Sur un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le premier exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement a été donné en 1905 par M. H. Lebesgue [1]) à l'aide de nombres transfinis [2]) La théorie des ensembles (A) de MM. Souslin et Lusin [3]) donne un moyen de définir effectivement une fonction non représentable analytiquement sans utiliser des nombres transfinis [4]).

Le but de cette Note est de donner *un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement* sans faire appel aux nombres transfinis et à la théorie des ensembles (A) et sans utiliser les opérations d'addition et de multiplication à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles ni dans la construction de l'exemple ni dans la démonstration [5]). Toutefois l'idée de notre raisonnement

[1]) *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I.

[2]) L'existence de fonctions non représentables analytiquement résulte du fait que l'ensemble de toutes les fonctions rentrant dans la classification de M. Baire a une puissance inférieure à celle de l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle (ce qu'on démontre à l'aide de nombres transfinis et d'axiome du choix).

[3]) *Comptes Rendus* t. 164, notes du 8 janvier 1917.

[4]) Cf. N. Lusin et W. Sierpiński: *Journ. de Math.* 7e série t. I (1923) p. 53—72.

[5]) Les fonctions représentables analytiquement peuvent être définies sans faire intervenir les nombres transfinis comme éléments du plus petit ensemble de fonctions contenant tous les polynomes et les limites de toutes les suites convergentes de fonctions qu'il contient. Nous nous servirons dans la suite uniquement de cette définition de fonctions représentables analytiquement sans avoir recours à leur classification en $\aleph$ classes.

nous a été suggerée par une analyse détaillée de l'exemple de M. Lebesgue et de la théorie des ensembles (A).

Nous appellerons *fonction* (R) toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle qui peut être définie comme il suit.

Soit S un ensemble donné de systèmes finis de nombres naturels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, satisfaisant à la condition (C) suivante:

(C). Pour toute suite infinie de nombres naturels

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

existe un et un seul indice k tel que le système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ appartient à l'ensemble S.

Nous dirons qu'un système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est *du 1^er^ genre* (par rapport à S), s'il est un segment d'un système de S, c'est-à-dire s'il existe un indice $p > k$ et une suite des nombres naturels n_{k+1}, $n_{k+2}, \ldots, n_p$, tels que le système $(n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots, n_p)$ appartient à S.

Supposons maintenant qu'à tout système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de S correspond un polynome à coefficients rationnels $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x)$. Les fonctions $f_{n_1 n_2, \ldots, n_k}(x)$ sont ainsi définies pour tout système $(n_1, n_2, \ldots n_k)$ de S.

Si, $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant un système donné de nombres naturels, les fonctions $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes définies, posons

$$(1) \qquad f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} f_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}(x).$$

On voit sans peine que les fonctions $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x)$ seront ainsi définies pour tout système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ du 1^er^ genre [1]).

En effet, admettons que pour un système du 1^er^ genre $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ la fonction $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x)$ ne soit pas définie. Il résulte alors de la formule (1) qu'il existe un indice n_{k+1}, tel que la fonction $f_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}}(x)$ n'est pas définie. De même on conclut qu'il existe un indice n_{k+2} tel que la fonction $f_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+2}}(x)$ n'est pas définie, et ainsi de suite.

[1]) Nous n'excluons pas ici des valeurs infinies ($+\infty$ et $-\infty$) pour notres fonctions.

On obtient ainsi une suite infinie d'indices $n_{k+1}, n_{k+2}, \ldots$, telle qu'aucune de fonctions

(2) $$f_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(x), \quad \text{pour} \quad p > k$$

n'est définie. Or, d'après la propriété (C) de l'ensemble S, il existe pour la suite infinie de nombres naturels

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

un indice unique l, tel que le système $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ appartient à S: le système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant de 1^{er} genre, il en résulte que $l > k$. Le système $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ appartenant à S, $f_{n_1, n_2, \ldots, n_l}(x)$ est déterminé comme un polynome à coefficients rationnels, contrairement à la conclusion établie plus haut qu'aucune de fonctions (2) n'est définie.

Remarquons que le même raisonnement prouve que les fonctions $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x)$ sont des fonctions de Baire pour tout système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ du 1^{er} genre.

Il résulte sans peine de la propriété (C) de l'ensemble S et de la définition des systèmes du 1^{er} genre que, n étant un nombre naturel donné quelconque, le système (n) (contenant un seul terme, n) appartient à S ou bien est du 1^{er} genre. Donc les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes définies. Posons

(3) $$f(x) = \overline{\lim_{n=\infty}} f_n(x);$$

on voit sans peine que ce sera une fonction de Baire. La fonction $f(x)$ est donc définie par l'ensemble S et par une loi qui fait correspondre à tout système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de S un polynome $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(x)$ à coefficients rationnels Toute fonction qui peut être ainsi obtenue sera dite *fonction* (R).

Toute fonction (R) est donc une fonction de Baire; or, nous démontrerons maintenant la réciproque. Il suffira évidemment de prouver que 1°: tout polynome à coefficients rationnels est une fonction (R), et que 2°: toute fonction limite de fonctions (R) est une fonction (R).

Soit donc $P(x)$ un polynome a coefficients rationnels. Définissons l'ensemble S comme l'ensemble de tous les systèmes (n) $(n=1, 2, \ldots)$, formés d'un seul nombre naturel, et posons $f_n(x) = P(x)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$: on voit sans peine que l'ensemble S ainsi défini satisfait à la condition (C), et que $P(x)$ est la fonction $f(x)$ correspondante à S, donc une fonction (R).

Or, soit $f^p(x)$ $(p=1, 2, \dots)$ une suite infinie de fonctions (R), et supposons que

(4) $$f(x) = \lim_{n=\infty} f^p(x).$$

Soit, généralement, S^p l'ensemble jouissant de la propriété (C), correspondant à la fonction $f^p(x)$, et soit $f^p_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x)$ le polynome à coefficients rationnels, correspondant au système $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ de S^p.

Désignons par S l'ensemble de tous les systèmes $(p, n_1 . n_2, \dots, n_k)$, où p est un nombre naturel donné quelconque et $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ un système quelconque appartenant à l'ensemble S^p: on voit sans peine que l'ensemble S satisfaira à la condition (C). Or, $(p, n_1, n_2, \dots, n_k)$ étant un système de S, posons $f_{p, n_1, \dots, n_k}(x) = f^p_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x)$; cette convention fait évidemment correspondre un polynome à coefficients rationnels à tout système de l'ensemble S, et on voit aisément que nous aurons

$$f_p(x) = f^p(x), \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3, \dots;$$

il en résulte tout de suite (d'après la définition des fonctions (R)) que la fonction (4) est une fonction (R). ce qui prouve la propriété (2⁰).

Les fonctions (R) coïncident donc avec les fonctions de Baire (pouvant prendre des valeurs infinies). Nous avons ainsi en même temps un moyen de définir toute fonction représentable analytiquement sans utiliser les nombres transfinis.

Soit maintenant

(5) $$P_2(x), P_3(x), P_4(x), \dots$$

une suite infinie formée de tous les polynomes à coefficients rationnels (Elle peut être, comme on sait, définie effectivement).

Or, soit

(6) $$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les systèmes finis de nombres naturels [1]).

Soit maintenant t un nombre irrationnel donné,

$$t = q_0(t) + \frac{1 \,|}{|\, q_1(t)} + \frac{1 \,|}{|\, q_2(t)} + \dots$$

son développement en fraction continue.

[1]) On peut sans peine définir une telle suite, en regardant p. e. le système $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ comme le terme σ_p de la suite (6), dont l'indice p est $2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \dots + 2^{n_1+\dots+n_k-1}$.

Si l'ensemble $S(t)$ de tous les systèmes σ_k, dont les indices k satisfont à l'inégalité

$$q_k(t) > 1,$$

jouit de la propriété (C), posons pour tout système σ_k de $S(t)$:

$$f_{\sigma_k}(x) = P_{q_k(t)}(x)$$

et désignons par $F(x, t)$ la fonction (R) correspondante.

Dans le cas où l'ensemble $S(t)$ ne satisfait pas à la condition (C), et dans le cas où le nombre t est rationnel, posons $F(x, t) = 0$. La fonction $F(x, t)$ est ainsi définie pour toutes les valeurs réelles de x et t (Elle peut d'ailleurs prendre des valeurs infinies).

Or, définissons la fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ comme il suit: posons

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x) = 1, \quad \text{si} \quad F(x, x) = 0, \\ \text{et}\qquad &\varphi(x) = 0, \quad \text{si} \quad F(x, x) \neq 0; \end{aligned}\right.$$

je dis que la fonction $\varphi(x)$ n'est pas une fonction (R).

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction (R) donnée quelconque, S l'ensemble correspondant de systèmes de nombres naturels, satisfaisant à la condition (C).

Soit k un nombre naturel, tel que σ_k est un terme de la suite (6) appartenant à l'ensemble S: il résulte de la définition d'une fonction (R) (correspondant à l'ensemble S) que $f_{\sigma_k}(x)$ est un polynome à coefficients rationnels: c'est donc un terme de la suite (5), soit $f_{\sigma_k}(x) = P_{q_k}(x)$. Les nombres q_k sont ainsi définis pour tout indice k, pour lequel σ_k appartient à S, et nous avons $q_k \geqslant 2$; posons encore $q_k = 1$, si σ_k n'appartient pas à S, et

$$t = \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \frac{1|}{|q_3} + \ldots:$$

on voit sans peine que nous aurons (pour tout x réel)

$$f(x) = F(x, t),$$

donc, d'après (7), toutefois

$$f(t) \neq \varphi(t),$$

ce qui prouve que la fonction $\varphi(x)$ est distincte de la fonction $f(x)$.

La fonction $\varphi(x)$ n'est donc pas une fonction (R): par conséquent c'est une fonction non représentable analytiquement, c. q. f. d.