Un théorème sur la puissance des ensembles ordonnés.

Par

Paul Urysohn (Moscou).

Le but de cette Note est de résoudre le problème suivant posé par M. Sierpiński[1]):

„*Un ensemble ordonné (linéairement) dont tous les sous-ensembles bien ordonnés (croissants et décroissants) sont au plus dénombrables, a-t-il nécessairement une puissance non supérieure à celle du continu?*"

Nous allons voir que la réponse est *affirmative.*

1. Soit E un ensemble ordonné.

Nous appellerons *intervalle élémentaire* (a, b) l'ensemble des points x de E qui vérifient la relation

$$a < x < b \qquad \text{(égalité exclue [2]));}$$

nous donnerons encore ce même nom à l'ensemble $(\ , b)$ des points qui précèdent b, et à l'ensemble $(a, \ )$ des points qui suivent a.

En appelant *voisinage* du point x tout intervalle élémentaire qui le contient, on transforme évidemment E en un espace topologique de M. Hausdorff[3]) c. à d. que les quatre axiomes de M. Hausdorff[4]) sont vérifiés. On obtient ainsi les définitions des ensembes fermés[5]), des domaines[6]), etc.

1) *Fundamenta Math.* II, p. 286, problème 12.

2) Un intervalle (a, b) peut, néanmoins, posséder un premier élément a_1; $[a, a_1]$ est en ce cas un saut de E.

3) Hausdorff. *Grundzüge der Mengelehre*, Leipzig, 1914, p. 214.

4) Ibid. p. 213.

5) Ibid. p. 221.

6) Ibid. p. 215.

Déf. 1. Un ensemble A sera dit un *morceau* de E si les deux relations

$$a+b \subset A,$$
$$a < c < b$$

entraînent toujours la troisième:

$$c \subset A.$$

Nous appellerons aussi morceaux l'ensemble vide et les ensembles composés d'un seul point [1]).

Lemme 1. Le produit d'une famille quelconque de morceaux est encore un morceau.

Lemme 2. La somme d'une famille quelconque de morceaux contenant tous un même point c, est encore un morceau.

J'ommets les démonstrations qui ne présentent aucune difficulté.

Déf. 2. Nous appellerons *composant du point x de l'ensemble M* le plus grand morceau A tel que

$$x \subset A \subset M\ ^{2)}.$$

Lemme 3. Deux composants d'un ensemble M sont ou bien identiques, ou bien sans points communs; tout ensemble se décompose d'une façon unique en composants.

Lemme 4. Tout composant d'un domaine est lui-même un domaine.

Déf. 3. Un domaine ne possédant qu'un seul composant sera dit *intervalle*.

C'est une généralisation de la notion d'un intervalle élémentaire.

Tout domaine se décompose d'une façon naturelle en intervalles sans points communs deux à deux, à savoir ses composants. Une telle décomposition n'est pas d'ailleurs la seule qui soit possible, car p. ex. la somme de deux intervalles séparés par un saut ou une lacune, est encore un intervalle. Remarquons cependant que la décomposition naturelle (en composants) nous procure une famille d'intervalles dont la puissance est non supérieure à la puissance de toute autre famille de la sorte.

[1]) Un morceau peut être composé de deux points; ces points forment alors un saut de E.

[2]) On ne confondera pas cette notion avec celle qui est fondée sur la *connexité* (Hausdorf, l. c. p. 245). Les deux notions coïncident, d'alleurs, lorsque E est *continu* (c. à d. sans sauts et sans lacunes).

Déf. 4. Soit F un ensemble fermé. Tout composant du domaine $E - F$ sera appellé *intervalle contigu à* F.

Nous désignerons par $\mathfrak{m}(F)$ la puissance de F, et par $\mathfrak{n}(F)$ celle de la famille de ses intervalles contigus. D'après une remarque faite tout-à-l'heure, si l'on décompose $E - F$ en $\mathfrak{a}$ intervalles sans points communs deux à deux, on aura

$$\mathfrak{n}(F) \leqslant \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Envisageons enfin la décomposition d'un morceau A en deux ensembles que voici:

1) son *bord*[1]) $\beta(A)$, et
2) son intérieur $\iota(A) = A - \beta(A)$.

Lemme 5. L'intérieur $\iota(A)$ d'un morceau A est un intervalle.

Lemme 6. Le bord $\beta(A)$ d'un morceau A est composé tout au plus de deux points.

Ce ne sont, en effet, que le premier et le dernier point de A qui peuvent (s'ils existent) être agrégés à $\beta(A)$[2]).

2. Première construction. Soit F un ensemble fermé. Choisissons un point déterminé x dans chaque intervalle I_x contigu à F. Ceci fait, posons

$$\Phi(F) = F + \Sigma x.$$

$E - \Phi$ est un domaine; on a, en effet,

$$E - \Phi = (E - F) - \Sigma x = \Sigma I_x - \Sigma x = \Sigma(I_x - x).$$

Φ est donc un ensemble fermé;

$$\mathfrak{m}(\Phi) = \mathfrak{m}(F) + \mathfrak{n}(F).$$

Or $I_x - x$ possède tout au plus deux composants; nous obtenons donc, en tenant compte de (1):

$$\mathfrak{n}(\Phi) \leqslant 2\,\mathfrak{n}(F).$$

En particulier, si F satisfait aux relations

$$\mathfrak{m}(F) \leqslant \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{n}(F) \leqslant \mathfrak{c}, \tag{2}$$

il en sera de même de $\Phi(F)$.

[1]) Hausdorff, l. c. p. 214 (*Rand*).

[2]) Il est, d'ailleurs, à remarquer que le premier point de A (même s'il existe) n'est pas nécessairement agrégé à $\beta(A)$.

Deuxième construction. Soit

$$F^1,\ F^2, \ldots,\ F^n, \ldots$$

une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Nous désignerons par $I^n_{x_n}$ les intervalles contigus à F^n [1]). Chaque ensemble de la forme

$$A_{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots} = \prod_{n=1}^{\infty} I^n_{x_n}$$

est un morceau (lemme 1); et il résulte de l'identité

$$I^n_{x_n} \cdot I^n_{y_n} = 0, \qquad (x_n \neq y_n)$$

que deux A ne peuvent avoir un point commun que lorsque tous leurs indices coïncident. Il peut y avoir, d'ailleurs, parmi les A des ensembles vides; la puissance de la famille des A *non vides* est donc

(3) $$\leqslant \mathfrak{n}(F^1) \cdot \mathfrak{n}(F^2) \ldots \mathfrak{n}(F^n) \ldots$$

Posons

$$\Psi(F^1, F^2, \ldots, F^n, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n + \sum_{x_1 \ldots x_n \ldots} \beta(A_{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots})\ ^{2)}.$$

Il vient:

$$E - \sum_{n=1}^{\infty} F^n = \prod_{n=1}^{\infty} (E - F^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{x_n} I^n_{x_n} = \sum_{x_1 \ldots x_n \ldots} \prod_{n=1}^{\infty} I^n_{x_n} =$$

$$= \sum_{x_1 \ldots x_n \ldots} A_{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots};$$

$$E - \Psi = \left(E - \sum_{n=1}^{\infty} F^n\right) - \sum \beta(A_{x_1 x_2 \ldots x_n \ldots}) =$$

$$= \sum A_{x_1 \ldots x_n \ldots} - \sum \beta(A_{x_1 \ldots x_n \ldots}) = \sum [A_{x_1 \ldots x_n \ldots} - \beta(A_{x_1 \ldots x_n \ldots})] =$$

$$= \sum_{x_1 \ldots x_n \ldots} \iota(A_{x_1 \ldots x_n \ldots}).$$

$E - \Psi$ est donc un domaine; Ψ est un ensemble fermé, et l'on obtient d'après (1), (3) et le lemme 6:

[1]) $\{x_n\}$ est un ensemble d'indices dont la puissance est $= \mathfrak{n}(F^n)$.

[2]) La dernière somme est la somme des bords de tous les A.

$$\mathfrak{m}(\Psi) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(F^n) + 2 \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{n}(F^n),$$

$$\mathfrak{n}(\Psi) \leqslant \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{n}(F^n).$$

En particulier, si tous les F^n satisfont aux relations (2), il en sera encore de même de $\Psi(F^1, F^2, \dots, F^n, \dots)$:

$$\mathfrak{m}(\Psi) \leqslant \mathfrak{c}, \ \mathfrak{n}(\Psi) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Remarque I. Il est évident que $\Psi(F^1, F^2, \dots, F^n, \dots)$ ne dépend que des ensembles F^n et ne dépend pas de la manière dont on les a numérotés. Par conséquent, si nous avons une suite transfinie de type α ($\alpha < \Omega$) d'ensembles fermés

$$F^1, F^2, \dots, F^\omega, \dots, F^\gamma, \dots \qquad (\gamma < \alpha)$$

le symbole $\underset{\gamma<\alpha}{\Psi}(F^1, \dots, F^\gamma, \dots)$ aura un sens bien défini.

Remarque II. Il est évident que tout intervalle contigu à $\Psi(F)$ est un vrai sous-ensemble d'un certain intervalle contigu à F. De même, tout intervalle contigu à $\Psi(F^1, \dots, F^n, \dots)$ est un sous ensemble d'un certain intervalle contigu à F^n (ce n'est pas d'ailleurs nécessairement un vrai sous ensemble).

3. Supposons maintenant que la puissance de E surpasse celle du continu:

$$\mathfrak{m}(E) > \mathfrak{c}. \tag{4}$$

Nous allons construire une suite transfinie (de type Ω) d'ensembles fermés croissants. Nous procédons à cet effet par induction transfinie; nous posons notamment

$F^1 = 0$ (il n'y a donc qu'un seul intervalle contigu à F^1, à savoir E tout entier);

$F^\alpha = \Psi(F^{\alpha-1})$ quand $\alpha - 1$ existe;

$F^\alpha = \underset{\gamma<\alpha}{\Psi}(F^1, \dots, F^\gamma \dots)$ dans le cas contraire.

Nous ne serons jamais arrêtés dans cette construction; en effet, un arrêt ne pourrait se produire que si l'on obtenait

$$F^\alpha = E \tag{5}$$

pour un certain nombre α de la deuxième classe. Or on voit immédiatement (par induction transfinie) que tous les F^α satisfont aux relations (2); l'identité (5) serait donc en contradiction avec (4).

On voit de plus que la somme de tous les F^α ne peut être égale à E, car la puissance de cette somme est, en vertu de (2),

$$\leqslant \mathfrak{c} . \aleph_1 = \mathfrak{c};$$

il existe donc un point p de E étranger à tous les F^α:

$$p \subset E - \sum_{\alpha=1}^{\prec\Omega} F^\alpha.$$

Désignons par I_p^α celui des intervalles contigus à F^α qui contient p. Il résulte de la remarque II (§ 2) que

$$I_p^\alpha \supset I_p^\beta \quad \text{quand} \quad \alpha < \beta,$$

et

$$I_p^\alpha \neq I_p^{\alpha+1}.$$

Nous pouvons donc choisir un point dans chacun des ensembles $I_p^\alpha - I_p^{\alpha+1}$; nous désignerons ce point par y_α s'il précède p; par z_α, dans le cas contraire. Nous obtenons ainsi deux suites de points

(6) $$y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \ldots, y_{\alpha_\sigma}, \ldots$$

et

(7) $$z_{\beta_1}, z_{\beta_2}, \ldots, z_{\beta_\tau}, \ldots$$ [1]

dont l'une au moins est indénombrable (sa puissance est $= \aleph_1$). Or on voit sans peine que (6) est une suite croissante, et (7) décroissante. E contient donc nécessairement des sous-ensembles bien ordonnés (croissants ou décroissants) qui sont indénombrables. Par conséquent:

chaque ensemble ordonné dont tous les sous ensembles bien ordonnés (croissants et décroissants) sont au plus dénombrables a une puissance non supérieure à celle du continu, c. q. f. d.

[1] L'ensemble de tous les indices α_σ et β_τ coïncide avec l'ensemble des nombres de la deuxième classe.

Moscou, le 21 octobre 1922.