Remarque sur un théorème de M. Kline.

Par

Casimir Zarankiewicz (Varsovie).

Le but de cette Note est de déduire quelques conséquences du théorème B de M. Kline, publié dans l'article précédent.

J'appelle *point de connexité* d'un continu C tout point p de C tel que, S étant un sous-ensemble connexe arbitraire de C contenant p, $C - S$ est connexe.

Théorème. *Si le continu C contient un point de connexité, C appartient à une de quatre classes des continus:*

1° *rayons* [1])

2° *continus composés d'une courbe simple fermée et d'un arc simple n'ayant en commun qu'une extrémité de l'arc simple*

3° *arcs simples*

4° *courbes simples fermées.*

Démonstration. Soit v un point de connexité de C. Transformons l'espace par l'inversion du centre v [2]) et, X étant un ensemble quelconque des points, désignons par X^* l'image de l'ensemble X ainsi transformé. L'inversion étant une transformation homéomorphe, lorsqu'on néglige le centre d'inversion, la connexité de l'ensemble $C - v$ entraîne celle de $(C-v)^*$.

[1]) L'arc simple, la courbe simple fermée, le rayon et la courbe simple ouverte sont des continus homéomorphes resp. du segment, d'une circonférence, d'une demi-droite et d'une droite géométrique.

[2]) L'espace est dit transformé par l'inversion du centre v lorsque à chaque point $x\,(\neq v)$ correspond un point x^* situé sur le rayon géométrique $\overrightarrow{vx}$ à distance $\varrho[v, x^*] = \dfrac{1}{\varrho[v, x]}$. Cf. C. Kuratowski. *Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis Situs*, *Fund. Math.* t. IV p. 151.

Posons: $K=(C-v)^*$ si, C est borné, et $K=(C-v)^*+v$ dans le cas contraire.

En vertu de cette convention K est fermé et comme par hypothèse $(C-v)^*$ est connexe, K est un continu non-borné.

Je dis, que S étant un sous-ensemble connexe non-borné de K, $K-S$ est connexe. Supposons par contre qu'il existe un sous-ensemble connexe et non-borné S de K tel que

$$K-S=M+N, \quad M\neq 0\neq N, \quad M.N=0$$

où M et N sont relativement fermés dans $M+N$. Par conséquent

$$C=S^*+v+M^*+N^*,$$

d'où

$$C-(S^*+v)=M^*+N^*. \tag{1}$$

Or, S étant connexe et non-borné, S^* est également connexe et v en est un point d'accumulation; donc S^*+v est connexe. D'autre part, les ensembles M et N étant non vides, disjoints et fermés relativement dans leur somme, il en est de même de M^* et N^*. La formule (1) prouve donc que l'ensemble $C-(S^*+v)$ n'est pas connexe, contrairement à l'hypothèse que v est un point de connexité de C.

D'après le théorème cité de M. Kline, le continu K appartient donc à une de trois classes des continus: (*a*) rayons, (*b*) courbes simples ouvertes, (*c*) continus composés d'un rayon et d'une courbe simple fermée n'ayant en commun que le sommet du rayon.

Conformément à ces trois cas et suivant que C est borné on non, six cas peuvent se présenter: C est

(a') un arc simple, (a'') un rayon,

(b') courbe simple fermée, (b'') courbe simple ouverte,

(c') continu du type 2° (dans l'énoncé du théorème)

(c'') continu composé d'une courbe simple ouverte et un arc simple n'ayant en commun qu'une extremité de l'arc.

Il est aisé de voir que les continus (a'), (a''), (b') et (c') contiennent des points de connexité, tandis que les continus (b'') et (c'') n'en contiennent aucun. Notre théorème est donc établi.

On en obtient les corollaires suivants:

Si C contient *un seul* point de connexité, C est du type 2° ou 1° suivant que C est borné ou non.

Si C contient *deux et seulement deux* points de connexité, C est du type 3°.

Si C contient *plus de deux* points de connexité, C est du type 4°.

Ce dernier corollaire présente une généralisation du théorème A de M. Kline (l. c.), qui peut être énoncé de manière suivante: Si *tous* les points d'un continu C en sont des points de connexité, C est une courbe simple fermée. Comme on voit il suffit de supposer que C contient *plus de deux* points de connexité.