

Sur les fonctions représentables analytiquement et les ensembles de première catégorie.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

La plupart de théorèmes connus sur les limites des fonctions continues et sur les fonctions ponctuellement discontinues concernent le cas où l'argument x admet comme valeurs les éléments d'un ensemble parfait ou, plus généralement, d'un ensemble qui en aucun point n'est de première catégorie sur lui-même¹⁾ J'étudie dans cette note le cas général où les valeurs de x forment un ensemble arbitraire A de points.

Je prouve d'abord que la limite d'une suite convergente de fonctions continues sur A est une fonction dont les points de discontinuité forment un ensemble de première catégorie sur A . J'appelle, pour abrégé les notations, les fonctions dont les points de discontinuité forment un ensemble de première catégorie sur A „fonctions α -continues sur A “. Si A est un ensemble parfait, la notion de fonction α -continue coïncide avec celle de fonction ponctuellement continue (c'est-à-dire: partout continue). Notre théorème constitue donc une généralisation de cet énoncé: si $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ et les $f_n(x)$ sont des fonctions continues pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x)$ est ponctuellement continue sur le segment 01 .

Outre les fonctions α -continues, j'examine les fonctions qui sont continues lorsqu'on néglige les ensembles de première catégorie. J'appelle ces fonctions β -continues; ainsi une fonction $f(x)$ est

¹⁾ Cf. F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Kap. IX, Leipzig Veit 1914. C. Carathéodory *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig Teubner 1918. H. Hahn: *Theorie der reellen Funktionen I*, Berlin Springer 1921.

β -continue sur A , s'il existe un ensemble B de première catégorie sur A et tel que $f(x)$ est continue sur $A - B$. On est conduit à l'étude de ces fonctions par l'important théorème de Baire, d'après lequel chaque fonction représentable analytiquement est β -continue sur chaque ensemble parfait.

On voit aussitôt que chaque fonction α -continue est β -continue, quel que soit l'ensemble des valeurs de l'argument x . Je prouve, d'autre part, (théor. IV) que la limite d'une suite convergente de fonctions α continues est β -continue et réciproquement: chaque fonction β -continue est limite de fonctions α -continues. On en conclut que chaque fonction de Baire définie sur un segment est limite d'une suite de fonctions ponctuellement discontinues. Il en résulte aussi que la condition citée de Baire, nécessaire pour qu'une fonction soit représentable, peut être énoncée de cette façon: pour chaque ensemble parfait P il existe une suite de fonctions $f_n(x)$ ponctuellement discontinues sur P qui convergent vers $f(x)$.

Le corollaire III se rattache à un problème publié dans les *Fundamenta*¹⁾:

On sait prouver l'existence de fonctions qui ne sont pas limites de fonctions ponctuellement discontinues. Si l'on décompose, par exemple, le segment en deux ensembles A et B qui ne contiennent aucun ensemble parfait et si l'on pose: $f(x) = 1$ aux points de A et $f(x) = 0$ ailleurs, la fonction $f(x)$ n'est pas limite de fonctions ponctuellement discontinues. Or, on ne sait pas jusqu'à présent définir une telle décomposition individuelle, pas plus que l'on ne connaît aucun exemple bien déterminé d'une fonction n'étant pas limite de fonctions ponctuellement discontinues. Le problème mentionné consiste à en donner un exemple effectif.

Je ne donne pas de solution directe de ce problème. Mais je prouve qu'une fonction qui lui réponde ne saurait être représentable analytiquement; et même: elle ne pourrait être β -continue. Or, on n'a pas réussi jusqu'à présent à définir une fonction dont on sache prouver qu'elle n'est pas β -continue.

Dans le N° 3 je m'occupe des images des fonctions $f(x)$ de variable réelle, c'est-à-dire des ensembles de points de la forme $[x, f(x)]$. Je prouve que l'image d'une fonction β -continue est de

¹⁾ Vol. 1, problème 10 des MM. Feldstein et Sierpiński.

première catégorie dans le plan. Donc, en particulier, l'image d'une fonction de Baire est de première catégorie, bien qu'il existe des fonctions dont l'image ne soit pas de première catégorie. Je prouve, d'autre part, que le complémentaire de l'image d'une fonction, quelle qu'elle soit, n'est jamais de première catégorie dans le plan.

1. Un ensemble A est dit non dense dans B , lorsqu'il n'est dense dans aucun ensemble ouvert dans B . Autrement dit: lorsque $\overline{B-AB} \supset B$, \overline{X} désignant l'ensemble composé de X et de ses points limites. Une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses dans B est dite de première catégorie dans B . L'ensemble A est dit de première catégorie sur B au point p , s'il existe un entourage de p (relatif à A) qui est de première catégorie sur B .

Définition. J'appelle un ensemble *normal*, s'il n'est en aucun point de première catégorie sur lui-même.

D'après un théorème de Baire, chaque ensemble fermé est normal. Plus généralement, chaque ensemble G_δ (c'est-à-dire, le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts) est normal. Par contre, les ensembles F_σ (sommés d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés) peuvent être de première catégorie sur eux-mêmes; tel est, par exemple, l'ensemble de nombres rationnels.

A étant un ensemble arbitraire, soit $P(A)$ l'ensemble de tous les points de A où A est de première catégorie sur lui-même. L'ensemble $P(A)$ est de première catégorie sur A ; car on peut déterminer une suite dénombrable d'entourages relatifs à A qui renferment tous les points de $P(A)$ et qui sont tous de première catégorie sur A . Ces entourages étant ouverts dans A , l'ensemble $P(A)$ est également ouvert dans A .

Posons $R(A) = \overline{P(A)} \times A$ et $S(A) = A - R(A)$. Je dis que la formule

$$(1) \quad A = R(A) + S(A)$$

représente une décomposition de A en deux ensembles dont l'un est de première catégorie sur A et l'autre n'est en aucun point de première catégorie sur A . L'ensemble $S(A)$ est donc un ensemble normal ouvert dans A .

En effet, l'ensemble $R(A)$ ne diffère de $P(A)$ que par la fron-

tière (relative à A) de $P(A)$ et, $P(A)$ étant ouvert dans A , sa frontière est non dense dans A ¹⁾. Par conséquent, $R(A)$ est de première catégorie sur A .

Soit, d'autre part, p un point de $S(A)$ et E un entourage de p relatif à $S(A)$. Supposons que E soit de première catégorie sur A . Or, l'ensemble $E + R(A)$ étant un entourage de p relatif à A et $R(A)$ étant de première catégorie sur A , l'ensemble $E + R(A)$ serait aussi de première catégorie sur A . Mais alors l'ensemble A serait au point p de première catégorie sur soi-même et p appartiendrait à $P(A)$, contrairement à l'hypothèse. Il est donc établi que $S(A)$ n'est en aucun point de première catégorie sur A . On en conclut que $S(A)$ est normal et — comme $R(A)$ est par définition fermé dans A — l'ensemble $S(A)$ est ouvert dans A .

2. Les fonctions considérées dans ce N^o seront supposées définies sur un ensemble A de points tout à fait arbitraire. Nous allons généraliser d'abord un lemme qui fut établi par M. Hausdorff²⁾ dans l'hypothèse que A est un ensemble G_δ .

Etant donnée une suite convergente vers $f(x)$ de fonctions $f_n(x)$ continues sur un ensemble A , on dit qu'un point p de A est un point de convergence uniforme lorsqu'il existe pour chaque $\delta > 0$ un entourage $E_{\delta, p}$ de p relatif à A et un nombre naturel $n_{\delta, p}$ tels que les conditions $n > n_{\delta, p}$ et $x \in E_{\delta, p}$ ³⁾ entraînent l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| < \delta$.

Nous allons prouver que l'ensemble Z de points de convergence non-uniforme est de première catégorie sur A .

Posons: $D_m =$ l'ensemble de points p pour lesquels il existe un tel entourage $E_{\frac{1}{m}, p}$ relatif à A et un tel $n_{\frac{1}{m}, p}$ que les conditions $n > n_{\frac{1}{m}, p}$ et $x \in E_{\frac{1}{m}, p}$ entraînent

$$(2) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

1) La frontière de P relative à A c'est l'ensemble $\overline{PA} - P$. Si P est ouvert dans A , sa frontière y est non dense. Voir mon article: *Sur l'opération \overline{A} de l'Analysis Situs*, Fund Math. III, p. 187.

2) L. c. p. 388, IV.

3) $x \in E$ veut dire: x est élément de E .

Evidemment, l'ensemble des points de convergence uniforme $= \prod_{m=1}^{\infty} D_m$. Donc $Z = \sum_{m=1}^{\infty} (A - D_m)$ et, en tenant compte de la décomposition (1), on a

$$Z \subset R(A) + \sum_{m=1}^{\infty} (S(A) - D_m).$$

L'ensemble $R(A)$ étant de première catégorie sur A , il s'agit de prouver que chaque ensemble $S(A) - D_m$ est non dense sur $S(A)$, l'ensemble $S(A)$ étant supposé non vide.

Supposons, par contre, qu'il existe un m tel que l'ensemble $C = S(A) - D_m$ ne soit pas non dense dans $S(A)$. L'ensemble D_m étant, par définition, ouvert dans A donc dans $S(A)$, ceci revient à dire que C contient un ensemble B ouvert dans $S(A)$.

Désignons par B_k l'ensemble de tous les points x de B pour lesquels l'inégalité $n > k$ entraîne

$$(3) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{5m}.$$

La suite des $f_n(x)$ étant convergente, on a

$$(4) \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Or, l'ensemble B — comme ouvert dans l'ensemble normal $S(A)$ — est également normal et comme la formule (4) représente une décomposition de B en une infinité dénombrable d'ensembles, on conclut qu'un d'eux, soit B_k , n'est pas non dense sur B . Soit donc D un sous-ensemble (non vide) ouvert dans B et tel que B_k est dense dans D .

D étant ouvert dans B , B dans $S(A)$ et $S(A)$ dans A , D est ouvert dans A . Or, D étant un entourage relatif à A de chaque point $p \in D$, il suffit pour arriver à la contradiction demandée, de prouver que les conditions $n > k$ et $x \in D$ entraînent l'inégalité (2) donc la formule $p \in D_m$ (contrairement à l'hypothèse que $p \in D \subset C = S(A) - D_m$).

Posons donc: $n > k$ et $x \in D$. Il existe un $i > k$ tel que

$$(5) \quad |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{5m}.$$

En vertu de la continuité des fonctions $f_n(x)$ sur A donc sur D , à chaque couple n, i correspond un ensemble $O_{n,i}$ ouvert dans D et tel que

$$(6) \quad |f_n(z) - f_n(x)| < \frac{1}{5m} \quad \text{et} \quad |f_i(z) - f_i(x)| < \frac{1}{5m},$$

quel que soit le point z de $O_{n,i}$.

Les inégalités (6) subsistent donc, en particulier, pour des valeurs de z appartenant à l'ensemble B_k , puisque cet ensemble est dense dans D , donc dans $O_{n,i}$. On a, pour ces z , en vertu de (3):

$$(7) \quad |f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{5m} \quad \text{et} \quad |f_i(z) - f(z)| < \frac{1}{5m}$$

La formule (2) se déduit des inégalités (5), (6) et (7). C. Q. F. D.

En chaque point de convergence uniforme la fonction $f(x)$ est continue¹⁾. On a, par conséquent, le

Théorème I²⁾. *La limite de fonctions continues sur A est α -continue sur A .*

D'autre part on prouve sans peine le

Théorème II. *Chaque fonction continue est α -continue et chaque fonction α -continue est β -continue, quel que soit l'ensemble A des valeurs de son argument.*

Ceci établi nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème III. *La limite de fonctions β -continues sur A est β -continue sur A .*

Démonstration. Soit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ et soit $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ une suite d'ensembles de première catégorie sur A tels que $f_n(x)$ est continue sur $A - C_n$. Par conséquent, toutes les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur l'ensemble $B = A - \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. On en conclut, en vertu du th. I, que leur limite $f(x)$ est α -continue sur B , donc (théor. II) β -continue sur B . Or, la différence $A - B$ étant de première catégorie sur A , $f(x)$ est β -continue sur A .

Théorème IV. *Pour qu'une fonction soit limite de fonctions α -continues sur A , il faut et il suffit qu'elle soit β -continue sur A .*

Démonstration. En vertu des théorèmes II et III la condi-

¹⁾ Cet énoncé est une généralisation d'un théorème de C. Arzéla. Voir: Hausdorff. l. c. p. 386.

²⁾ Ce théorème a été proposé par M. Sierpiński.

tion est nécessaire. Nous allons prouver qu'elle est suffisante. Soient donc $f(x)$ une fonction β -continue sur A , B un sous-ensemble de première catégorie sur A tel que $f(x)$ soit continue sur $A - B$. On a $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, où les ensembles B_n sont non denses dans A et $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$. Par conséquent, les ensembles fermés \bar{B}_n sont aussi non denses dans A . Posons

$$C = A - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n.$$

La fonction $f(x)$ étant continue sur $A - B$, elle l'est, à plus forte raison, sur C .

Envisageons la décomposition (1) du N° 1. L'ensemble $S(A)$ n'étant en aucun point de première catégorie sur A et l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$ étant de première catégorie sur A , aucun ensemble ouvert dans $S(A)$ n'est contenu dans $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$. Autrement dit, l'ensemble $C \times S(A)$ est dense dans $S(A)$. Il existe donc pour chaque point x de $S(A)$ une suite de points $\{x_m\}$ de $C \times S(A)$ telle que

$$(8) \quad x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m.$$

Posons, pour un n donné,

1°: $f_n(x) = f(x)$ lorsque x appartient à l'ensemble

$$D_n = C \times S(A) + \bar{B}_n \times A + R(A),$$

2°: lorsque x appartient à $A - D_n$, deux cas sont possibles. Si l'on peut assujettir la suite (8) à la condition que les valeurs $f(x_m)$ convergent, soit $f_n(x) = \lim f(x_m)$ ¹⁾. Dans le cas contraire (ce qui ne peut avoir lieu que lorsque $f(x)$ est non bornée), la valeur de $f(x)$ est arbitraire.

Je dis que les fonctions $f_n(x)$ ainsi définies convergent vers $f(x)$ et sont α -continues sur A .

La convergence des $f_n(x)$ résulte des formules

$$\bar{B}_1 A \subset \bar{B}_2 A \subset \dots \subset \bar{B}_n A \subset \dots$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} D_n.$$

¹⁾ Le choix de la valeur $f_n(x)$, avec x et n fixes, peut être effectué d'une façon bien déterminée, car l'ensemble de tous les $f_n(x)$ possibles est fermé.

Pour prouver que $f_n(x)$ est α -continue sur A il suffit d'établir la continuité de $f_n(x)$ en chaque point p de $C \times S(A)$.

D'après 1^o, $f_n(p) = f(p)$. Or, soit $\delta > 0$; il s'agit de trouver un entourage E de p dans A tel que l'on ait

$$(9) \quad |f_n(x) - f(p)| \leq \delta,$$

quel que soit x de E

La fonction $f(x)$ étant par hypothèse continue sur C , il existe pour p un entourage H relatif à A tel que

$$(10) \quad |f(x) - f(p)| < \delta$$

quel que soit x de $E \times C$.

Les ensembles $\overline{B_n} \times A$ et $R(A)$ étant fermés dans A , on peut assujettir l'entourage E à la condition

$$E \times (\overline{B_n}A + R(A)) = 0$$

Or, si x est un point de D_n , la formule (9) est vérifiée selon 1^o et (10). Soit donc x un point de $E - D_n$ et soit $\{x_m\}$ une suite extraite de $E \times C \times S(A)$, satisfaisant à (8). D'après (10) on a donc

$$(11) \quad |f(x_m) - f(p)| < \delta,$$

On peut donc extraire de $\{f(x_m)\}$ une suite convergente, ce qui donne, en vertu de 2^o et (11), la formule (9) C. Q. F. D.

En s'appuyant sur la définition des fonctions de Baire¹⁾, on tire des théorèmes II et IV le

Corollaire I. *Chaque fonction de Baire définie sur un ensemble A est β -continue sur A . Elle est également β -continue sur chaque sous-ensemble X de A ²⁾.*

Passons à présent au cas où A est un ensemble normal. Dans

¹⁾ Par définition, la classe de fonctions de Baire (ou de fonctions représentables) est la plus petite classe contenant les fonctions continues et les limites de suites convergentes de fonctions qui lui appartiennent.

²⁾ Ce corollaire, qui fournit une condition nécessaire pour qu'une fonction soit représentable, présente une généralisation d'un théorème bien connu de Baire, énoncé dans l'hypothèse que X et A sont des ensembles parfaits. Baire considérerait aussi, au lieu des fonctions β -continues, les fonctions qui sont „ponctuellement discontinues, lorsqu'on néglige les ensembles de première catégorie sur X “. On prouve sans peine que notre condition et celle de Baire sont équivalentes. Il en est de même du corollaire III pour le cas d'ensembles normaux.

cette hypothèse les notions de fonctions α -continues et de fonctions ponctuellement discontinues coïncident (il est, d'ailleurs, aisé de voir que la classe d'ensembles normaux est la plus grande classe pour laquelle ces deux notions coïncident) Le théorème IV donne donc le

Corollaire II. *Pour qu'une fonction soit β -continue sur un ensemble normal A , il faut et il suffit qu'elle soit limite de fonctions ponctuellement discontinues sur A .*

D'après le corollaire I on a le

Corollaire III. *Chaque fonction $f(x)$ de Baire définie sur un ensemble normal est limite de fonctions ponctuellement discontinues sur A . Plus généralement: X étant un sous ensemble normal arbitraire de A , $f(x)$ est limite de fonctions ponctuellement discontinues sur A .*

3. Soit $f(x)$ une fonction réelle de variable réelle. J'appelle image de $f(x|A)$ ¹⁾ l'ensemble plan de points $[x, f(x)]$, x admettant toutes les valeurs-éléments de A .

Remarquons d'abord que

(12) Si $f(x)$ est ponctuellement discontinue sur A , l'image I de $f(x|A)$ est non dense dans le plan.

Supposons, par contre, que l'ensemble I soit dense dans un carré K a cotés verticaux $x=x_1$ et $x=x_1+\delta$. Soit x_0 un point de continuité de $f(x)$ situé entre x_1 et $x_1+\delta$. On peut donc entourer x_0 d'un intervalle ab assez petit pour que les valeurs de $f(x)$ ne diffèrent dans cette intervalle que de $\leq \frac{\delta}{2}$. I ne peut donc être dense dans K .

On en conclut que l'image d'une limite de fonctions continues (c'est à dire d'une fonction de classe I de Baire), définies sur un segment est non dense dans le plan.

(13) Si A est non dense (dans l'axe X), l'image I de $f(x|A)$ est non dense (dans le plan).

Car entre chaque deux points de I on peut interposer une bande verticale qui ne contient aucun point de A , donc de I .

On déduit immédiatement de (12) et (13) le

Théorème V. *L'image d'une fonction β -continue sur A est de première catégorie dans le plan. Il en est de même de toute fonction de Baire.*

¹⁾ Cf Hausdorff, l. cit. p. 358.

Théorème VI. *L'ensemble complémentaire d'une image de fonction n'est en aucun point de première catégorie dans le plan.*

Démonstration. Soit C le complémentaire de l'image d'une fonction $f(x)$ et supposons que C soit de première catégorie dans un carré K à côtés horizontaux rationnels $y = y_1$ et $y = y_1 + l$. On a donc

$$(14) \quad K \times C = \sum_{n=1}^{\infty} N_n,$$

les ensembles N_n étant non denses (dans le plan).

Envisageons l'ensemble dénombrable de droites $y = r$, où r est variable rationnelle variant de y_1 à $y_1 + l$. Chaque couple de ces droites découpe dans le carré K un rectangle. Désignons par $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots$ la suite de tous ces rectangles.

Par conséquent $K = \sum_{m=1}^{\infty} P_m$ et, selon (14):

$$K \times C = \sum_{m,n=1}^{\infty} P_m \times N_n.$$

Soit S_x le segment à abscisse x et $y_1 \leq y \leq y_1 + l$. Soit $S_x \subset K$. Convenons que F_x désigne l'ensemble composé du point $[x, f(x)]$, si ce point est situé dans K , et que $F_x = 0$ dans le cas contraire. On a, d'après (14):

$$(15) \quad S_x = F_x + C \times S_x = F_x + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \times S_x.$$

La formule (15) représente une décomposition du segment S_x en une infinité dénombrable d'ensembles. Le segment étant un ensemble normal, un de ces ensembles, soit $N_{n_x} \times S_x$ n'est pas non-dense sur S_x . Il existe donc, pour chaque x , un m_x tel que $\overline{N_{n_x} \times S_x} \supset P_{m_x} \times S_x$.

Désignons, en général, par $R_{m,n}$ l'ensemble de tous les x pour lesquels

$$(16) \quad \overline{N_n \times S_x} \supset P_m \times S_x.$$

R désignant le segment, qui est la projection du carré K sur l'axe des x , on a

$$(17) \quad R = \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{m,n}$$

La formule (17) représente une décomposition du segment R en une infinité dénombrable d'ensembles. Par conséquent, un d'eux, soit $R_{m_0 n_0}$ est dense dans un segment. Soit $x_1 \leq x \leq x_2$ ce segment et soit Q la partie du rectangle P_{m_0} située entre les droites $x = x_1$ et $x = x_2$.

Comme l'ensemble $R_{m_0 n_0}$ est dense sur le segment (x_1, x_2) et comme chaque segment $P_{m_0} S_x$, pour $x \in R_{m_0 n_0}$ satisfait (selon (16)) à l'inclusion

$$P_{m_0} S_x \subset \overline{N_{n_0}} S_x \subset \overline{N_{n_0}},$$

on a

$$Q \subset \overline{N_{n_0}},$$

ce qui prouve que N_{n_0} est dense dans le rectangle Q , contrairement à la définition des N_n .

Corollaire. Si l'image I d'une fonction est un ensemble G_δ , I est non-dense dans le plan.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un carré K dans lequel I serait dense. Mais alors, l'ensemble $K - I$ serait un ensemble F_σ sans points intérieurs, donc un ensemble de première catégorie dans le plan. Ainsi, l'ensemble complémentaire de I serait, aux points intérieurs de K , de première catégorie dans le plan, contrairement au théorème établi tout à l'heure.

Remarque. Il importe de remarquer que la propriété des images d'être de première catégorie dans le plan, propriété commune à toutes les fonctions β -continues, peut être en défaut, lorsqu'il s'agit des fonctions tout à fait arbitraires.

Le raisonnement qui va suivre, dû à MM. Sierpiński et Zalcwasser, prouve l'existence des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) dont l'image n'est pas de première catégorie.

Soit sur le segment $0, 1$, A un ensemble F_σ de mesure 1 sans points intérieurs. Rangons l'ensemble complémentaire B de A en une suite transfinie

$$b_1, b_2, \dots, b_\alpha, \dots \quad (\alpha < \aleph_c),$$

\aleph_c désignant le plus petit nombre transfini de la puissance du continu.

Soit

$$(18) \quad P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \aleph_c)$$

la suite de tous les ensembles plans parfaits; dont la projection sur l'axe des x contient c éléments de B .

Posons $f(x) = 0$ aux points x de A et soit

1°: $(b_1, f(b_1))$ un point du premier ensemble de la suite (18) ayant un point à abscisse b_1 ;

2°: $(b_\alpha, f(b_\alpha))$ un point du premier ensemble de la suite (18) ayant un point à abscisse b_α et dont aucun point n'a pas été choisi auparavant.

La fonction $f(x)$ ainsi définie est mesurable. Son image I n'est pas de première catégorie dans le plan, car s'il en était ainsi, l'ensemble Z composé de I et des droites verticales à abscisses extraites de A serait également de première catégorie. Mais il existerait alors un ensemble parfait P tel que $PZ = 0$ et que la projection de P sur l'axe des x contiendrait 2° points de B . L'ensemble P serait donc un terme de la suite (18) et, par définition de $f(x)$, un point de P serait élément de I , donc de Z , ce qui contredit l'égalité $PZ = 0$.
