Sur les *truth-functions* au sens de MM. Russell et Whitehead.

Par

Alfred Tajtelbaum-Tarski (Varsovie).

MM. Russell et Whitehead appellent „*truth-function*" toute fonction f (ayant pour argument une proposition) qui satisfait à la condition:

(a) $$[p, q] : p \equiv q \,.\, f(p) \,.\, \supset f(q)$$ [1].

Je démontre dans cet ouvrage quelques théorèmes sur les conditions tantôt nécessaires et suffisantes, tantôt seulement nécessaires pour qu'une fonction donnée f soit *truth-function* dans le sens indiqué de ce terme.

Je m'occupe aussi de la proposition:

(A) $$[p, q, f] : p \equiv q \,.\, f(p) \,.\, \supset f(q)$$

que j'appellerai „*loi de la substitution*" et qui exprime que toute fonction f satisfait à la condition (a). J'établis notamment des théorèmes (étant d'ailleurs — au moins en partie — des corollaires immédiats des théorèmes mentionnés ci-dessus) sur l'équivalence de la proposition (A) et de certaines autres propositions. Ces derniers théorèmes me paraissent intéressants pour les raisons suivantes:

A la question si toute fonction f (ayant pour argument une proposition) est une *truth-function*, les auteurs cités donnent une réponse négative, en la justifiant uniquement par des raisons qui

[1]) A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, Vol. I, Cambridge 1910, p. 120—121. J'emploie ici les notations de ces auteurs avec quelques modifications peu importantes.

font appel à l'intuition. Leur opinion ne me semble pas être assez convainquante, d'autant plus que M. Leśniewski a construit une méthode générale permettant de supprimer dans les raisonnements connus toutes les fonctions qui ne remplissent pas la condition (a)[1]).

D'autre part, il semble incontestable que la loi de la substitution ne se laisse ni démontrer ni refuter dans aucun des systèmes de la Logistique que l'on connait à présent. De plus, on peut même „prouver" l'indépendance de cette proposition des systèmes connus d'axiomes de la Logistique, p. ex. de celui de MM. Russell et Whitehead[2]) — „prouver" dans le sens habituellement attribué en mathématique à ce mot, lorsqu'il s'agit d'établir l'indépendance d'une proposition des autres, c'est à dire par voie d'une interprétation convenablement choisie. Cependant, la démonstration qui m'est connue étant fondée sur des résultats qui ont été acquis par M. Łukasiewicz et qui n'ont pas été publiés jusqu'à présent, je renonce à la citer ici.

En tout cas, quiconque considère la proposition (A) comme vraie et veut l'incorporer dans le système de la Logistique, doit par conséquent admettre cette proposition comme axiome ou bien introduire un autre axiome qui, joint aux axiomes de ce système, implique la proposition (A). Les théorèmes qui seront établis dans la suite peuvent présenter le même intérêt à la construction d'un tel système de la Logistique, que présentent p. ex. les théorèmes concernant les formes équivalentes de l'axiome d'Euclide pour les recherches sur les fondements de la Géométrie.

Enfin, en terminant cet ouvrage, je donne (dans les notes I et II) un aperçu des résultats analogues obtenus à l'étude des fonctions à un nombre plus grand d'arguments ou bien des fonctions logistiques dont les arguments ne sont pas des propositions[3]).

[1]) Ces résultats de M Leśniewski n'ont pas été publiés jusqu'à présent.

[2]) A. N. Whitehead and B. Russell, op. cit., p. 98 101 et p. 136—138.

[3]) Quant au fondement sur lequel reposent mes raisonnements, on voudra bien consulter ma Note *„Sur le terme primitif de la Logistique"*, Fundamenta Mathematicae, T. IV, p. 197.

La théorie des types de M. Leśniewski, au point de vue de laquelle mes raisonnements sont — comme j'ai écrit — irréprochables, a exercé sur la forme extérieure du présent ouvrage l'influence se manifestant p. ex. dans l'emploi des parenthèses spéciales après les signes des fonctions, n'ayant pas pour arguments de propositions. Cf. Déf. 6 et Déf. 7 dans le § 1.

Ma Note citée *„Sur le terme primitif de la Logistique“* et le Mémoire présent constituent deux parties de ma Thèse, présentée en 1923 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de docteur en philosophie. A cette occasion je tiens à exprimer ici mon affectueuse gratitude à mes Professeurs MM. S. Leśniewski et J. Łukasiewicz pour leurs précieux conseils qui m'ont aidé considérablement dans mes recherches sur la Logistique.

§ 1. La loi du nombre de fonctions.

J'énonce dans ce § une série de définitions, **Déf. 1—7**, dont la **Déf. 6** introduit le terme qui est le principal objet de cette étude. A l'aide d'une série de lemmes, **Th. 1 - 20**, je démontre ensuite le **Th. 21** qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit *truth-function*. On peut formuler cette condition de la façon suivante:

$$\text{(b)}\quad [p] : f(p) \equiv . p \vee \sim(p) : \vee . [p] . f(p) \equiv p . \vee . [p] . f(p) \equiv \sim(p).$$
$$\vee : [p] : f(p) \equiv . p . \sim(p).$$

Comme conclusion immédiate du **Th. 21** se présente le **Th. 23** qui établit l'équivalence de la proposition (A) et de la proposition suivante:

$$\text{(B)}\ [f] : [p] . f(p) . \vee . [p] . f(p) \equiv p . \vee . [p] . f(p) \equiv \sim(p) . \vee . [p] . \sim(f(p)).$$

La proposition (B) peut être appelée, grâce à son contenu intuitif, *„loi du nombre de fonctions“*

Déf. 1. $Vr \equiv . [\exists r] . r$ [1]
Déf. 2. $Fl \equiv . [r] . r$ [1]
Déf. 3. $[p] : vr(p) \equiv . p \vee \sim(p)$
Déf. 4. $[p] . as(p) \equiv p$ [2]
Déf. 5. $[p] : fl(p) \equiv . p . \sim(p)$
Déf. 6. $[f] :. \vartheta\varrho\{f\} \equiv : [p, q] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q)$
Déf. 7. $[f, g] : =\{f . g\} \equiv . [p] . f(p) \equiv g(p)$

[1]) J'écris „*Vr*“ et „*Fl*“ au lieu des termes „*1*“ et „*0*“, qui figurent p. ex. chez E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, I Band, Leipzig 1890, p. 188.

[2]) On pouvait introduire également pour des raisons de symétrie la définition suivante:

Déf. 4'. $[p] . ng(p) \equiv \sim(p)$.

qui serait toutefois inutile, car le terme „*ng*“ aurait alors la signification identique à celle du signe de la négation „$\sim$“ qui figure déjà en Logistique.

Th. 1. $Vr.$ (Déf. 1)

Th. 2. $[p]:p\equiv.p\equiv Vr$ (Th. 1)

Th. 3. $\sim(Fl)$ (Déf. 2)

Th. 4. $[p]:\sim(p)\equiv.p\equiv Fl$ (Th. 3)

Th. 5. $[p]:p\equiv Vr.\vee.p\equiv Fl.$

Dém. [1]:

$[p]:$

(1) $p\vee\sim(p):$

(2) $p\supset.p\equiv Vr:$ (Th. 2)

(3) $\sim(p)\supset.p\equiv Fl:$ (Th. 4)

$p\equiv Vr.\vee.p\equiv Fl$ (1, 2, 3)

Th. 6. $[p].vr(p)$ (Déf. 3)

Th. 7. $[p,f]:\vartheta\varrho\{f\}.f(Vr).f(Fl).\supset f(p)$

Dém.:

$[p,f]:.Hp.\supset:$

(1) $p\equiv Vr.\vee.p\equiv Fl:$ (Th. 5)

(2) $p\equiv Vr.\supset f(p):$ (Déf. 6, Hp)

(3) $p\equiv Fl.\supset f(p):$ (Déf. 6, Hp)

Ts (1, 2, 3)

Th. 8. $[f]:\vartheta\varrho\{f\}.f(Vr).f(Fl).\supset=\{f,vr\}$

Dém.:

$[f]:.Hp.\supset:$

(1) $[p].f(p):$ (Th. 7)

(2) $[p].f(p)\equiv vr(p):$ (1, Th. 6)

Ts (Déf. 7, 2)

Th. 9. $[f]:\vartheta\varrho\{f\}.f(Vr).\sim(f(Fl)).\supset=\{f,as\}$

Dém.:

$[f]::Hp.\supset:.$

(1) $[p]:$

(a) $p\supset.$

(α) $p\equiv Vr.$ (Th. 2)

(β) $f(p):$ (Déf. 6, α, Hp)

(b) $\sim(p)\supset.$

[1]) La construction des démonstrations, qui ne sont, bien entendu, qu'incomplètes, est empruntée partiellement à MM. Whitehead et Russell; elle n'éxige pas, il me semble, d'explications plus détaillées. Dans les démonstrations des théorèmes mis en forme d'une proposition conditionnelle le terme „Hp" désigne l'hypothèse et „Ts" la thèse du théorème.

(γ) $p \equiv Fl$. **(Th. 4)**

(δ) $\sim(f(p))$: **(Déf. 6, γ, Hp)**

(c) $p \equiv f(p)$. (a—β, b—δ)

(d) $as(p) \equiv f(p)$:. **(Déf. 4, c)**

Ts **(Déf. 7, 1—d)**

Th. 10. $[f] : \vartheta\varrho\{f\} . \sim(f(Vr)) . f(Fl) . \supset = \{f, \sim\}$ **(Th. 2, Déf. 6, Th. 4, Déf. 7)**

J'omets la démonstration qui est analogue à celle du Th. 9.

Th. 11. $[p] . \sim(fl(p))$ **(Déf. 5)**

Th. 12. $[p, f] : \vartheta\varrho\{f\} . \sim(f(Vr)) . \sim(f(Fl)) . \supset \sim(f(p))$ **(Th. 5, Déf. 6)**

La démonstration est analogue à celle du Th. 7.

Th. 13. $[f] : \vartheta\varrho\{f\} . \sim(f(Vr)) . \sim(f(Fl)) . \supset = \{f, fl\}$ **(Th. 12, Th. 11, Déf. 7)**

La démonstration est analogue à celle du Th. 8.

Th. 14. $[f] : \vartheta\varrho\{f\} \supset . = \{f, vr\} \vee = \{f, as\} \vee = \{f, \sim\} \vee = \{f, fl\}$

Dém.:

(1) $[f] :. Hp \supset :$

$f(Vr) . f(Fl) . \vee . f(Vr) . \sim(f(Fl)) . \vee .$

$\sim(f(Vr)) . f(Fl) . \vee . \sim(f(Vr)) . \sim f(Fl)) :$

Ts **(Hp. 1, Th. 8, Th. 9, Th. 10, Th. 13)**

Th. 15. $\vartheta\varrho\{vr\}$

Dém.:

(1) $[p, q] : p \equiv q . vr(p) . \supset vr(q) :.$ **(Th. 6)**

$\vartheta\varrho\{vr\}$ **(Déf. 6, 1)**

Th. 16. $\vartheta\varrho\{as\}$

Dém.:

(1) $[p, q]$:

(a) $p \equiv q . p . \supset q$:

(b) $as(p) \equiv p$. **(Déf. 4)**

(c) $as(q) \equiv q$: **(Déf. 4)**

(d) $p \equiv q . as(p) . \supset as(q)$: (a, b, c)

$\vartheta\varrho\{as\}$ **(Déf. 6, 1—d)**

Th. 17. $\vartheta\varrho\{\sim\}$ **(Déf. 6)**

Th. 18. $\vartheta\varrho\{fl\}$ **(Th. 11, Déf. 6)**

Les démonstrations des deux derniers théorèmes sont analogues à celle du **Th. 15**.

Th. 19. $[f, g] :=\{g, f\} . \vartheta\varrho\{f\} . \supset \vartheta\varrho\{g\}$

Dém.:

$$[f, g] :: Hp . \supset :.$$

(1) $[p, g]:$

(a) $p \equiv q . f(p) . \supset f(q):$ **(Déf. 6)**

(b) $g(p) \equiv f(p) .$ **(Déf. 7,** Hp**)**

(c) $g(q) \equiv f(q):$ **(Déf. 7,** Hp**)**

(d) $p \equiv q . g(p) \supset g(q) :.$ (a, b, c)

Ts **(Déf. 6,** 1—d)

Th. 20. $[f] : =\{f, vr\} . \vee =\{f, as\} \vee \{f, \sim\} . \vee =\{f, fl\} . \supset \vartheta\varrho\{f\}$

Dém.:

$$[f] : Hp . \supset .$$

(1) $=\{f, vr\} \supset \vartheta\varrho\{f\} .$ **(Th. 19, Th. 15)**

(2) $=\{f, as\} \supset \vartheta\varrho\{f\} .$ **(Th. 19, Th. 16)**

(3) $=\{f, \sim\} \supset \vartheta\varrho\{f\} .$ **(Th. 19, Th. 17)**

(4) $=\{f, fl\} \supset \vartheta\varrho\{f\} .$ **(Th. 19, Th. 18)**

Ts (Hp, 1, 2, 3. 4)

Th. 21. $[f] : \vartheta\varrho\{f\} \equiv . =\{f, vr\} \vee =\{f, as\} \vee =\{f, \sim\} \vee =\{f, fl\}$ **(Th. 14, Th. 20)**

Th. 22. $[f] . \vartheta\varrho\{f\} . \equiv . [f] . =\{f, vr\} \vee =\{f, as\} \vee =\{f, \sim\} \vee =\{f, fl\}$ **(Th. 21)**

Th. 23. $[p, q . f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [f] : [p] . f(p) . \vee . [p] . f(p) \equiv p . \vee . [p] . f(p) \equiv \sim(p) . \vee . [p] . \sim(f(p))$
(Th. 22, Déf. 6, Déf. 7, Déf. 3, Déf. 4, Déf. 5)

§ 2. La loi du développement.

Le théorème le plus important de ce § est **Th. 30**, où je donne une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit *truth-function*. Conformément à cette condition la fonction f doit posséder la propriété suivante:

(c) $$[p] :. f(p) \equiv : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p).$$

Le **Th. 31**, qui en résulte, établit l'équivalence de la proposition (A) et de la proposition

(C) $$[p, f] :. f(p) \equiv : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p);$$

dans cette dernière proposition on peut facilement reconnaître la *loi du développement* connue dans l'Algèbre de la Logique[1]).

Th. 24. $[p, f] :. \vartheta\varrho\{f\} . f(p) . \supset :. f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p)$

Dém.

$[p, f] :. Hp . \supset :$

(1) $p \equiv Vr . \vee . p \equiv Fl :$ **(Th. 5)**

(2) $p \equiv Vr . \supset . f(Vr) . p :$ **(Déf. 6,** Hp, **Th. 2)**

(3) $p \equiv Fl . \supset . f(Fl) . \sim(p) :$ **(Déf. 6,** Hp, **Th. 4)**

Ts (1. 2, 3)

Th. 25. $[p, f] : \vartheta\varrho\{f\} . f(Vr) . p . \supset f(p)$ **(Th. 2, Déf. 6)**

Th. 26. $[p, f] : \vartheta\varrho\{f\} . f(Fl) . \sim(p) . \supset f(p)$ **(Th. 4, Déf. 6)**

Th. 27. $[p, f] :. \vartheta\varrho\{f\} : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p) : \supset f(p)$

(Th. 25, Th. 26)

Th. 28. $[f] :: \vartheta\varrho\{f\} \supset :. [p] :. f(p) \equiv : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p)$

(Th. 24, Th. 27)

Th. 29. $[f] :: [p] :. f(p) \equiv : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p) :. \supset \vartheta\varrho\{f\}$

Dém.:

$[f] : Hp :. \supset ::$

(1) $[p, q] : p \equiv q . f(p) . \supset :.$

(a) $p \equiv q . f(p) :$

(b) $f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p) :$ (Hp, a)

(c) $f(Vr) . q . \vee . f(Fl) . \sim(q) :$ (a, b)

(d) $f(q) ::$ (Hp, c)

Ts **(Déf. 6,** 1—d)

Th. 30 $[f] : \vartheta\varrho\{f\} \equiv :. [p] :. f(p) \equiv : f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p)$

(Th. 28, Th. 29)

Th. 31 $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv :. [p, f] :. f(p) \equiv$
$f(Vr) . p . \vee . f(Fl) . \sim(p)$ **(Th. 30, Déf. 6)**

§ 3. Le premier théorème sur les bornes d'une fonction.

Sauf la *loi du développement* que les *truth-functions* remplissent en vertu du **Th. 30** elles possèdent plusieurs autres propriétés qu'attribue à ses fonctions l'Algèbre de la Logique. Cependant les théorèmes correspondants sont parfois plus faciles à démontrer, en utilisant les lois spécifiques de la Logistique.

[1]) Cf. L. Couturat, *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1905, § 29; E. Schröder, op. cit, p. 409, 44_+.

Dans ce § je démontre, en particulier, les **Th. 32—34** d'après lesquels toute *truth-function* remplit les conditions suivantes:

(d) $[p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$

(e) $[\exists p] . f(p) . \equiv . f(Vr) \vee f(Fl)$

ou, en termes équivalents:

(d′) $[p] : f(Vr) . f(Fl) . \supset f(p),$

(e′) $[p] : f(p) \supset . f(Vr) \vee f(Fl)$

donc aussi la condition:

(f) $[p] : f(Vr) . f(Fl) . \supset f(p) \supset . f(Vr) \vee f(Fl).$

Les théorèmes mentionnés n'expriment toutefois que les conditions nécessaires pour qu'une fonction f soit *truth-function*. Or, il est impossible de démontrer que ces conditions sont suffisantes [1]).

On peut pourtant prouver que chacune des propositions qui attribuent à toute fonction f (ayant pour argument une proposition) les propriétés (d), (e) ou (f) [2]) implique la *loi de la substitution*. Cela me permettra d'etablir dans les **Th. 38, 42** et **44** l'équivalence de cette loi et des propositions:

(D) $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl),$

(E) $[f] : [\exists p] . f(p) . \equiv . f(Vr) \vee f(Fl),$

(F) $[p, f] : f(Vr) . f(Fl) . \supset f(p) \supset . f(Vr) \vee f(Fl).$

La proposition (F) est connue dans l'Algèbre de la Logique [3]); je l'appellerai *„premier théorême sur les bornes d'une fonction"*. Les propositions (D) et (E) en résultent presque immédiatement.

Th. 32. $[f] :. \vartheta\varrho\{f\} \supset : [p] . f(p) \equiv f(Vr) . (Fl)$

Dém.:

$[f] :. Hp \supset :$

(1) $[p] . f(p) . \supset . f(Vr) . f(Fl) :$

(2) $f(Vr) . f(Fl) . \supset . [p] . f(p) :$ **(Th. 7)**

Ts (1, 2)

Th. 33. $[f] :. \vartheta\varrho\{f\} \supset : [\exists p] . f(p) . \equiv f(Vr) \vee f(Fl)$

[1]) On peut même „prouver" l'indépendance des propositions correspondantes des axiomes de la Logistique; mais je renonce à le faire ici pour les raisons mentionnées au début.

[2]) M. **Łukasiewicz** a attiré déja l'attention sur le fait qu'en attribuant à toute fonction f les propriétés signalées ici comme conditions (d) et (e) (et les propriétés correspondantes à ces conditions pour les fonctions à plusieurs arguments) on peut apporter des simplifications notables à la construction de la Logistique. Cf. J. Łukasiewicz, *Logika dwuwartościowa (Logique des deux valeurs)*, Księga pamiątkowa ku uczczeniu Kazimierza Twardowskiego, Lwów 1921, p, 189—206.

[3]) Cf. L. Couturat, op. cit. § 28; E. Schröder, op. cit., p. 427, 484.

Dém.:

$[f]: \ Hp \supset:$

(1) $\sim(f(Vr)) . \sim(f(Fl)) . \supset . [p] . \sim(f(p)):$ **(Th. 12)**

(2) $[\exists p] . f(p) . \supset . f(Vr) \vee f(Fl):$ (1)

(3) $f(Vr) \vee f(Fl) . \supset . [\exists p] . f(p):$

Ts (2, 3)

Th. 34. $[f]: \ \vartheta\varrho\{f\} \supset : [p] : f(Vr) . f(Fl) . \supset f(p) \supset . f(Vr) \vee f(Fl)$ **(Th. 32, Th. 33)**

Th. 35. $[q, r, g] :: [f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl) : . g(Vr, Vr) . g(Vr, Fl) . g(Fl, Vr) . g(Fl, Fl) : . \supset g(q, r)$

Dém.:

$[q, r, g] :: Hp : . \supset :$

(1) $[p] . g(Vr, p) . \equiv . g(Vr, Vr) . g Vr, Fl):$

(2) $[p] . g(Vr, p):$ (1, Hp)

(3) $g(Vr, r):$ (2)

(4) $[p] . g(Fl, p) . \equiv . g(Fl, Vr) . g(Fl, Fl):$ (Hp)

(5) $[p] . g(Fl, p):$ (4, Hp)

(6) $g(Fl, r):$ (5)

(7) $[p] . g(p, r) . \equiv . g(Vr, r) . g(Fl, r):$ (Hp)

(8) $[p] . g(p, r):$ (7, 3, 6)

Ts (8)

Th. 36. $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl) : \supset . [f] . \vartheta\varrho\{f\}$

Dem:

$Hp : \supset ::$

(1) $[f] : .$

(a) $Vr \equiv Vr . f(Vr) . \supset f(Vr):$

(b) $\sim(Vr \equiv Fl):$ **(Th. 1, Th. 3)**

(c) $Vr \equiv Fl . f(Vr) . \supset f(Fl):$ (b)

(d) $Fl \equiv Vr . f(Fl) . \supset f(Vr):$ (b)

(e) $Fl \equiv Fl . f(Fl) . \supset f(Fl): .$

(f) $[p, q] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) ::$ **(Th. 35,** Hp, a, c, d, e**)**

Ts **(Déf. 6, 1—f)**

Th. 37. $[f] . \vartheta\varrho\{f\} . \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$ **(Th. 32, Th. 36)**

Th. 38. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$ **(Th. 37, Déf. 6)**

Th. 39. $[f] : [\exists p] . f(p) \equiv . f(Vr) \vee f(Fl) : \supset : [f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$

Dém.:

$Hp : \supset : .$

(1) $[f] : [\exists p] . \sim (f(p)) . \equiv . \sim (f(Vr)) \vee \sim (f(Fl)) : .$

Ts (1)

Th. 40. $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl) : \supset : [f] : [\exists p] . f(p) \equiv$
$\equiv . f(Vr) \vee f(Fl).$

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Th. 41. $[f] : [\exists p] . f(p) . \equiv . f(Vr) \vee f(Fl) : \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv$
$\equiv . f(Vr) . f(Fl)$ (Th. 39, Th. 40)

Th. 42. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [f] : [\exists p] . f(p) . \equiv$
$\equiv . f(Vr) \vee f(Fl)$ (Th. 38, Th. 41)

Th. 43. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv$
$\equiv . f(Vr) . f(Fl) : [\exists p] . f(p) . \equiv . f(Vr) \vee f(Fl)$ (Th. 38, Th. 42)

Th. 44. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [p, f] : f(Vr) . f(Fl) . \supset f(p) \supset .$
$f(Vr) \vee f(Fl)$ (Th. 43)

A côté des propriétés d'une fonction f, qui ont été examinées au cours de ce §, on en peut étudier les propriétés plus fortes au point de vue logique:

(g) $[q] : [p] . f(p) . \equiv . f(q) . f(\sim (q)),$

(h) $[q] : [\exists p] . f(p) . \equiv . f(q) \vee f(\sim (q)),$

ou, en énoncés équivalents:

(g′) $[p, q] : f(q) . f(\sim (q)) . \supset f(p);$

(h′) $[p, q] : f(p) \supset . f(q) \vee f(\sim (q))$

et la propriété

(i) $[p, q] : f(q) . f(\sim (q)) . \supset f(p) \supset . f(q) \vee f(\sim (q)).$

En appliquant les méthodes analogues à celles qui furent employées plus haut, on peut démontrer facilement les théorèmes suivants:

Th. 45. $[f] : . \vartheta \varrho \{f\} \supset : [q] : [p] . f(p) . \equiv . f(q) . f(\sim (q))$

Th. 46. $[f] : . \vartheta \varrho \{f\} \supset : [q] : [\exists p] . f(p) . \equiv . f(q) \vee f(\sim (q))$

Th. 47. $[f] : . \vartheta \varrho \{f\} \supset : [p, q] : f(q) . f(\sim (q)) . \supset f(p) \supset . f(q) \vee f(\sim (q))$

Th. 48. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [q, f] : [p] . f(p) . \equiv .$
$. f(q) . f(\sim (q))$

Th. 49. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [q, f] : [\exists p] . f(p) . \equiv$
$\equiv . f(q) \vee f(\sim (q))$

Th. 50. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [p, q, f] : f(q) . f(\sim (q)) . \supset$
$. \supset f(p) \supset . f(q) \vee f(\sim (q))$

§ 4. Le deuxième théorème sur les bornes d'une fonction.

Je vais démontrer à présent que toute *truth-function* jouit de propriétés suivantes (voir les **Th. 51—53**):

(j) $[p] . f(p) . \equiv f(f(Fl))$,

(k) $[\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr))$,

ou, en termes équivalents:

(j′) $[p] . f(f(Fl)) \supset f(p)$,

(k′) $[p] . f(p) \supset f(f(Vr))$,

donc aussi de la propriété:

(l) $[p] . f(f(Fl)) \supset f(p) \supset f(f(Vr))$.

Ces conditions de même que celles du § 3 ne sont que nécessaires pour qu'une fonction f soit *truth-function*. De plus, contrairement à ce qui concerne les considérations du § précédent, je ne sais même démontrer qu'une des propositions suivantes:

(J) $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(f(Fl))$,

(K) $[f] : [\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr))$,

d'après lesquelles toute fonction f possède les propriétés (j) et (k), implique la *loi de la substitution*,

Or, nous allons voir que cette loi résulte de la proposition:

(L) $[p, f] . f(f(Fl)) \supset f(p) \supset f(f(Vr))$,

qui est équivalente au produit logique des propositions (J) et (K). Grâce à ce résultat j'acquiers dans les **Th. 60** et **61** des nouvelles formes équivalentes à la proposition qui m'intéresse dans cet ouvrage.

On pourrait appeler la proposition (L), connue en outre dans l'Algèbre de la Logique[1]), „*deuxième théorème sur les bornes d'une fonction*“.

Th. 51. $[f] :. \vartheta\varrho\{f\} \supset : [p] . f(p) . \equiv f(f(Fl))$

Dém.:

$[f] :\cdot: Hp \supset ::$

(1) $[p] :\cdot f(p) \equiv : f(Vr) . p \vee . f(Fl) . \sim(p) ::$ **(Th. 28)**

(2) $f(f(Fl)) \equiv : f(Vr) . f(Fl) . \vee . f(Fl) . \sim(f(Fl)) :.$ (1)

(3) $f(f(Fl)) \equiv f(Vr) . f(Fl) :$ (2)

Ts **(Th. 32,** Hp **3)**

Th. 52. $[f] :. \vartheta\varrho\{f\} \supset : [\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr))$ **(Th. 28, Th. 33)**

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

1) Cf. L. Couturat, op. cit., § 28 (Remarque).

Th. 53. $[f]:.\vartheta\varrho\{f\}\supset [p].f(f(Fl))\supset f(p)\supset f(f(Vr))$ **(Th. 51, Th 52)**

Th. 54. $[f]:[p].f(p)\equiv f(f(Fl)):\supset:[q,f]\ \sim(q)\supset f(q)\equiv f(Fl)$

Dem.:

$Hp:\supset::$

(1) $[q,f]:.:$

(a) $[\exists g]::$

(α)[1] $[p]:.g(p)\equiv:\sim(p)\supset.f(p)\equiv f(Fl)$

(β) $g(Fl)\equiv:\sim(Fl)\supset.f(Fl)\equiv f(Fl):$ (α)

(γ) $f(Fl)\equiv f(Fl):$

(δ) $\sim(Fl)\supset.f(Fl)\equiv f(Fl):$ (γ)

(ε) $g(Fl):.$ (β, δ)

(ζ) $g(g(Fl))\equiv:\sim(g(Fl))\supset.f(g(Fl))\equiv f(Fl)\ .$ (α)

(η) $\sim(g(Fl))\supset.f(g(Fl))\equiv f(Fl):$ (ε)

(ϑ) $g(g(Fl)):$ (ζ, η)

(ι) $[p].g(p):$ (Hp, ϑ)

(κ) $g(q):.:$ (ι)

(b) $\sim(q)\supset.f(q)\equiv f(Fl):::$ (a—α, κ)

Ts (1—b)

Th. 55. $[f]:[p].f(p).\equiv f(f(Fl)):\supset:[p,q,f]:\sim(p).\sim(q).f(p).\supset f(q)$

Dém.:

$Hp\supset:.$

(1) $[p,q,f]:\sim(p).\sim(q).f(p).\supset.$

(a) $f(p)\equiv f(Fl).f(q)\equiv f(Fl).f(p).$ **(Th. 54)**

(b) $f(p)\equiv f(q).f(p)$ (a)

(c) $f(q):.$ (b)

Ts (1—c)

Th. 56. $[f]:[\exists p].f(p).\equiv f(f(Vr)):\supset:[q,f]\ q\supset.f(q)\equiv f(Vr)$

Dém.:

$Hp:\supset:.$

(1) $[g]:[p].\sim(g(p)).\equiv.\sim(g(g(Vr))):.:$

(2) $[q,f]::$

(a) $[\exists g]:.$

(α)[2] $[p]:g(p)\equiv.p\ \sim(f(p)\equiv f(Vr)):.$

[1]) La définition auxiliaire que j'introduis en ce point et dont je profite dans la démonstration, peut paraître superflue. Cependant j'ai choisi ce moyen pour rendre la démonstration plus claire.

[2]) Comparer a la note précédente

(β) $g(Vr) \equiv . Vr . \sim(f(Vr) \equiv f(Vr)):$ (α)
(γ) $f(Vr) \equiv f(Vr).$
(δ) $\sim(g(Vr)):$ (β, γ)
(ε) $g(g(Vr)) \equiv . g(Vr) . \sim(f(g(Vr)) \equiv f(Vr)):$ (α)
(ζ) $\sim(g(g(Vr))):$ (ε, δ)
(η) $[p] . \sim(g(p)):$ (1, ζ)
(ϑ) $\sim(g(q))::$ (η)
(b) $\sim(q . \sim(f(q) \equiv f(Vr))):.:$ (a—α, ϑ)

Ts (2—b)

Th. 57. $[f]:[\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr)) : \supset : [p . q\ f] : p . q . f(p) . \supset f(q)$ **(Th. 56)**

La démonstration est analogue à celle du **Th. 55.**

Th. 58. $[f]:[p] . f(p) . \equiv f(f(Fl)):[\exists p] . f(p) \equiv f(f(Vr)) : \supset . [f] . \vartheta\varrho\{f\}$

Dém.:

$Hp : \supset ::$

(1) $[p, q, f] :. p \equiv q . f(p) . \supset :$
(a) $p \equiv q . f(p):$
(b) $p . q . \vee \sim(p) . \sim(q):$ (a)
(c) $p . q . \supset f(q):$ **(Th. 57,** *Hp*, a)
(d) $\sim(p) . \sim(q) . \supset f(q):$ **(Th. 55,** *Hp*, a)
(e) $f(q)::$ (b, c, d)

Ts **(Déf. 6,** 1—e)

Th. 59. $[f] . \vartheta\varrho\{f\} . \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv f(f(Fl)) : [\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr))$ **(Th. 51, Th. 52, Th. 58)**

Th. 60. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv : [f] : [p] . f(p) . \equiv f(f(Fl)) :$ $[\exists p] . f(p) . \equiv f(f(Vr))$ **(Th. 59, Déf. 6)**

Th. 61. $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q) : \equiv . [p, f] . f(f(Fl)) \supset f(p) \supset f(f(Vr))$ **(Th. 60)**

Note I. Sur les fonctions à plusieurs arguments.

On arrive aux résultats analogues aux précédents, en examinant les fonctions à plusieurs arguments (tous ces arguments étant des propositions). Les démonstrations n'en présentent pas de différences essentielles.

Ainsi, p. ex., nous pouvons, en nous bornant aux fonctions à 2 arguments, établir ce qui suit:

pour qu'une telle fonction f soit *truth-function*, c'est à dire pour qu'elle remplisse la condition:

$$(a_1) \qquad [p, q, r, s] : p \equiv q \,.\, r \equiv s \,.\, f(p, r) \,.\supset f(q, s),$$

il faut qu'elle possède les propriétés suivantes:

$$(b_1) \qquad [p, q] \,.\, f(p, q) \,.\vee: [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \vee q : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\sim(p) \vee q : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \vee \sim(q) : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\sim(p) \vee \sim(q) : \vee . [p, q] \,.\, f(p, q) \equiv p \,.\vee. [p, q] \,.\, f(p, q) \equiv q \,.\vee: [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \equiv q : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \equiv \sim(q) : \vee . [p, q] \,.\, f(p, q) \equiv \sim(q) \,.\vee. [p, q] \,.\, f(p, q) \equiv \sim(p) \,.\vee: [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \,.\, q : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\, p \,.\sim(q) : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\sim(p) \,.\, q : \vee : [p, q] : f(p, q) \equiv .\sim(p) \,.\sim(q) : \vee [p, q] \,.\sim(f(p, q)),$$

$$(c_1) \qquad [p, q] :. f(p, q) \equiv : f(Vr, Vr) \,.\, p \,.\, q \,.\vee. f(Vr, Fl) \,.\, p \,.\sim(q) \,.\vee f(Fl, Vr) \,.\sim(p) \,.\, q \,.\vee. f(Fl, Fl) \,.\sim(p) \,.\sim(q),$$

$$(d_1) \qquad [p, q] \,.\, f(p, q) \,.\equiv. f(Vr, Vr) \,.\, f(Vr, Fl) \,.\, f(Fl, Vr) \,.\, f(Fl, Fl),$$

$$(e_1) \qquad [\exists p, q] \,.\, f(p, q) \,.\equiv. f(Vr, Vr) \vee f(Vr, Fl) \vee f(Fl, Vr) \vee f(Fl, Fl),$$

$$(f_1) \qquad [p, q] : f(Vr, Vr) \,.\, f(Vr, Fl) \,.\, f(Fl, Vr) \,.\, f(Fl, Fl) \,.\supset f(p, q) \supset \supset . f(Vr, Vr) \vee f(Vr, Fl) \vee f(Fl, Vr) \vee f(Fl, Fl).$$

Les conditions (b_1) et (c_1) sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f soit *truth-function*, les autres ne sont que nécessaires [1]).

Nous pouvons également démontrer l'équivalence des propositions (A_1) — la *loi de la substitution*. (B_1) la *loi du nombre de fonctions*, (C_1) — la *loi du développement*, (D_1), (E_1) et (F_1) — le *théorème sur les bornes d'une fonction*, qui attribuent à toute fonction f les propriétés (a_1) — (f_1) mentionnées plus haut [2]).

Il est facile de constater que les propositions (A_1) — (F_1) sont équivalentes non seulement l'une à l'autre, mais aussi à la proposi-

[1]) Je ne cite pas ici les conditions correspondantes aux conditions (j), (k) et (l) examinées au cours du § 4, car elles seraient bien compliquées et, il me semble, dépourvues d'intérêt.

[2]) Dans un ouvrage non-publié de M. Łukasiewicz j'ai rencontré un raisonnement qui peut être résumé en ces termes: les *lois du nombre de fonctions* résultent de l'hypothèse suivante:

$$[p, f] : f(p) \equiv f(Vr) \,.\vee. f(p) \equiv f(Fl)$$

et des hypothèses analogues pour les fonctions à plusieurs arguments. Il est aisé de constater qu'une pareille hypothèse équivant à la *loi de la substitution*.

tion (A) — la *loi de la substitution* concernant les fonctions à un seul argument. D'ailleurs, sans sortir du domaine des fonctions à 2 arguments, on peut former encore toute une série de propositions, équivalentes à la proposition (A) et, au point de vue du contenu, intermédiaires entre les propositions des §§ précédents et celles dont nous venons de parler. En voici les exemples:

$$(A_1') \qquad [p, q, r, f]: p \equiv q . f(p, r) . \supset f(q, r),$$

$$(D_1') \qquad [p, f]: [q] . f(p, q) . \equiv . f(p, Vr) . f(p, Fl).$$

Note II. Sur les fonctions dont les arguments ne sont pas des propositions.

Les problèmes analogues s'imposent dans l'étude des fonctions logistiques, dont les arguments ne sont pas des propositions, mais des fonctions.

Je me borne à n'envisager qu'un seul cas particulier, notamment celui d'une fonction à 1 argument qui est lui-même une des fonctions étudiées aux §§ 1—4

Par analogie à la dénomination de MM Whitehead et Russell[1]), appelons une telle fonction φ *„fonction extensionnelle"*, si elle remplit la condition:

$$(a_2) \qquad [f, g]: = \{f, g\} . \varphi\{f\} . \supset \varphi\{g\}.$$

La proposition:

$$(A_2) \qquad [f. g, \varphi]: = \{f, g\} . \varphi\{f\} . \supset \varphi\{g\}$$

attribuant à toute fonction φ la propriété (a_2) est, problement, indépendante des axiomes de la Logistique, même si l'on y ajoute la proposition (A). Je n'en connais toutefois aucune démonstration.

On peut formuler une série de théorèmes (analogues à ceux de §§ précédents) qui concernent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction φ soit *extensionnelle* ou bien qui établissent les formes équivalentes pour la proposition (A_2). Cependant les démonstrations de ces théorèmes exigent que l'on admette la propositon (A) comme hypothèse. Elles sont d'ailleurs tout à fait semblables aux démonstrations des §§ 1—4; le rôle analogue à celui du **Th. 5** joue ici la proposition

$$[f] . = \{f, vr\} \vee = \{f, as\} \vee = \{f, \sim\} \vee = \{f, fl\},$$

que nous connaissons déjà comme équivalente à notre hypothèse (voir le **Th. 22** du § 2).

[1]) A. N. Whitehead and B. Russell, op. cit., Vol. I, p. 22.

Je signale ici les propositions les plus caractéristiques qui équivalent à la proposition (A_2):

(C_2) $[f, \varphi] :. \varphi\{f\} \equiv :. = \{f, vr\} . \varphi\{vr\} . \vee = \{f, as\} . \varphi\{as\} . \vee$
$= \{f, \sim\} . \varphi\{\sim\} . \vee . = \{f . fl\} . \varphi\{fl\}$

(D_2) $[\varphi] : [f] . \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{vr\} . \varphi\{as\} . \varphi\{\sim\} . \varphi\{fl\},$

(E_2) $[\varphi] : [\exists f] . \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{vr\} \vee \varphi\{as\} \vee \varphi\{\sim\} \vee \varphi\{fl\}$

(F_2) $[f, \varphi] : \varphi\{vr\} . \varphi\{as\} . \varphi\{\sim\} . \varphi\{fl\} . \supset \varphi\{f\} \supset .$
$. \varphi\{vr\} \vee \varphi\{as\} \vee \varphi\{\sim\} \vee \varphi\{fl\},$

(M) $[\varphi] :. [\exists g] : [f] . \varphi\{f\} \equiv g(f(Vr), f(Fl)).$

Les propositions (C_2)—(F_2) répondent, bien entendu, aux propositions (C)—(F) des §§ 2 et 3 ou (C_1)—(F_1) de la Note I. Quant à la proposition (M), elle n'a pas de correspondante dans les séries précédentes de propositions. Il importe peut-être de remarquer qu'on peut facilement tirer de la proposition (M) la proposition (B_2) — la *loi du nombre de fonctions*. Je renonce à citer ici cette loi pour des raisons techniques; elle contient nécessairement 16 sommaires logiques et il serait très pénible de la formuler sans définitions spéciales.