Sur l'équation fonctionnelle d'Abel.

Par

R. Tambs Lyche (Trondlyim, Norvège).

Le but de cette Note est de démontrer le suivant

Théorème: *Pour que l'équation* d'Abel[1])

(1) $$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c,$$

où $f(x)$ est une fonction donnée d'une variable réelle, définie dans un ensemble E, et c une constante non nulle, admette au moins une solution $\varphi(x)$ dans l'ensemble E, il faut et il suffit que l'égalité $f_k(x) = x$, où $f_k(x)$ désigne la k-ième itérée de $f(x)$, ne subsiste pour aucun point x de E et aucun indice k.

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction donnée, définie dans un ensemble de nombres réels E, c une constante non nulle, et supposons qu'il existe une fonction d'une variable éelle $\varphi(x)$, telle qu'on ait la formule (1) pour tout nombre x de E.

Posons

(2) $$f_0(x) = f(x), \text{ et } f_k(x) = f(f_{k-1}(x)), \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

et admettons qu'il existe un nombre x_0 de E et un indice naturel k, tels que

(3) $$f_k(x_0) = x_0.$$

La fonction $f(x)$ n'étant définie que pour les nombres x de E, il faut, pour que (3) ait un sens (d'après (2)), que les nombres $f_1(x_0)$, $f_2(x_0), \ldots, f_{k-1}(x_0)$ appartiennent tous à l'ensemble E, d'où résulte sans peine, d'après (1):

$$\varphi(f_k(x_0)) = \varphi(x_0) + kc,$$

[1]) Oeuvres, Tome II, p. 36.

ce qui donne, d'après (3): $kc = 0$, contrairement à l'hypothèse que $c \neq 0$ La condition de notre théorème est ainsi nécessaire.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction donnée, définie pour tout nombre réel x faisant partie d'un ensemble donné E, et supposons que l'égalité $f(x) = x$ ne subsiste pour aucun nombre x de E et aucun indice naturel k.

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui par lequel M. G. Hamel a démontré l'existence de sa *base*[1]), on déduit du théorème de M. Zermelo l'existence d'un ensemble de nombres réels $B(f)$, tel que pour tout nombre réel x existe un et un seul nombre a de $B(f)$ et un et un seul entier $k \geqslant 0$, tels qu'on a

$$\text{soit } x = f_k(a), \quad \text{soit } f_k(x) = a$$

(ces deux formules ne pouvant évidemment subsister en même temps pour $k > 0$, puisque on aurait $f_{2k}(a) = a$, contrairement à la propriété de $f(x)$).

Définissons maintenant la fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ comme il suit. Les valeurs $\varphi(a)$ étant complètement arbitraires pour les nombres a de $B(f)$, posons, pour les autres x réels

$$\varphi(x) = \varphi(a) + kc,$$

si a est un nombre de $B(f)$ et k un indice naturel, tels que $x = f_k(a)$, et

$$\varphi(x) = \varphi(a) - kc,$$

si a est un nombre de $B(f)$ et k un indice naturel, tels que $f_k(x) = a$.

On voit sans peine, d'après la propriété de l'ensemble $B(f)$. que la fonction $\varphi(x)$ sera ainsi définie pour tout x réel, et on déduit de sa définition qu'elle satisfaira à l'équation (1) pour tout nombre x de E.

On pourrait encore remarquer que les solutions de l'équation (1) ainsi obtenues sont les plus générales et que,, si $\mathfrak{m}$ est la puissance de l'ensemble E, l'ensemble de toutes les solutions différentes de l'équation (1) (dans E) a la puissance $2^{\mathfrak{m}}$.

Remarque de M. Kuratowski. M. Tambs Lyche a recours dans la seconde partie de sa démonstration au théorème de Zermelo et, par conséquent, à la théorie des ensembles bien ordonnés. Or, il est à remarquer qu'on peut éviter ce mode de raisonnement (en appliquant d'ailleurs l'axiome du choix).

[1]) *Math. Ann.* 60, p. 460.

Classifions à cet effet les nombres réels, en rangeant dans la même classe deux nombres x et y, si pour des indices convenablement choisis, on a $f_k(x)=f_l(y)$. Ces classes n'ont pas d'éléments communs, car si $f_k(x)=f_l(y)$ et $f_m(y)=f_n(z)$ où $m \geqslant l$, alors $f_{k+m-l}(x)=f_m(y)=f_n(z)$. Or, choisissons un élément de chacune de ces classes et posons

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(k-l)c$$

où a est l'élément choisi de la classe à laquelle x appartient et k et l sont assujettis à l'égalité $f_k(a)=f_l(x)$; $\varphi(x)$ ne dépend pas de k et l, car si $f_k(a)=f_l(x)$ et $f_m(a)=f_n(x)$ où $m \geqslant k$, alors $f_{l+m-k}(x)=f_m(a)$, donc $f_{l+m-k}(x)=f_n(x)$ d'où $l+m-k=n$ et $k-l=m-n$. La fonction $\varphi(x)$ remplit évidemment l'égalité (1), quelle que soit la valeur de $\varphi(a)$.