icm

Sur la cohomologie des cochaînes singulières invariantes sur un groupe topologique compact et connexe

par

V. Poénaru (Bucuresti)

Dans ce qui s'ensuit nous allons donner un analogue du théorème classique d'Élie Cartan ([1], [2], p. 276-279), qui affirme que la cohomologie d'un groupe de Lie compact et connexe peut être calculée à l'aide seulement des formes différentielles invariantes.

C'est ce théorème qui est à la base de la théorie de cohomologie des algèbres de Lie de C. Chevalley et S. Eilenberg ([3]).

Un analogue Alexander-Čech du théorème de Cartan a été déjà donné en 1951 par S. T. Hu ([4]).

Nous allons donner l'analogue singulier.

Les moyens utilisés sont les raisonnements mêmes de Cartan et la théorie de cohomologie de J. Leray.

1. Soit G un groupe topologique compact, connexe par arcs. Soient

$$C_*(G) = \sum C_n(G)\,,$$
$$C^*(G) = \sum C^n(G)$$

respectivement les espaces vectoriels des chaînes et cochaînes singulières de G à coefficients réels. Soit

$$_1C^*(G) = \sum \big({_1C^n}(G)\big)$$

l'algèbre des cochaînes singulières modulo les cochaînes singulières à support $\emptyset$ (pour la définition des supports en cohomologie singulière voir [5] exp. VIII).

Nous désignerons par (σ, a) l'accouplement dual de C_n et C^n ($a \in C_n$, $\sigma \in C^n$). Le groupe G opère d'une façon tout à fait naturelle, à gauche et à droite sur $C_*(G)$. Ceci permet de définir par dualité les opérations de G dans $C^*(G)$ (et $_1C^*$):

$$(x\cdot\sigma, a) = (\sigma, a\cdot x)\,,$$
$$(\sigma\cdot x, a) = (\sigma, x\cdot a)\,,$$

FO 99.0/61

où
$$x \in G, \quad \sigma \in C^n(G), \quad a \in C_n(G).$$

On a évidemment:
$$\delta(x\cdot\sigma) = x\cdot\delta\sigma,$$
$$\delta(\sigma\cdot x) = \delta\sigma\cdot x,$$
où δ désigne l'opération de cobord.

On peut donc définir d'une façon immédiate des cochaînes invariantes à droite, à gauche ou invariantes (dans les deux sens).

On vérifie aisément que l'ensemble des cochaînes invariantes (respectivement invariantes à gauche, respectivement invariantes à droite) est une algèbre différentielle graduée:
$$\bar{C}(G) = \sum \bar{C}^n(G)$$
ou, si l'on factorise par les cochaînes de support vide: ${}_1\bar{C}(G)$. Dans tout ce qui s'ensuit nous allons considérer seulement les cochaînes invariantes à gauche, c'est-à-dire telles que:
$$x\cdot\sigma = \sigma \quad \text{quel que soit} \quad x \in G.$$

Mais la même démonstration peut être faite pour les cochaînes (invariantes à droite), invariantes.

Au commencement du paragraphe ultérieur nous allons définir une sousalgèbre différentielle graduée de $C^*(G)$, l'algèbre des cochaînes singulières continues: $\mathcal{C}^*(G)$.

(D'une manière intuitive on pourrait dire que les cochaînes de $\mathcal{C}^*$ sont les cochaînes qui ont la propriété que leur valeur sur un simplexe singulier change très peu si le simplexe est legérement modifié — bien entendu tout cela sera précisé). On pourra donc introduire immédiatement l'algèbre des cochaînes continues invariantes:
$$\bar{\mathcal{C}}(G) = \bar{C}(G) \cap \mathcal{C}^*(G).$$

Nous allons prouver le théorème suivant:

THÉORÈME A. *Soit G un groupe topologique compact, connexe par arcs et localement contractible (c'est-à-dire tel que tout point possède un système fondamental de voisinages contractibles). Alors:*

(a) *L'homomorphisme d'inclusion:*
$$H(\mathcal{C}^*) \to H(C^*)$$
est un bimorphisme.

(b) *L'homomorphisme d'inclusion:*
$$H(\bar{\mathcal{C}}) \to H(\mathcal{C}^*)$$
est un bimorphisme.

Le point (a) nous dit que „cohomologie singulière“ et „cohomologie singulière à cochaînes continues“ coïncident.

Le point (b) nous dit que la cohomologie singulière continue peut être obtenue seulement à l'aide des cochaînes invariantes, donc dépend seulement du groupe local de G.

C'est bien l'analogue singulier du théorème de E. Cartan.

2. Les cochaînes continues. Comme on le sait bien, un simplexe singulier $a \in C_n(G)$ est une fonction continue $a(t_0, \dots, t_n)$ à valeurs dans G, $\{t_i\}$ étant les nombres réels $t_i \geqslant 0$, $\sum t_i = 1$. Nous dirons que $\sigma \in C^n(G)$ est uniformément continue si à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un voisinage V de e (unité de G) tel que si $a, a' \in C_n(G)$ et si
$$[a(t_0, \dots, t_n)]^{-1}\cdot a'(t_0, \dots, t_n) \in V$$
alors:
$$|(\sigma, a) - (\sigma, a')| < \varepsilon.$$

De même nous dirons que σ est bornée, si quel que soit le simplexe singulier à n dimensions a:
$$|(\sigma, a)| < M.$$

On vérifie aisément que l'ensemble des cochaînes uniformément continues et bornées est une algèbre différentielle graduée, que nous désignerons par
$$\mathcal{C}^*(G) = \sum \mathcal{C}^n(G).$$

Par abus de langage nous appelerons une cochaîne uniformément continue et bornée, „continue“ tout court.

On peut factoriser par les cochaînes de support vide et obtenir une algèbre différentielle à supports, dans laquelle G opère:
$${}_1\mathcal{C}^*(G) = \sum \big({}_1\mathcal{C}^n(G)\big).$$

LEMME 1. *${}_1\mathcal{C}^*$ est une couverture fine.*

Démonstration. Il suffit de prouver que ${}_1\mathcal{C}^*$ est fine et qu'elle a la propriété de trivialité locale.

(a) *${}_1\mathcal{C}^*$ est fine.* Soit $\sigma \in C^n(G)$ et $f(x)$ une fonction continue $G \to R$. Nous allons définir $f(x)\cdot\sigma$ par
$$\big(f(x)\cdot\sigma, a(t_0, \dots, t_n)\big) = f\big(a(1, 0, \dots, 0)\big)\cdot(\sigma, a).$$

L'opération ainsi définie est bilinéaire et satisfait:
$$\sup\big(f(x)\cdot\sigma\big) \subset \sup f(x) \cap \sup\sigma$$
(où par „sup“ on désigne le support).

D'autre part, si $\sigma \in \mathcal{C}^n$, alors $f(x)\cdot\sigma \in \mathcal{C}^n$. Donc la multiplication par $f(x)$ peut être définie dans ${}_1\mathcal{C}^n$. Alors, en considérant une partition continue de 1, subordonnée à un recouvrement ouvert fini quelconque de G, on voit aisément que ${}_1\mathcal{C}^*$ est un complexe [1] fin.

(b) ${}_1\mathcal{C}^*$ *est localement trivial.* Soit $y \in G$ et V un voisinage de y, contractible.

V étant contractible, on définit d'une façon classique un opérateur d'homotopie k opérant dans $C_*(V)$ tel que

$$kC_n(V) \subset C_{n+1}(V)$$

et

$$a = \partial k a + k \partial a ,$$

si $\dim a \geqslant 1$, etc. On voit sans peine qu'à tout voisinage W de e on peut associer un autre voisinage U tel que, dès que

$$\big(a(t_0, \ldots, t_n)\big)^{-1}\cdot a'(t_0, \ldots, t_n) \in U$$

(pour tout système $\{t_i\}$) on ait aussi:

$$\big(ka(t_0, \ldots, t_n)\big)^{-1}\cdot ka'(t_0, \ldots, t_n) \in W .$$

On y déduit que le transposé de k, k^*, défini par:

$$(k^*\sigma\cdot a) = (\sigma, ka)$$

opère dans l'ensemble $\mathcal{C}^*$.

Il en résulte, par des raisonnements simples, la trivialité locale de ${}_1\mathcal{C}^*$.

La démonstration du lemme 1 est ainsi terminée.

Lemme 2. *Soient C une couverture fine sur l'espace localement compacte X et C' une souscouverture fine de C.*

Alors l'homomorphisme d'inclusion

$$H(C') \to H(C)$$

est un bimorphisme.

Le lemme appartient à I. Fary ([6], [7]).

Considérons maintenant l'algèbre différentielle graduée:

$$\overline{\mathcal{C}}(G) = \overline{C}(G) \cap \mathcal{C}^*(G) .$$

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} C^*(G) & \xleftarrow{i_1} & \mathcal{C}^*(G) \\ {\scriptstyle i_4}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_2} \\ \overline{C}(G) & \xleftarrow{i_3} & \overline{\mathcal{C}}(G) \end{array}$$

[1] Le terme „complexe" est pris dans le sens de [9].

Le lemme précédent nous assure que l'homomorphisme dérivé de:

$${}_1\mathcal{C}^* \to {}_1C^*$$

est un bimorphisme. Mais il sera plus utile dans la suite de considérer non pas directement les couvertures ${}_1\mathcal{C}^*, \ldots$ mais les complexes à supports $\mathcal{C}^*, \ldots$

Nous allons donc prouver le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit j l'homomorphisme naturel*

$$j\colon\ \mathcal{C}^* \to C^*.$$

L'homomorphisme dérivé

$$j_*\colon\ H(\mathcal{C}^*) \to H(C^*)$$

est un bimorphisme.

Démonstration. On considère le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} {}_1\mathcal{C}^* & \xrightarrow{l} & {}_1C^* \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ \mathcal{C}^* & \xrightarrow{j} & C^* \end{array}$$

Passons aux homomorphismes dérivés.

Le lemme 3 nous assure que l_* est un bimorphisme. Il est classique que k_* est un bimorphisme. (En effet, la démonstration se trouve dans [5] exp. VIII).

Pour prouver que j_* est un bimorphisme il suffit donc de prouver que i_* est un bimorphisme. Pour celà, on peut adopter le raisonnement de [5] exp. VIII.

Considérons un recouvrement ouvert ϑ de G (que nous pouvons, bien entendu, toujours supposer fini, vu que G est compact). Nous désignerons par $C_n(\vartheta)$ les chaînes „petites d'ordre ϑ", par $C^n(\vartheta)$ les cochaînes qui s'annulent sur $C_n(\vartheta)$ etc. On passe de $\mathcal{C}^*$ à ${}_1\mathcal{C}^*$ par passage au quotient modulo $\bigcup \mathcal{C}^*(\vartheta)$ (somme pour tous ϑ possibles). Pour prouver que i_* est un bimorphisme il suffit donc de prouver que $H\big(\mathcal{C}^*(\vartheta)\big)$ pour chaque ϑ est nul. Ceci revient, comme on le sait, à prouver que l'homomorphisme dérivé de χ: $\mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*/\mathcal{C}^*(\vartheta)$ est un bimorphisme. $\mathcal{C}^*/\mathcal{C}^*(\vartheta)$ peut être assimilé à l'ensemble des cochaînes continues sur $C_n(V)$.

Comme on le sait bien, il existe un opérateur d'homotopie qui est un projecteur:

$$h\colon\ C_n(G) \to C_n(\vartheta)$$

(voir [5], ex. VII-IX). On voit aisément, en utilisant la définition explicite de cet opérateur, qu'il a la propriété suivante: Soit $a \in C_n(G)$, simplexe singulier.

Il existe un voisinage W de e, dépendant du recouvrement ϑ, tel que: dès que $a' \in C_n(G)$ est tel que:

$$\big(a(t_0, \ldots, t_n)\big)^{-1}\cdot a'(t_0, \ldots, t_n) \in W ,$$

on a un isomorphisme simplicial φ, entre les complexes ka, ka'; k est l'opérateur qui a la propriété:

$$\partial k + k\partial = 1 - h .$$

(Au fait, ka est une chaîne mais si $ka = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i a_i$ nous appelerons „complexe“ ka, le complexe engendré par les a_i et leures faces.) φ jouit des propriétés suivantes:

$\varphi(ha) = ha'$;

les simplexes b et $\varphi(b)$ appartiennent à un même ensemble du recouvrement ϑ;

il existe un voisinage W' de e tel que

$$\big(a(t_0, \ldots, t_n)\big)^{-1} \cdot \varphi\big(a(t_0, \ldots, t_n)\big) \in W' ;$$

si Ω est un voisinage de e donné arbitrairement on peut toujours trouver un autre voisinage de e, ω ayant les propriétés de W, tel que $\omega' = \Omega$. (Le recouvrement ϑ étant fixé à l'avance.)

Tout ceci nous montre que k^* et h^*, les transposés de k, h opérent dans $\mathcal{C}^*$. On en déduit que l'homomorphisme dérivé de χ est un bimorphisme.

Par conséquent i_* est un bimorphisme, donc j_* est un bimorphisme. Le lemme 3 est démontré.

Les lemmes précédents prouvent bien la première partie du théorème A.

Pour que la démonstration soit complète il suffit donc de prouver le lemme suivant:

LEMME 4. (I) *Tout cocycle de $\mathcal{C}^*$ est cohomologue à un cocycle de $\overline{\mathcal{C}}$.*
(II) *Si un cocycle de $\overline{\mathcal{C}}$ est cobord dans $\mathcal{C}^*$ il l'est aussi dans $\overline{\mathcal{C}}$.*

Dans ce qui s'ensuit nous allons prouver ce lemme.

3. Construction d'une intégrale de fonction à valeurs cochaînes. On peut facilement introduire une distance dans $\mathcal{C}^*$ par

$$\|\sigma\| = \sup_a |(\sigma, a)| ,$$

où a parcourt l'ensemble des simplexes singuliers. $\mathcal{C}^*$ devient donc un espace normé (pas nécessairement complet).

Nous dirons qu'une famille de cochaînes $\{\sigma_i\}$ est également continue si quel que soit $\varepsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V de $\mathcal{C}$, tel que:

$$|(\sigma_i, a - a')| < \varepsilon$$

dès que

$$\big(a(t_0, \ldots, t_n)\big)^{-1} \cdot a'(t_0, \ldots, t_n) \in V .$$

La fonction F_σ: $G \to \mathcal{C}^*$ définie par: $x \to x \cdot \sigma$, $\sigma \in \mathcal{C}^*(G)$ est continue dans le sens de la définition précédente et l'ensemble de ses valeurs est également continu.

LEMME 5. *Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ une suite de $\sigma_i \in \mathcal{C}^p$, convergente et également continue. Dans ces conditions, la limite $\sigma \in \mathcal{C}^p$.*

Démonstration. La limite d'une suite $\{\sigma_i\}$ convergente existe toujours, mais elle n'est pas nécessairement dans $\mathcal{C}^*$. Si $\{\sigma_i\}$ est également continue, on écrit:

$$|(\sigma, a - a')| \leqslant |(\sigma - \sigma_n, a)| + |(\sigma_n, a - a')| + |(\sigma_n - \sigma, a')| \quad \text{etc.}$$

Soit maintenant une fonction $F(x)$: $G \to \mathcal{C}^n$, continue, telle que la famille $\{F(x)\}$ soit également continue.

Soit $d\mu(x)$ la mesure de Haar [10] de G, choisie de telle façon que

$$\int_G d\mu(x) = 1 .$$

Nous allons définir une intégrale $\int F(x)\, d\mu(x)$.

Soit un recouvrement fini, ouvert de G: $\{V_i\}$ et $\{f_i\}$ une partition continue de 1, subordonnée au recouvrement. Posons

$$\sum \big(\{V_i\}, \{f_i\}, \{x_i\}; F(x)\big) = \sum_i F(x_i) \int f_i(x)\, d\mu(x) ,$$

où $x_i \in V_i$.

Nous allons brièvement indiquer quelques propriétés des sommes ainsi introduites:

(a) *La famille $\{\sum(\{V_i\}, \{f_i\}, \{x_i\}; F(x))\}$ est également continue.*

En effet, soient a, $a' \in C_n(G)$, on a:

$$\Big|\Big(\sum \big(\{V_i\}, \{f_i\}, \{x_i\}; F(x)\big), a - a'\Big)\Big| \leqslant \sum_i \big|\big(F(x_i), a - a'\big)\big| \cdot \int f_i(x)\, d\mu(x)$$
$$\leqslant \max_i \big|\big(F(x_i), a - a'\big)\big| \quad \text{etc.}$$

(b) *La famille $\sum$ est uniformément bornée.*

(c) *À tout $\varepsilon > 0$ correspond un voisinage V de e tel que si chaque $V_1, \ldots, V_n$; $W_1, \ldots, W_m$ „est plus petit que V“:*

$$\Big\| \sum \big(\{V_i\}, \{f_i\}, \{x_i\}; F(x)\big) - \sum \big(\{W_j\}, \{\varphi_j\}, \{y_j\}; F(x)\big) \Big\| < \varepsilon .$$

Démonstration. Soient tout d'abord deux recouvrements ouverts de G, et des partitions de 1 associées: (V_i, f_i), (W_j, φ_j) $(i = 1, \ldots, n;$

$j=1,\ldots,m$). Nous dirons que le système (V_i, f_i) est „fortement subordonné“ au système (W_j, φ_j) s'il existe une partition de $(1,\ldots,n)$:

$$k(1,1),\ldots,k(1,i(1));\ k(2,1),\ldots,k(2,i(2));\ \ldots$$

telle que:

$$V_{k(i,l)}\subset W_i\,,\qquad f_{k(1,1)}+f_{k(1,2)}+\ldots+f_{k(1,i(1))}=\varphi_1\qquad \text{etc.}$$

Nous allons montrer tout d'abord qu'à tout $\varepsilon>0$ correspond un voisinage U de C tel que si chaque W_j est „plus petit que U“ et si (V_i, f_i) est fortement subordonné à (W_j, φ_j):

$$\Big\|\sum(\{V_i\},\{f_i\},\{x_i\};F(x))-\sum(\{W_j\},\{\varphi_j\},\{y_j\};F(x))\Big\|<\varepsilon\,.$$

En effet

$$\begin{aligned}\Big\|\sum(\{V_i\},\ldots)-\sum(\{W_j\},\ldots)\Big\| &\leqslant \sum_j\Big\|F(y_j)\int\varphi_j(x)\,d\mu(x)-\sum_i F(x_{k(j,i)})\int f_{k(j,i)}(x)\,d\mu(x)\Big\|\\ &\leqslant \max_{i,j}\|F(y_j)-F(x_{k(j,i)})\|\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Soient maintenant deux systèmes (V_i, f_i), (W_j, φ_j) indépendants. Je dis qu'on peut construire un troisième (U_l, ψ_l) qui soit strictement subordonné à tous les deux. En effet, il suffit de considérer $(V_i\cap W_j, f_i\cdot\varphi_j)$.

L'affirmation (c) est maintenant complétement prouvée.

Le lemme 5, les observations (a), (c) permettent maintenant de construire d'une façon tout à fait standard

$$\int F(x)\,d\mu(x)=\lim\sum(\{V_i\},\{f_i\},\{x_i\};F(x))\,.$$

On vérifie aisément que cette intégrale a des propriétés de linéarité habituelles. De plus si $F(x)=\varrho$ (constante):

$$\int F(x)\,d\mu(x)=\varrho\,.$$

4. La démonstration du théorème A. Retournons maintenant aux cochaînes. Soit $\sigma\in\mathcal{C}^n(G)$. Il est aisé à vérifier que la fonction $F(x)$: $G\to\mathcal{C}^*$ définie par:

$$x\to x\cdot\sigma$$

a toutes les propriétés requises pour la construction de $\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)$.

LEMME 6. *Quel que soit $\sigma\in\mathcal{C}^*(G)$, $\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)$ est invariante.*

Démonstration. On observe que si $\|\sigma-\theta\|<\varepsilon$, $\|x\cdot\sigma-x\cdot\theta\|<\varepsilon$.

Soit $\varepsilon>0$; il existe un voisinage V de (e) et un recouvrement (V_i, f_i) „plus petit que V“ tel que

$$\Big\|\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)-\sum_i x_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)\Big\|<\varepsilon\,.$$

Donc

$$\Big\|y\cdot\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)-\sum_i yx_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)\Big\|<\varepsilon\,.$$

Montrons que si V est assez petit,

$$\Big\|\sum_i x_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)-\sum_i yx_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)\Big\|$$

est aussi petit que l'on veut. En effet $\mu(x)$ étant invariante:

$$\int f_i(yx)\,d\mu(x)=\int f_i(x)\,d\mu(x)$$

donc

$$\sum_i yx_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)=\sum(\{yV_i\},\{yx_i\},\{f(yx)\};x\cdot\sigma)\,.$$

En appliquant l'observation (c) du point précédant on a q.e.d.

LEMME 7. *Si $\sigma\in\mathcal{C}^n(G)$ est un cocycle, σ et $\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)$ sont cohomologues.* (C'est le lemme 4 (I)).

Démonstration. $(x\cdot\sigma, a)=(\sigma, a\cdot x)$. Supposons que a est un cycle. G étant connexe par arcs, a et $a\cdot x$ sont homologues. Donc

$$(x\cdot\sigma, a)=(\sigma, a)\,.$$

Considérons deux fonctions

$$F_1(x):\ x\to x\cdot\sigma\,,\qquad F_2(x):\ x\to\sigma\,.$$

Nous allons prouver que

$$\Big(\int x\cdot\sigma\,d\mu(x), a\Big)=(\sigma, a)\,.\tag{$*$}$$

En effet, soient les deux intégrales

$$\int F_1(x)\,d\mu(x)=\int x\cdot\sigma\,d\mu(x)\,,$$

$$\int F_2(x)\,d\mu(x)=\sigma$$

à ε-près elles sont approchées par

$$\sum_i x_i\cdot\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)\,,\qquad \sum_i\sigma\int f_i(x)\,d\mu(x)\,.$$

On a

$$\left(\sum_i x_i \cdot \sigma \int f_i(x)\, d\mu(x),\, a\right) = \left(\sum_i \sigma \int f_i(x)\, d\mu(x),\, a\right)$$

donc (*) résulte aisément.

Par un procédé analogue on voit que $\int x \cdot \sigma d\mu(x)$ est un cocycle. Il résulte que

$$\int x \cdot \sigma d\mu(x) - \sigma$$

est cohomologue à 0 dans $C^n(G)$, donc, vu le lemme 3, dans $C^n(G)$.

LEMME 7. *Soit $\sigma \in \overline{C}^n$ qui est cohomologue à 0 dans C^*, alors elle est cohomologue à 0 dans $\overline{C}$* (c'est le lemme 4 (II)).

Démonstration. On a

$$\sigma = \delta\theta, \quad \theta \in C^*$$
$$x \cdot \sigma = \sigma = x \cdot \delta\theta = \delta(x \cdot \theta).$$

Pour que la démonstration soit complète, il suffit de prouver que

$$\delta \int F(x)\, d\mu(x) = \int \delta F(x)\, d\mu(x).$$

On observe en effet que si $\sigma, \sigma' \in C^n$ et $\|\sigma - \sigma'\| < \varepsilon$ alors $\|\delta(\sigma - \sigma')\| < n\varepsilon$. D'autre part

$$\delta \sum F(x_i) \int f_i(x)\, d\mu(x) = \sum \delta F(x_i) \int f_i(x)\, d\mu(x)$$

d'où par un raisonnement facile, q. e. d.

Le théorème A est ainsi complétement prouvé.

5. Le cas des espaces homogènes. Par des méthodes analogues on peut prouver le théorème suivant:

THÉORÈME B. *Soit G un groupe topologique compact et connexe par arcs. Soit l'espace homogène G/H, tel que chaque point possède un voisinage contractible. Alors la cohomologie singulière de G/H coïncide avec la cohomologie des cochaînes singulières invariantes (de G/H).*

6. Cas des cochaînes de Čech-Alexander. Nous allons très brièvement passer en revue le cas de la cohomologie de Čech-Alexander (voir [5], exp. VI). Comme nous l'avons déjà indiqué ce cas a été déjà résolu par S. T.-Hu ([4]).

Tout de même, nous considérons qu'il n'est pas tout à fait inutile d'indiquer les modifications que l'on doit faire à ce qui précède pour obtenir son théorème:

THÉORÈME C. *Soit G un groupe topologique connexe et compact. L'anneau de cohomologie de cochaînes de Čech-Alexander invariantes de G coïncide avec l'anneau de cohomologie de Čech-Alexander de G.*

Démonstration. On ramène tout comme précédemment le cas général aux cochaînes continues, qui dans ce cas automatiquement uniformément continues. On construit très facilement une intégrale analogue à celle précédamment construite et l'on prouve que

$$\int x \cdot \sigma d\mu(x)$$

est invariante. Nous appelons $C_n(G)$ l'espace vectoriel réel engendré par les systèmes ordonnés de $n+1$ points de G. Si $a = (x_0, \ldots, x_n)$ nous écrirons (σ, a) au lieu de $\sigma(x_0, \ldots, x_n)$.

Soit σ un cocycle. Donc $\delta\sigma$ a le support nul, donc il existe un recouvrement ouvert fini de G: $V_1, \ldots, V_h$ tel que

$$(\delta\sigma, a) = 0 \quad \text{dès que} \quad a \subset V_i$$

(voir [5], exp. VI).

On a: $(x \cdot \sigma, a) = (\sigma, a \cdot x)$

Nous devons montrer que

$$(*) \qquad (\sigma, a \cdot x) = (\sigma, a).$$

Or, G étant connexe, il existe une $b \in C_{n+1}(G)$ dont tous les „simplexes" sont „petits d'ordre" $(V_1, \ldots, V_h)$ telle que

$$\partial b = a \cdot x - a,$$

on a:

$$(\sigma, \partial b) = (\delta\sigma, b) = 0$$

car $\delta\sigma$ est nulle sur toute chaîne petite d'ordre $(V_1, \ldots, V_h)$. Il s'ensuit que (*) est vrai, donc

$$\left(\int x \cdot \sigma d\mu(x),\, a\right) = (\sigma, a).$$

Nous avons donc la situation suivante: On a une cochaîne ψ, telle que

$$(\psi, a) = 0$$

dés que a est un cycle petit d'ordre $(V_1, \ldots, V_h)$. Soient C_V^n les chaînes petites d'ordre $(V_1, \ldots, V_h)$;

$$\delta C_V^n \subset C_V^{n-1}.$$

On peut définire

$$(\psi', \partial a) = (\psi, a);$$

ψ' peut être prolongée à C_V^{n-1}.

Vu la relation que nous avons écrite

$$(\delta\psi' - \psi, a) = 0$$

donc $\delta\psi' - \psi$ est nulle sur toute chaîne petite d'ordre V, donc c'est une cochaîne à support 0.

Il s'ensuit que σ et $\int x \cdot \sigma d\mu(x)$ sont cohomologues, etc.

Travaux cités

[1] É. Cartan, *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces*, Ann. Soc. Polon. de Math. 8 (1929), p. 181-225.

[2] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton 1946.

[3] C. Chevally, and S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), p. 85-124.

[4] Sze-Tsen Hu, *Cohomology rings of compact connected groups and their homogenous spaces*, Annals of Math. 55 (1952), p. 391-419.

[5] Séminaire Henri Cartan, *Topologie algébrique* (année 1948-1949).

[6] I. Fáry, *Notion axiomatique de l'algèbre des cochaînes dans la théorie de J. Leray*, Bull. Soc. Math. de France 82 (1954), p. 97-135.

[7] M. M. Postnikov, *La théorie de l'homologie des variétés différentiables et ses généralisations*, Usp. Mat. Nauk. XI, No. 1 (1956), p. 115-166 (en russe).

[8] J. Leray, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue*, Journ. Math. pures et appliq. 29 (1950), p. 1-139.

[9] A. Borel, *Cohomologie des espaces localement compacts d'après J. Leray*, Zürich 1957.

[10] Lynn H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, New York 1953.

Reçu par la Rédaction le 10. 5. 1960

Metric property of linear sets

by

A. S. Besicovitch (Philadelphia, Penn.)

DEFINITION. A decreasing sequence $\{h_i\}$ of positive numbers is called a *progression* if there exists a positive integer k such that $h_{i+k}/h_i < \frac{1}{2}$ for every i. Denote by $f(x, a, b)$ the *characteristic function of the interval* (a, b) and write

$$s_j(x) = \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{h_i} f(x, h_i - h_j, h_i)$$

THEOREM 1. *A necessary and sufficient condition for the sequence h_j to be a progression is that the integral $\int_0^{h_1} s_j(x)\,dx$ be bounded.*

We have

$$\int_0^{h_1} s_j(x)\,dx = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_j}\right) h_j .$$

(i) Suppose that there exists an integer $k > 0$ such that for all j

$$\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_j}\right) h_j < \frac{k}{2} .$$

For $j > k$ we have

$$\frac{k}{2} > \left(\frac{1}{h_{j-k}} + \ldots + \frac{1}{h_j}\right) h_j > k\frac{h_j}{h_{j-k}} \qquad \text{or} \qquad \frac{h_j}{h_{j-k}} < \frac{1}{2} .$$

Hence $\{h_j\}$ is a progression.

(ii) Conversely if h_{i+k}/h_i is always $< \frac{1}{2}$ then

$$\int_0^{h_1} s_j\,dx = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_j}\right) h_j < h_j\left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-k}} + \frac{1}{h_{j-2k}} + \ldots\right) +$$
$$+ h_{j-1}\left(\frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_{j-1-k}} + \frac{1}{h_{j-1-2k}} + \ldots\right) +$$
$$+ h_{j-k+1}\left(\frac{1}{h_{j-k+1}} + \frac{1}{h_{j-2k+1}} + \ldots\right) < 2k$$

that is, the integral is bounded, and the theorem is proved.