Démonstration d'un théorème sur les fonctions additives d'ensemble.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

(Extrait d'une lettre adressée à M. Maurice Fréchet).

Mon cher Collègue.

Dans ma lettre du 8 avril j'ais Vous écrit que mon élève M. Saks a remarqué que le théorème de M. Franck [1]) se trouve chez H. Hahn (*Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 404, Satz IX). Les derniers jours j'ai trouvé une démonstration de ce théorème (sans utiliser des nombres transfinis) qui me semble plus simple que celle de M. Hahn. Permettez moi de Vous la communiquer.

Théorème. Soit une fonction d'ensembles f, additive et définie sur la famille additive d'ensembles T. Tout ensemble E_0 de la famille T se divise en deux ensembles P et N, tels que $P\varepsilon T$, $N\varepsilon T$ et

$$f(E) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad E \subset P,\ E\varepsilon T, \tag{1}$$

$$f(E) \leqslant 0 \quad \text{pour} \quad E \subset N,\ E\varepsilon T. \tag{2}$$

Démonstration. Soit b la borne supérieure de tous les nombres $f(E)$ pour $E \subset E_0$, $E\varepsilon T$ (Comme on sait, b est un nombre fini). Il résulte de la définition du nombre b qu'il existe pour tout n naturel un ensemble E_n, tel que $E_n \subset E_0$, $E_n \varepsilon T$ et

$$f(E_n) > b - \frac{1}{2^n}. \tag{3}$$

[1]) V. ce volume, p. 257.

Posons

(4) $$P = \lim E_n = H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

où

(5) $$H_n = E_n + E_{n+1} + E_{n+2} + \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et posons

(6) $$N = E_0 - P;$$

je dis que P et N sout les ensembles cherchés.

En effet, admettons que la formule (1) ne subsiste pas. Il existe alors un ensemble E, tel que

(7) $$E \subset P, \quad E \varepsilon T, \quad \text{et} \quad f(E) = -\nu < 0.$$

Soit n un nombre naturel, tel que

(8) $$\frac{1}{2^{n-1}} < \nu.$$

D'après (7) et (4), nous avons $E \subset H_n$, donc, d'après (5):

$$E = H_n E = E_n E + E_{n+1}(E - E_n) + E_{n+2}[E - (E_n + E_{n+1})] + \ldots =$$
$$= E'_n + E'_{n+1} + E'_{n+2} + \ldots,$$

où $E'_{n+k} (k = 0, 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles disjoints et

(9) $$E'_{n+k} \subset E_{n+k}, \quad E'_{n+k} \varepsilon T, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nous avons donc:

(10) $$f(E) = f(E'_n) + f(E'_{n+1}) + f(E'_{n+2}) + \ldots$$

D'après (3) nous avons

(11) $$f(E_{n+k}) > b - \frac{1}{2^{n+k}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

et, d'après (9): $E_{n+k} = E'_{n+k} + (E_{n+k} - E'_{n+k})$, $(E_{n+k} - E'_{n+k}) \varepsilon T$, donc, d'après (11):

(12) $$f(E'_{n+k}) + f(E_{n+k} - E'_{n+k}) = f(E_{n+k}) > b - \frac{1}{2^{n+k}}, \quad (k = 0, 1, \ldots);$$

or, d'après la définition du nombre b, nous avons

$$f(E_{n+k} - E'_{n+k}) \leqslant b,$$

donc, d'après (12):

$$f(E'_{n+k}) > -\frac{1}{2^{n+k}} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

et (10) donne:

$$f(E) = \sum_{k=0}^{\infty} f(E'_{n+k}) > -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = -\frac{1}{2^{n-1}},$$

donc, d'après (8):

$$f(E) > -\nu,$$

contrairement à (7).

Nous avons donc démontré la formule (1).

Admettons maintenant que la formule (2) ne subsiste pas. Il existe alors un ensemble E tel que $E \subset N$, $E \varepsilon T$ et

$$f(E) = \pi > 0. \tag{13}$$

Soit n un nombre naturel, tel que

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \pi. \tag{14}$$

D'après (6), (4) et (5), nous trouvons sans peine

$$N \subset (E_0 - E_n) + (E_0 - E_{n+1}) + (E_0 - E_{n+2}) + \ldots,$$

donc, d'après $E \subset N$, $E \varepsilon T$:

$$E = E'_n + E'_{n+1} + E'_{n+2} + \ldots, \tag{15}$$

où $E'_{n+k} (k=0, 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles disjoints et tels que

$$E'_{n+k} \subset (E_0 - E_{n+k}), \quad \text{et} \quad E'_{n+k} \varepsilon T \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

D'après (16) nous avons

$$E'_{n+k} E_{n+k} = 0, \quad E'_{n+k} + E_{n+k} \subset E_0,$$

donc, d'après la définition du nombre b:

$$f(E'_{n+k}) + f(E_{n+k}) = f(E'_{n+k} + E_{n+k}) \leqslant b,$$

donc, d'après (11):

$$f(E'_{n+k}) < \frac{1}{2^{n+k}}, \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

ce qui donne, d'après (15):

$$f(E) = \sum_{k=0}^{\infty} f(E'_{n+k}) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

donc, d'après (14):

$$f(E) < \pi,$$

contrairement à (13).

La formule (2) est ainsi établie et le théorème est démontré.

Varsovie, le 12 Mai 1928.