Sur un théorème métrique concernant les ensembles fermés.

Par

J. Spława-Neyman (Varsovie).

L'objet de cette Note est un théorème métrique, vrai pour les ensembles linéaires (fermés), mais ne subsistant pas pour les ensembles plans. C'est le théorème suivant.

Soit F un ensemble linéaire fermé et borné de mesure nulle, $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles, telle qu'il existe pour tout point p de F et tout nombre positif ε un intervalle δ de $\mathcal{F}$ de longueur $< \varepsilon$ contenant à son intérieur p. Il existe alors pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre fini d'intervalles $\delta_i (i=1, 2, \dots n)$ de $\mathcal{F}$, recouvrant F et dont la somme de longueurs est $< \varepsilon$ [1]).

Soit, en effet η un nombre positif donné. L'ensemble F étant de mesure nulle, il existe un ensemble ouvert H de mesure $< \eta$ contenant F. Il résulte sans peine de la propriété de la famille $\mathcal{F}$ qu'il existe pour tout point p de F un intervalle δ de $\mathcal{F}$, contenant à son intérieur p et contenu dans H. L'ensemble F étant fermé et borné, il existe, d'après le théorème de Borel, un nombre fini d'intervalles appartenant à $\mathcal{F}$, contenus dans H et recouvrant F: soient

$$(1) \qquad \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

ces intervalles. Nous pouvons évidemment supposer qu'aucun des intervalles (1) n'est contenu dans une somme des autres: il en résulte sans peine que

$$(2) \qquad m(\delta_1) + m(\delta_2) + \dots m(\delta_n) < 2m(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n)$$

[1]) Un théorème analogue peut être énoncé pour les ensembles linéaires fermés et bornes de mesure quelconque: il suffirait de remplacer dans la thèse du théorème la condition que la somme de longueurs des intervalles δ_i soit $< \varepsilon$, par la condition qu'elle soit $< m(F) + \varepsilon$, où $m F)$ est la mesure de F.

Or, les intervalles $\delta_i (i=1, 2, \ldots, n)$ étant contenus dans l'ensemble H qui est de mesure $<\eta$, nous avons

$$m(\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)<\eta;$$

l'inégalité (2) donne donc

$$m(\delta_1)+m(\delta_2)+\ldots+m(\delta_n)<2\eta.$$

La somme de longueurs des intervalles (1), dont l'ensemble recouvre F, est donc $<2\eta$; η étant un nombre positif donné quelconque, notre théorème est démontré.

Nous prouverons maintenant que notre théorème ne subsiste pas pour les ensembles plans. Nous définirons notamment un ensemble fermé et borné F situé dans le plan, et une famille $\mathcal{F}$ de cercles, telle qu'il existe pour tout point p de F et tout $\varepsilon>0$ un cercle de $\mathcal{F}$ de rayon $<\varepsilon$, contenant à son intérieur p, et nous prouverons que

$$(3) \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n$$

étant une suite finie quelconque de cercles de $\mathcal{F}$ dont l'ensemble recouvre F, la somme des aires des cercles (3) est toujours $\geqslant 1$.

Désignons par F le segment $(0, 1)$ de l'axe d'abscisses et faisons correspondre à tout point x de F une suite infinie de cercles $C(x, n)$ $(n=2, 3, \ldots)$, le rayon r_n du cercle $C(x, n)$ étant égal à $\frac{1}{n}$ et les coordonnées x_n, y_n de son centre étant

$$x_n = x \text{ et } y_n = \frac{\sqrt{4n^2-\pi^2}}{2n^2}.$$

On vérifie sans peine que le cercle $C(x, n)$ découpe de l'axe d'abscisses une corde dont la longueur est égale à l'aire du cercle $C(x, n)$.

Désignons par $\mathcal{F}$ la famille de tous les cercles $C(x, n)$, pour $x \varepsilon F$ et $n=2, 3, \ldots$ L'ensemble F et la famille $\mathcal{F}$ possèdent les propriétés énoncées.

Soit, en effet, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ une suite finie de cercles recouvrant F, et soit c_k la corde découpée de l'axe d'abscisse par le cercle C_k. Les cordes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ recouvrent évidemment l'ensemble F, donc

$$m(c_1)+m(c_2)+\ldots+m(c_n)\geqslant 1;$$

la longueur $m(c_k)$ de la corde c_k étant égale à l'aire du cercle C_k, l'inégalité désirée est établie.

Remarquons que notre théorème subsiste pour les espaces à n dimensions, s'il existe pour tout point p de F une sphère appartenant à $\mathcal{F}$ de rayon aussi petit que l'on veut et *dont le centre est en* p.

Je citerai enfin le problème suivant qui m'a été communiqué par M. Sierpiński.

E étant un ensemble linéaire de mesure nulle et $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles telle qu'il existe pour tout point p de E et tout $\varepsilon>0$ un intervalle δ de $\mathcal{F}$ de longueur $<\varepsilon$ contenant à son intérieur p, existe-t-il pour tout $\varepsilon>0$ une suite (fini ou infinie) d'intervalles de $\mathcal{F}$ recouvrant E et dont la somme de longueurs est $<\varepsilon$?