ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Une remarque sur la condition de Baire.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On dit qu'une fonction $f(x)$ *satisfait à la condition de Baire relativement à un ensemble parfait* P, si elle est continue sur P quand on néglige un ensemble de première catégorie par rapport à P [1]). Dans ce cas il existe toujours une infinité des ensembles E de première catégorie par rapport à P, tels que $f(x)$ est continue sur $P-E$: le but de cette Note est de démontrer que parmi ces ensembles il existe toujours *le plus petit*, autrement dit que *si la fonction $f(x)$ satisfait a la condition de Baire relativement à un ensemble parfait P, il existe toujours un ensemble K de première catégorie par rapport à P, qu'il faut et qu'il suffit négliger, pour que $f(x)$ soit continue sur $P-K$.*

Supposons donc que la fonction $f(x)$ satisfait à la condition de Baire relativement à l'ensemble parfait P. Désignons par K l'ensemble de tous les points x de P, tels qu'il n'existe aucun ensemble $Q=Q(x)$ qui soit de 1$^{\text{re}}$ catégorie par rapport à P, et tel que $x\varepsilon(P-Q)$ et que $f(x)$ soit sur $P-Q$ continue au point x Je dis que K est l'ensemble cherché.

En effet, soit E un ensemble donné quelconque qui est de 1$^{\text{re}}$ catégorie sur P et tel que $f(x)$ est continue sur $P-E$ (de tels ensembles E existent, d'après l'hypothèse sur la fonction $f(x)$). Il résulte de la définition de l'ensemble K que $(P-E)K=0$, donc $K\subset E$. Par conséquent K est de 1$^{\text{re}}$ catégorie par rapport à P et fait partie de tout ensemble E qui est de 1$^{\text{re}}$ catégorie par rapport à P et tel que $f(x)$ est continue sur $P-E$.

[1]) On prouve sans peine que la condition resterait la même, si l'on remplaçait dans son énoncé le mot „continue" par „ponctuellement discontinue".

Il nous reste donc à démontrer que $f(x)$ est continue sur $P-K$. Or, supposons le contraire et soit x_0 un point de $P-K$ auquel $f(x)$ est discontinue sur $P-K$, $\omega = 3\alpha$ - l'oscillation de $f(x)$ sur $P-K$ au point x_0: nous avons donc $\alpha > 0$.

Il résulte de $x_0 \varepsilon (P-K)$ et de la définition de l'ensemble K qu'il existe un ensemble Q qui est de 1re catégorie par rapport à P et tel que $x_0 \varepsilon (P-Q)$ et que $f(x)$ est sur $P-Q$ continue au point x_0: il existe donc un nombre positif $\delta > 0$ tel que

$$(1) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \alpha \quad \text{pour} \quad x \varepsilon (P-Q), \ |x - x_0| < \delta.$$

Or, l'oscillation de $f(x)$ sur $P-K$ au point x_0 étant $\omega = 3\alpha > 2\alpha$ il existe un point x_1, tel que

$$(2) \qquad |f(x_1) - f(x_0)| > 2\alpha, \quad x_1 \varepsilon (P-K), \quad |x_1 - x_0| < \delta.$$

De (1) et (2) résulte

$$(3) \qquad |f(x) - f(x_1)| > \alpha \quad \text{pour} \quad x \varepsilon (P-Q), \ |x - x_0| < \delta.$$

Or, d'après (2), nous avons $x_1 \varepsilon (P-K)$: il en résulte, d'après la définition de K, qu'il existe un ensemble Q_1 qui est de 1re catégorie par rapport à P et tel que $x_1 \varepsilon (P-Q_1)$ et que $f(x)$ est sur $P-Q_1$ continue au point x_1. Par conséquent, il existe un nombre positif δ_1, tel que

$$(4) \qquad |f(x) - f(x_1)| < \alpha \quad \text{pour} \quad x \varepsilon (P-Q_1), \ |x - x_1| \leqslant \delta_1,$$

et nous pouvons encore supposer que le nombre δ_1 satisfait aux inégalités

$$(5) \qquad \delta_1 < \delta + x_0 - x_1 \quad \text{et} \quad \delta_1 < \delta + x_1 - x_0,$$

puisque, d'après (2), les nombres $\delta + x_0 - x_1$ et $\delta + x_1 - x_0$ sont positifs.

D'après (5) on voit sans peine que l'inégalité $|x - x_1| \leqslant \delta_1$ entraîne l'inégalité $|x - x_0| < \delta$: la formule (3) donne donc, à plus forte raison:

$$(6) \qquad |f(x) - f(x_1)| > \alpha \quad \text{pour} \quad x \varepsilon (P-Q), \ |x - x_1| \leqslant \delta_1.$$

Désignons par S l'intervalle $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$; x_1 étant, d'après (2) un point de P, l'ensemble PS sera une portion de l'ensemble parfait P.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Il résulte sans peine des formules (4) et (6) que les formules

$$x \varepsilon (P - Q_1) S \quad \text{et} \quad x \varepsilon (P - Q) S$$

sont incompatibles. On a donc

$$(P - Q_1)(P - Q) S = 0,$$

ce qui donne tout de suite

$$PS \subset Q + Q_1,$$

ce qui est impossible, PS étant une portion de l'ensemble parfait P et l'ensemble $Q + Q_1$ étant de 1re catégorie par rapport à P.

La fonction $f(x)$ est donc continue sur $P - K$. Toutes les propriétés désirées de l'ensemble K sont donc démontrées.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki