraînent en vertu du théorème de métrisation de Nagata-Smirnov:

(3.7) *L'espace topologique G est métrisable* (³).

De plus, on déduit de (3.1):

(3.8) *L'espace G est localement connexe.*

En appelant *point de ramification* d'un espace M un point $x \epsilon M$ tel que $\operatorname{ord}_x M \geqslant 3$ (⁴) on peut affirmer en conséquence de (3.1) ou (3.4):

(3.9) *L'ensemble R des points de ramification de G est contenu dans l'ensemble S. Chaque point de R possède un voisinage qui ne contient aucune composante de $G-R$.*

En effet, si $s \epsilon R \subset S$, les voisinages $(s; n)$ sont du type exigé, puisque les composantes de $G-R$ contiennent soit un point de S, soit un ensemble D_a.

(3.10) *L'espace G est compact si et seulement si le graphe (S, A, e) est fini; il est séparable si et seulement si ce graphe est dénombrable.*

(³) Voir [7] et [8]. Bien entendu, l'application de ce théorème peut être évitée par la construction d'un homéomorphisme de l'espace G sur un espace métrique. Considérons à cet effet l'espace de Banach B composé des fonctions réelles bornées définies sur l'ensemble $H = S \cup A$, avec la norme $\|z\| = \sup\{|z(t)|\colon\ t \epsilon H\}$, et faisons correspondre au point $s \epsilon S$ la fonction $z(s) = \frac{1}{2}\pi$, $z(t) = 0$ pour $t \epsilon H - \{s\}$, au point $(a, x) \epsilon G - S$ la fonction $z(a) = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x$, $z(e^+(a)) = \operatorname{arctg} x$, $z(t) = 0$ pour $t \epsilon H - \{a, e^+(a)\}$, si $x \geqslant 0$, et la fonction $z(a) = \frac{1}{2}\pi + \operatorname{arctg} x$, $z(e^-(a)) = -\operatorname{arctg} x$, $z(t) = 0$ pour $t \epsilon H - \{a, e^-(a)\}$, si $x \leqslant 0$. On obtient ainsi un homéomorphisme de l'espace G dans B.

(⁴) Pour la définition de ce symbole, voir p.ex. [4], p. 201.

En effet, si le graphe (S, A, e) est fini (dénombrable), G est la réunion de l'ensemble fini (dénombrable) S et d'un nombre fini (dénombrable) d'arcs $\overline{D}_a$. D'autre part, si l'ensemble S est infini (non-dénombrable), c'est un ensemble infini (non-dénombrable) sans points d'accumulation (cf. (3.2)). Si A est infini (non-dénombrable), les points $(a, 0)$ forment un ensemble du même type et sans points d'accumulation (cf. (3.2)).

(3.11) *Si le graphe (S, A, e) est dénombrable, on a* $\dim G \leqslant 1$; *par suite G peut être plongé topologiquement dans le cube I^3.*

En effet, G est un espace métrisable et séparable d'après (3.7) et (3.10), et la frontière d'un ensemble $(s; n)$ ou $(a; c, d)$ de la base est un ensemble isolé (cf. (3.4), (3.5) et (3.2)), donc de dimension 0. Par conséquent on peut appliquer le théorème de Menger-Nöbeling (voir p. e. [4], p. 69).

Bien entendu, si (S, A, e) n'est pas dénombrable, l'espace G non-séparable (cf. (3.10)) ne peut être plongé dans aucun espace métrique séparable.

(3.12) *L'espace G est connexe si et seulement si le graphe (S, A, e) est connexe.*

En effet, les points de G qui peuvent être reliés à un point $s \in S$ fixé à l'aide d'une suite finie d'arcs $\overline{D}_a$ de manière que s soit compris dans le premier terme de cette suite, le point en question dans le dernier, et que deux termes consécutifs aient toujours une extrémité commune, forment un ensemble fermé-ouvert, de sorte que la connexité de G implique celle de (S, A, e). La réciproque est évidente.

4. Les résultats qui précèdent montrent que les espaces topologiques que l'on peut obtenir comme représentants de graphes, possèdent de propriétés topologiques particulières. Nous allons montrer que quelques unes de ces propriétés peuvent servir à *caractériser* les espaces topologiques en question.

THÉORÈME. *Un représentant quelconque G d'un graphe est un espace topologique satisfaisant aux conditions suivantes:*

(4.1) *G est métrisable,*

(4.2) *G est localement connexe,*

(4.3) *dans G, l'ensemble R des points de ramification n'admet pas de points d'accumulation,*

(4.4) *chaque point de R possède un voisinage qui ne contient aucune composante de $G-R$.*

Réciproquement, si un espace topologique G jouit des propriétés (4.1) *à* (4.4), *il est homéomorphe à un représentant d'un graphe convenablement choisi.*

Démonstration. La nécessité des propriétés en question résulte des propositions (3.7), (3.8), (3.9) et (3.2).

Pour établir leur suffisance, supposons qu'un espace topologique G vérifie les conditions (4.1)-(4.4). Pour $r \in R$, désignons par $\mathfrak{U}(r)$ la famille des ensembles ouverts, connexes, contenant le point r, et dont la fermeture ne contient aucun autre point de R, ni une composante de $G-R$. On déduit de (4.1)-(4.4) que $\mathfrak{U}(r)$ est un système fondamental de voisinages du point r.

Ceci établi, considérons une composante K de l'ensemble $G-R$. L'ensemble R étant fermé d'après (4.3), K est un ensemble ouvert en conséquence de (4.2). De plus, considéré comme sous-espace de G, K est métrisable, connexe et privé de points de ramification. Par conséquent, K est soit réduit à un seul point, soit un arc, soit une courbe simple fermée, soit homéomorphe à une droite, soit enfin homéomorphe à une demi-droite (voir [2], p. 322, théorème II).

(4.5) *K étant une composante de $G-R$, on a* $\mathrm{Fr}\,K = \overline{K}-K \subset R$.

En effet, K est ouvert dans G et relativement fermé dans $G-R$.

(4.6) *Soient $r \in R$, $U \in \mathfrak{U}(r)$, K une composante de $G-R$ et C une composante de $U \cap K \neq 0$; on a alors $r \in \overline{C}$.*

En effet, C est ouvert d'après (4.2) et (4.3) et relativement fermé dans $U \cap K$. Par suite on a, en tenant compte de (4.5),

$$U \cap (\overline{C}-C) \subset (U \cap \overline{K})-(U \cap K) = U \cap (\overline{K}-K) \subset U \cap R = \{r\}\,.$$

Donc, si la proposition était en défaut, C serait relativement fermé dans U, contrairement à la connexité de celui-ci.

Il résulte aussitôt de (4.6) que si $r \in R$, $U \in \mathfrak{U}(r)$, le voisinage U rencontre parmi les composantes K de $G-R$ seulement celles dont la fermeture contient le point r. Ceci étant impossible si K se réduit à un seul point, si elle est un arc ou si elle est une courbe simple fermée, considérons une composante K de $G-R$ qui est homéomorphe à une droite, soit g un homéomorphisme de la droite numérique sur K, et posons $r \in \overline{K}-K \subset R$. On déduit aisément de (4.6) que, si $U \in \mathfrak{U}(r)$ et si C est une composante de $U \cap K$, son image réciproque $g^{-1}(C)$ ne peut pas être un intervalle fini, de sorte qu'elle est ou bien de la forme $(-\infty, a)$, ou bien de la forme $(b, +\infty)$. De plus, si $g^{-1}(U \cap K) = (-\infty, a)$ pour un $U \in \mathfrak{U}(r)$, on a une égalité du même type pour tous les $U \in \mathfrak{U}(r)$, la valeur de a dépendant naturellement de U, et il en est de même si $g^{-1}(U \cap K) = (b, +\infty)$ ou si $g^{-1}(U \cap K) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ pour un $U \in \mathfrak{U}(r)$. Il s'ensuit dans les deux premiers cas que $\{r\} \cup K$ est homéomorphe à une demi-droite, r correspondant à l'extrémité de celle-ci, et dans le troisième que $\{r\} \cup K$ est une courbe simple fermée. Un raisonnement analogue montre aussi que si K est une composante de $G-R$, homéomorphe à une demi-droite, et si $r \in \overline{K}-K$, la réunion $\{r\} \cup K$ est un arc dont l'une des extrémités coïncide avec r. On voit aussi que la frontière d'une composante K, homéomorphe à une droite, ne peut contenir que deux points au plus, tandis que celle d'une K homéomorphe à une demi-droite doit être vide ou se réduire à un seul point.

En résumant, si K est une composante de $G-R$, on a l'une des propositions suivantes:

(4.7) *K se réduit à un point;*

(4.8) *K est un arc;*

(4.9) *K est une courbe simple fermée;*

(4.10) *K est homéomorphe à une droite, $\overline{K}=K$;*

(4.11) *K est homéomorphe à une droite, $\overline{K}=K\cup\{r\}$ est homéomorphe à une demi-droite, $r \in R$ correspondant à l'extrémité de celle-ci;*

(4.12) *K est homéomorphe à une droite, $\overline{K}=K\cup\{r, r'\}$ est un arc ayant $r \in R$ et $r' \in R$ pour extrémités;*

(4.13) *K est homéomorphe à une droite, $\overline{K}=K\cup\{r\}$ est une courbe simple fermée, $r \in R$;*

(4.14) *K est homéomorphe à une demi-droite, $\overline{K}=K$;*

(4.15) *K est homéomorphe à une demi-droite, $\overline{K}=K\cup\{r\}$ est un arc ayant $r \in R$ pour une de ses extrémités.*

Ceci établi, posons, pour $r \in R$, $\varepsilon_r=\varrho(r, R-\{r\})$, ϱ étant une distance compatible avec la topologie de G. (4.3) implique l'inégalité $\varepsilon_r>0$, de sorte que l'on peut désigner par Y_r la sphère ouverte de centre r et de rayon $\varepsilon_r/2$. On aura

(4.16) $\qquad Y_{r_1}\cap Y_{r_2}=0 \quad$ pour $\quad r_1, r_2 \in R, \quad r_1 \neq r_2$.

En effet, si p. ex. $\varepsilon_{r_1} \leqslant \varepsilon_{r_2}$, l'hypothèse $Y_{r_1}\cap Y_{r_2}\neq 0$ entraînerait

$$\varrho(r_1, r_2)<\varepsilon_{r_1}/2+\varepsilon_{r_2}/2 \leqslant \varepsilon_{r_2},$$

contrairement à la définition de ε_{r_2} (5).

Désignons maintenant, pour $r \in R$, par U_r un ensemble de la famille $\mathfrak{U}(r)$, vérifiant la condition

(4.17) $\qquad \overline{U}_r \subset Y_r$,

et construisons une suite $\{U_r^n\}$ telle que

(4.18) $\qquad U_r^n \in \mathfrak{U}(r), \quad U_r^0=U_r, \quad \overline{U}_r^{n+1} \subset U_r^n$

et que $\{U_r^n\}$ soit un système fondamental de voisinages du point r.

Ceci posé, désignons par g_K un homéomorphisme de la droite numérique sur la composante K de $G-R$, du type (4.10) ou (4.11), en faisant correspondre au cas d'une K du type (4.11) l'ensemble $U_r\cap K$ à l'intervalle

(5) Je dois à M. M. Bognár cette simple construction des voisinages Y_r; ma construction primitive était bien plus compliquée.

$(-\infty, 0)$, et de la demi-droite $[0, +\infty)$ sur K si cette composante est du type (4.14) ou (4.15). Désignons ensuite par S la réunion de l'ensemble R, des composantes K du type (4.7), des extrémités des K du type (4.8), de deux points quelconques de chacune des K du type (4.9), des points $g_K(n)$, où K est du type (4.10) et n parcourt les nombres entiers, des points $g_K(n)$, où K est du type (4.11) et n parcourt les entiers positifs, d'un point de $K-\overline{U}_r$ pour chacune des K du type (4.13), des points $g_K(n)$, où K est du type (4.14) et n parcourt les entiers non-négatifs, enfin des points $g_K(0)$ pour les K du type (4.15). On constate aisément que chaque composante Q de l'ensemble $G-S$ est homéomorphe à la droite numérique et que $\overline{Q}-Q$ se compose de deux points distincts de S. Désignons par A l'ensemble de ces composantes Q et posons $e(Q)=\overline{Q}-Q$ pour $Q \in A$. De cette façon, on a défini un graphe (S, A, e) et nous allons montrer que G est homéomorphe à un représentant de ce graphe.

Considérons à cet effet une composante $Q \in A$ telle que $e(Q)=\{r_1, r_2\}\subset R$, ce qui n'est possible que si Q coïncide avec une composante K du type (4.12), et désignons par h_Q un homéomorphisme de la droite numérique sur Q de manière que l'on ait, pour $n=1, 2, \ldots$, $Q\cap U_{r_1}^n=h_Q\big((-\infty, -n)\big)$ et $Q\cap U_{r_2}^n=h_Q\big((n, +\infty)\big)$, ceci étant possible en conséquence des conditions (4.16) à (4.18). D'autre part, si $Q \in A$ et $e(Q)=\{r, s\}$, $r \in R$, $s \in S-R$, désignons par h_Q un homéomorphisme de la droite numérique sur Q, tel que l'on ait, pour $n=1, 2, \ldots$, $U_r^n \cap Q=h_Q\big((n, +\infty)\big)$, ceci étant possible grâce aux conditions (4.16) à (4.18) et à la construction de l'ensemble S. Enfin, si $Q \in A$ et $e(Q)\subset S-R$, nous désignons par h_Q un homéomorphisme quelconque de la droite numérique sur Q. On peut aisément constater que l'application qui coïncide sur S avec l'application identique et qui fait correspondre au couple (Q, x), où $Q \in A$ et x est un nombre réel, le point $h_Q(x)$, constitue un homéomorphisme du représentant du graphe (S, A, e), correspondant à un choix convenable des extrémités positives, sur l'espace G. C.q.f.d.

5. On peut montrer sans difficulté que les conditions (4.1) à (4.4) sont complètement indépendantes en ce sens que chacune d'elles peut ne pas être satisfaite tandis que les autres le sont. En effet, considérons les espaces topologiques suivants:

E_1: l'ensemble des points (x, y), où x est un nombre réel quelconque et $0 \leqslant y \leqslant 1$; on munit d'abord E_1 d'un ordre en posant $(x, y)<(x', y')$ si $x<x'$ et si $x=x'$ et $y<y'$, et puis de la topologie déduite de cet ordre;

E_2: l'ensemble

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, y\right):\ n=1, 2, \ldots, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\} \cup \{(0, 0)\}$$

du plan euclidien;

E_3: l'ensemble

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, y\right):\ n = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{n}\right\} \cup \{(x, 0):\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

du plan euclidien;

E_4: l'ensemble

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y):\ 0 \leqslant x \leqslant 1/n^2, y = nx\}$$

du plan euclidien.

L'espace E_i $(i = 1, \ldots, 4)$ satisfait aux conditions (4.1)-(4.4), excepté (4.i).

Remarquons encore que les représentants des graphes finis et connexes, appelés *courbes ordinaires* par K. Menger, ont été caractérisés topologiquement par cet auteur de la façon suivante (voir [5], p. 304 et [6], p. 266; cf. aussi [2], p. 325, théorème V):

Pour que l'espace G soit homéomorphe à un représentant d'un graphe fini et connexe, il faut et il suffit que G soit un continu métrisable, ne contenant que des points d'ordre fini et un nombre fini de points de ramification.

Travaux cités

[1] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris 1958.

[2] Á. Császár et J. Czipszer, Sur les courbes irramifiées, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9 (1958), p. 315-328.

[3] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

[4] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952.

[5] K. Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Annalen 95 (1926), p. 277-306.

[6] — *Kurventheorie*, Leipzig und Berlin 1932.

[7] J. Nagata, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ. Ser. A Math. 1 (1950), p. 93-100.

[8] Ю. М. Смирнов, *О метризации топологических пространств*, Усп. Мат. Наук 6 (46), (1951), p. 100-111.

Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1960

Some remarks on Borsuk generalized cohomotopy groups *

by

J. W. Jaworowski (Warszawa)

1. In [3] K. Borsuk introduced the concept of generalized cohomotopy groups. We recall some of the basic definitions.

Let X be a topological space. A closed subset A_k of X is called a *k-skeleton* of X, if $\dim A_k \leqslant k$ and if every closed subset of X of dimension $\leqslant k$ can be continuously deformed in the space X into A_k.

If X is a polyhedron and K is a triangulation of X (or, more generally, if X is a CW-complex given in a cellular decomposition K), then the k-skeleton K^m of the complex K is also an m-skeleton in the sense of Borsuk of the space X. Borsuk also showed that if X is a compact ANR-space satisfying the so-called condition (Δ), then there exists a k-skeleton of X for every $k = 0, 1, \ldots$ (see [2]).

Let S be an ANR-space and let A be a closed subset of the space X. Consider the set S^X of all continuous mappings of X into S and denote by $S^{A\subset X}$ the subset of S^A consisting of all mappings $f\colon A \to S$ which are extendable over X.

If $f \in S^X$ then we denote by $[f]$ the homotopy class of the mapping f, by $[S^X]$ the set of homotopy classes of the mappings $f \in S^X$, and by $[S^{A\subset X}]$ the set of homotopy classes of mappings $f \in S^{A\subset X}$. By the homotopy extension theorem, $[S^{A\subset X}]$ is a subset of $[S^A]$.

If S is the n-sphere S^n and $\dim A < 2n-1$, then a group operation in $[S^A]$ can be defined and, under this operation, $[S^A]$ becomes an Abelian group which is called the n-th *cohomotopy group* $\pi^n(A)$ of A (see [5]).

Let $\pi^n(A \subset X)$ denote the subgroup of $\pi^n(A)$ generated by the elements of $[S^{A\subset X}]$. If $A = X$ and $\dim X < 2n-1$, then $\pi^n(A \subset X) = \pi^n(X)$.

Borsuk showed that if A and B are two k-skeletons of X and $k < 2n-1$, then the groups $\pi^n(A \subset X)$ and $\pi^n(B \subset X)$ are isomorphic. Hence if $k < 2n-1$ and if the space X possesses a k-skeleton, then an abstract group $\pi^n_k(X)$, isomorphic to $\pi^n(A \subset X)$, can be defined. If $\dim X = k$, then $\pi^n_k(X) = \pi^n(X)$. In particular, if X is a polyhedron (or, more generally,

* This work was done when the author was supported by the National Science Foundation under NSF—G14779.