Sur une propriété des fonctions de M. Hamel.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est démontrer le théorème suivant qui m'a été suggeré par une question. posée par mon élève, M. O. Nikodym:

Théorème: *Une fonction discontinue d'une variable réelle* $f(x)$ *satisfaisant à l'équation fonctionnelle*

$$(1) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ne peut être majorée par aucune fonction mesurable.

De ce théorème résulte tout de suite que *si* $f(x)$ *est une solution de l'équation* (1) *et s'il existe une fonction mesurable* (*L*), $\varphi(x)$, *telle que* $f(x) \leqslant \varphi(x)$ (pour tout x réel), $f(x)$ *est une fonction continue* (donc, d'après Cauchy, de la forme Ax). En particulier, *toute fonction mesurable* (*L*), *satisfaisant à l'équation* (1), *est continue* [1]).

Soient: $f(x)$ une fonction discontinue, satisfaisant à l'équation (1) [2]), (a, b) — un intervalle donné, A — un nombre réel donné quelconque, ε un nombre positif. Nous prouverons que la mesure extérieure (lebesguienne) de l'ensemble

$$(2) \qquad E(A, a, b) = \mathrm{E}[f(x) > A,\ a \leqslant x \leqslant b]$$

est

$$(3) \qquad m_e E(A, a, b) = b - a.$$

[1]) M. Fréchet: *L'Enseignement Math.* 1913 p. 390; W. Sierpiński: *Fund. Math* t. I, p 116; S. Banach: *Fund. Math.* t. I, p. 123; H. Hahn *Theorie der reellen Funktionen* I (Berlin 1921), p. 583.

[2]) L'existence des solutions discontinues de l'équation (1) a été démontrée en 1905 par M. Hamel (à l'aide du théorème de M. Zermelo): *Math. Ann.* 60, p. 460.

Nous avons évidemment

$$\mathrm{E}[a \leqslant x \leqslant b] = \sum_{n=1}^{\infty} E(-n, a, b),$$

donc

$$m_e \mathrm{E}[a \leqslant x \leqslant b] = \lim_{N=\infty} m_e \sum_{n=1}^{N} E(-n, a, b),$$

c'est-à-dire

$$b - a = \lim_{n=\infty} m_e E(-N, a, b):$$

il existe donc un indice N tel que

$$m_e E(-N, a, b) > b - a - \varepsilon. \tag{4}$$

$f(x)$ étant une fonction, satisfaisant à l'équation (1), il existe, comme on sait, un nombre h, tel que

$$0 < h < \varepsilon,\ h < b - a \tag{5}$$

et

$$f(h) > N + A\ ^{1)}. \tag{6}$$

D'après (4) et (5) nous trouvons sans peine:

$$m_e E(-N, a, b - h) > b - a - 2\varepsilon. \tag{7}$$

Désignons par H l'ensemble qu'on obtient par une translation de l'ensemble $E(-N, a, b-h)$ de longueur h: l'ensemble H sera évidemment contenu dans l'intervalle (a, b), et nous aurons, d'après (7):

$$m_e H > b - a - 2\varepsilon. \tag{8}$$

Soit x un point de l'ensemble H: le point $x - h$ appartient donc à $E(-N, a, b-h)$, donc

$$f(x-h) > -N. \tag{9}$$

Or, d'après (1), $f(x) = f(x-h) + f(h)$, donc, d'après (9) et (6):

$$f(x) > A,$$

ce qui prouve que x (qui est un point de l'intervalle (a, b), comme point de H) appartient à l'ensemble $E(A, a, b)$.

[1]) V. p. e. G. Darboux: *Math. Ann.* 17, p. 56.

Nous avons donc démontré que

$$H \subset E(A, a, b);$$

l'inégalité (8) donne donc:

$$m_e E(A, a, b) > b - a - 2\varepsilon;$$

le nombre positif ε étant arbitraire, cette inégalité donne:

$$m_e E(A, a, b) \geqslant b - a,$$

ce qui prouve la formule (3).

Admettons maintenant qu'il existe une fonction mesurable (finie) $\varphi(x)$, telle que

(10) $$f(x) \leqslant \varphi(x)$$

pour tout x réel.

On aurait donc, pour tout A réel et tout intervalle (a, b):

$$\mathrm{E}[f(x) > A,\ a \leqslant x \leqslant b] \subset \mathrm{E}[\varphi(x) > A,\ a \leqslant x \leqslant b],$$

donc, d'après (3):

$$\mathrm{E}[\varphi(x) > A,\ a \leqslant x \leqslant b] = b - a,$$

pour tout A réel ce qui est impossible, puisque $\varphi(x)$ est une fonction mesurable.

Notre théorème est ainsi démontré.

Remarquons encore qu'on pourrait démontrer sans peine le théorème suivant: *Toute fonction $f(x)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle* (1) *et à la condition de Baire*[1]) *est continue.*

(En effet on démontre sans peine que si $f(x)$ est une solution discontinue de l'équation (1), les ensembles $\mathrm{E}[f(x) > 0]$ et $\mathrm{E}[f(x) < 0]$ sont de deuxième catégorie dans tout intervalle, d'où résulte que $f(x)$ ne satisfait à la condition de Baire dans aucun intervalle).

[1]) C. à d ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de 1re catégorie par rapport à cet ensemble parfait.