Sur une propriété des fonctions additives d'ensemble.

Par

R. Franck (Strasbourg).

1. Définitions et notations. Étant données une famille additive d'ensembles T et une fonction additive d'ensembles f, définie sur la famille T, j'appelle *ensemble positif (négatif) relativement à la fonction f* tout ensemble de la famille T, tel que la valeur de la fonction f sur cet ensemble est positive (négative). J'affecte un tel ensemble de l'indice p (ou n): $f(E^p) > 0$ $(f(e^n) < 0)$

Si les sous-ensembles (appartenant à la famille T) de l'ensemble considéré sont tous positifs (négatifs ou presque nuls) relativement à la fonction f, je dis que l'ensemble considéré est *monotone positif (négatif) relativement à la fonction f.*

D'une façon générale j'appelle ensemble *monotone relativement à la fonction f* tout ensemble sur les sous-ensembles duquel la fonction ne change pas de signe.

2. Lemme. *Etant donnée la fonction additive d'ensembles f, définie sur la famille additive d'ensembles T, si E est un ensemble appartenant à la famille T et non presque nul relativement à la fonction f, parmi les sous-ensembles de E appartenant à la famille T il en est un au moins qui est monotone relativement à la fonction f*

En effet si la propriété énoncée dans le lemme n'était pas vérifiée, c'est que tout sous ensemble de E appartenant à T (et E lui-même) pourrait se décomposer en deux sous-ensembles (appartenant à T) l'un positif et l'autre négatif relativement à la fonction f. Je vais essayer de montrer qu'en supposant cette dernière hypothèse réalisée on aboutit à une contradiction avec les propriétés des fonctions additives. Supposons donc que l'ensemble E et tous ses sous-ensembles (appartenant à la famille T) se divisent chacun en deux sous-ensembles (appartenant aussi à la famille T) l'un positif et l'autre négatif relativement à la fonction f. Soit E_1^p l'ensemble positif et E_1^n l'ensemble négatif.

$$f(E) = f(E_1^p) + f(E_1^n) \quad f(E_1^p) > 0 \quad f(E_1^n) < 0.$$

E_1^p étant compris dans E, $\int\limits_{E_1^p} |df| < \int\limits_E |df|$.

D'autre part $f(E_1^n)$ étant négatif, $f(E) < f(E_1^p)$.

On arrive finalement aux inégalités suivantes.

$$\int\limits_E |df| > \int\limits_{E_1^p} |df| > f(E_1^p) > f(E) \quad E \supset E_1^p$$

E_1^p étans un sous-ensemble de E appartenant à la famille T et positif relativement à la fonction f, il se divise en deux sous-ensembles E_2^p et E_2^n (appartenant à T), qui sont le premier positif et le deuxième négatif relativement à la fonction f. Pour les mêmes raisons que précédemment on obtient les inégalités

$$E \supset E_1^p \supset E_2^p \quad \int\limits_E |df| > \int\limits_{E_1^p} |df| > \int\limits_{E_2^p} |df| > f(E_2^p) > f(E_1^p) > f(E).$$

On peut de nouveau décomposer l'ensemble E_2^p en deux ensembles et continuer ainsi de suite: si par le procédé employé on est arrivé à un ensemble E_m^p, comme $f(E_m^p)$ a une valeur positive, que E_m^p appartient à la famille T et que $\int\limits_{E_m^p} |df| > f(E_1^p)$, on peut encore décomposer l'ensemble E_m^p en deux ensembles de signes contraires appartenant à la famille T: E_{m+1}^p et E_{m+1}^n. Nos hypothèses nous permettent donc d'établir une suite infinie dénombrable d'ensembles $E, E_1^p, E_2^p, \ldots, E_m^p, \ldots$, appartenant à T et vérifiant les inégalités suivantes $E \supset E_1^p \supset E_2^p \supset \ldots \supset E_m^p \supset \ldots$

$$f(E) < f(E_1^p) < \ldots < f(E_m^p) < \ldots < \int\limits_{E_m^p} |df| < \ldots < \int\limits_{E_1^p} |df| < \int\limits_E |df|.$$

Or en raison de l'additivité de famille T, la suite monotone décroissante d'ensembles $E, E_1^p, E_2^p, \ldots, E_m^p, \ldots$ a un ensemble limite E_ω^p, appartenant à T et compris dans tous les ensembles de la suite, La suite des quantités $f(E), f(E_1^p), \ldots, f(E_m^p) \ldots$ est croissante et, comme tous ses termes sont inférieurs à $\int_E |df|$, elle a une limite inférieure à $\int_E |df|$. De même la suite $\int_{E_1^p} |df|, \int_{E_m^p} |df|, \ldots \int |df|, \ldots$ a une limite supérieure à $f(E_1^p)$. En raison de l'additivité de la fonction f et de sa variation totale, on a

$$\underset{m\to\infty}{\text{limite}}\, f(E) = f(\underset{m\to\infty}{\text{limite}}\, E_m^p) = f(E_\omega^p) \quad \underset{m\to\infty}{\text{limite}} \int_{E_m^p} |df| = \int_{E_\omega^p} |df|.$$

La suite d'ensembles $E, E_1^p, E_2^p, \ldots, E_m^p, \ldots$, nous détermine donc un ensemble E_ω^p, positif relativement à f, appartenant à T et sous-ensemble de E. L'ensemble E_ω^p peut encore se diviser conformément à l'hypothèse en deux ensembles appartenant à T, l'un $E_{\omega+1}^p$ positif et l'autre $E_{\omega+1}^n$ négatif relativement à la fonction f. La suite d'ensemble $E, E_1^p, E_2^p, \ldots, E_m^p, \ldots, E_\omega^p, E_{\omega+1}^p$ vérifie encore des inégalités analogues à celles écrites plus haut. On peut continuer à partager l'ensemble $E_{\omega+1}^p$ et ainsi de suite: pour tous les ensembles ainsi obtenus la variation totale de la fonction f est supérieure à $f(E_1^p)$.

On forme ainsi une suite d'ensembles qu'on peut numéroter transfiniment de la façon suivante[1]): ayant formé les termes de rang inférieur à α, ou bien il y a un dernier terme, $E_{\alpha-1}^p$, avant celui de rang α et alors on prend pour terme de rang α le sous-ensemble positif E_α^p obtenu dans la décomposition de l'ensemble $E_{\alpha-1}^p$ en deux ensembles de signes différents relativement à f et appartenant à T: on a encore

$$f(E_\alpha^p) > f(E_{\alpha-1}^p) \quad \int_{E_\alpha^p} |df| > \int_{E_{\alpha-1}^p} |df|$$

(et ceci a lieu quand le nombre α est de première espèce); ou bien il n'y a pas, avant le terme de rang α, un dernier terme $E_{\alpha-1}^p$ et on prend pour terme de rang α l'ensemble E_α, qui est l'ensemble commun à tous les précédents.

Ainsi l'hypothèse de la décomposition possible de tout sous-ensemble de l'ensemble E appartenant à T en deux ensembles de

[1]) procédé analogue à celui indiqué par M. Baire au chapitre II des „Leçons sur les fonctions discontinues".

signes différents, jointe aux propriétés de l'additivité, nous permet de construire une suite d'ensembles qu'on peut numéroter à l'aide des nombres transfinis et ce numérotage montre que la suite des nombres transfinis et la suite des ensembles E^p_α sont semblables et par conséquent bien ordonnées. La suite des ensensembles E^p_α jouit encore des propriétés suivantes: soient E^p_α et $E^p_{\alpha'}$ deux ensembles quelconques de cette suite: si α' est de rang supérieur à α, on a les inégalités $E \supset E^p_1 \supset E^p_\alpha \supset E^p_{\alpha'}$

$$f(E^p_1) < f(E^p_\alpha) < f(E^p_{\alpha'}) < \int\limits_{E^p_{\alpha'}} |df| < \int\limits_{E^p_\alpha} |df| < \int\limits_{E} |df|.$$

La première ligne est évidente. Pour démontrer la seconde, revenons au cas où α est de seconde espèce. Soit alors p la borne supérieure des valeurs de la fonction sur tous les ensembles de rang inférieur à α et R la borne inférieure des valeurs de la variation totale sur les mêmes ensembles. Quel que soit l'entier n on peut trouver parmi ces ensembles un ensemble $E^p_{\beta_n}$, tel que

$$p \geqslant f(E^p_{\beta_n}) \geqslant p - \frac{1}{n}.$$

L'ensemble commun aux ensembles $E^p_{\beta_1}, E^p_{\beta_2}, \ldots, E^p_{\beta_n}, \ldots$ est leur ensemble limite, car tous les ensembles de rang inférieur a α forment une suite décroissante: si $E^p_{\beta_\omega}$ est cette ensemble limite, $f(E^p_{\beta_\omega}) = p$. Il reste à montrer que l'ensemble $E^p_{\beta_\omega}$ est précisément l'ensemble E^p_α: cela résulte de ce qu'on peut trouver, à partir d'un certain rang pour les ensembles considérés, un ensemble de ceux qui ont pour ensemble commun E_α intérieur à un ensemble E_β donné et que réciproquement à tout ensemble de ceux qui ont pour ensemble commun E_α on peut faire correspondre un ensemble E_β, qui lui est intérieur, on voit par là que

$$f(E^p_\alpha) = p \qquad \int\limits_{E^p_\alpha} |df| = R$$

et on continue à diviser l'ensemble E^p_α en deux ensembles, $E^p_{\alpha+1}$ et $E^n_{\alpha+1}$.

On voit que les valeurs de la variation totale de la fonction f sur tous les ensembles de la suite de terme général E^p_α sont supérieures à $f(E^p_1)$: la suite des veleurs de la variation totale correspondantes admet donc une borne inférieure positive M, supérieure à $f(E_1^\nu)$.

Considérons maintenant une suite infinie dénombrable d'ensembles extraits de la suite des ensembles E_α^ν, admettant le même ordre et telle qu'il n'y ait pas dans cette suite un ensemble compris dans tous les autres. Soit $E_{\delta_1}^\nu, E_{\delta_2}^\nu, \ldots, E_{\delta_n}^\nu, \ldots$, cette suite d'ensembles. Il lui correspond la suite des nombres transfinis $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, telle qu'il n'y a pas dans cette suite un nombre plus grand que tous les autres. Une suite de ce genre définit [1]) un nombre transfini de deuxième espèce supérieur à tout nombre de la suite considérée et inférieur à tous les nombres transfinis autres que lui et supérieurs à tous les nombres de la suite considérée. Soit D le nombre défini par la suite $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ Si je désigne par $E_{\delta_\omega}^\nu$ l'ensemble limite de la suite $E_{\delta_1}^\nu, E_{\delta_2}^\nu, \ldots, E_{\delta_n}^\nu, \ldots$, je dis que que $E_{\delta_\omega}^\nu = E_D^\nu$. Ceci résulte en effet de la simillitude entre la suite bien ordonnée des nombres transfinis et la suite bien ordonnée des ensembles E_α^ν.

En résumé l'ensemble limite de toute suite infinie dénombrable d'ensembles extraits de la suite des ensembles E_α^ν et n'admettant pas d'ensemble compris dans tous les autres est un ensemble appartenant encore à la suite des ensembles E_α^ν.

Toutes les considérations précédentes nous permettent enfin d'arriver à la démonstration du lemme. Nous avons établi que la suite des valeurs de la variation totale de la fonction sur la suite des ensembles E_α^ν admet une borne inférieure positive M. Donc, quel que soit le nombre n, il est possible de trouver un ensemble $E_{\gamma_n}^\nu$ appartenant à la suite considérée et tel que

$$M < \int E_{\gamma_n}^\nu |df| < M + \frac{1}{n}.$$

La suite des ensembles de terme général $E_{\gamma_n}^\nu$, ordonnée comme la suite E_α^ν, forme une suite dénombrable d'ensembles extraits de la suite de terme général E_α^ν et n'admettant pas d'ensemble compris dans tous les autres: l'ensemble $E_{\gamma_\omega}^\nu$, ensemble limite de cette suite appartient à la suite de terme général E_α^ν et on a

$$M = \int_{E_{\gamma_\omega}^\nu} |df|.$$

[1]) Cf. Baire. Leçons sur les fonctions discontinues, page 48.

Considérons alors l'ensemble $E^p_{\gamma_w+1}$, premier ensemble de la suite des ensembles E^p_α après $E^p_{\gamma_w}$. En raison des propriétés des ensembles E^p_α, on a

$$\int_{E^p_{\gamma_w+1}} |df| < \int_{E^p_{\gamma_w}} |df|$$

et par conséquent

$$\int_{E^p_\alpha} |df| < M, \text{ dès que } \alpha < \gamma_w.$$

Ce fait est en contradiction avec la nature de la quantité M. En supposant donc que le lemme n'est pas vérifié, on arrive à une contradiction: ce qui prouve le lemme et permet la démonstration du théorème suivant:

3. **Théorème.** *Soit une fonction d'ensemble f, additive et définie sur la famille additive d'ensembles T, si E est un ensemble de la famille T non presque nul relativement à la fonction f, l'ensemble E se divise au plus en deux ensembles P et N jouissant de ces propriétés:*

1^0 *ils appartiennent à la famille T; 2^0 l'ensemble P est monotone positif et l'ensemble N monotone négatif relativement à la fonction f.*

Considérons l'ensemble E: s'il est monotone relativement à la fonction f, il satisfait bien au théorème S'il n'est pas monotone relativement à f, on peut, d'après le lemme précédent, en extraire au moins un sous ensemble appartenant à T et monotone relativement à f. Soit E_1 cet ensemble monotone qu'on peut extraîre de E. L'ensemble $E-E_1$ appartient encore à T. De deux choses l'une: ou bien l'ensemble $E-E_1$ est monotone relativement à f et il n'a pas le même signe que E_1: on pose alors $P=E_1$, $N=E-E_1$ ou $N=E_1$, $P=E-E_1$ et le théorème est vérifié; ou bien l'ensemble $E-E_1$ n'est pas monotone relativement à f. On peut alors en extraire à nouveau un ensemble monotone E_2 et les mêmes circonstances se présentent. On arrive ainsi à un des cas suivants:

Ou bien on peut décomposer E en un nombre fini d'ensembles disjoints monotones relativement à f et appartenant à T.

Ou bien on peut extraire de E une suite dénombrable d'ensembles disjoints monotones relativement à f et appartenant à T. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ ces ensembles. Ce dernier cas peut encore présenter deux aspects différents Considérons la suite d'ensembles

$$E-E_1,\ E-(E_1+E_2), \dots,\ E-(E_1+E_2+\dots+E_n), \dots;$$

cette suite décroissante est formée d'ensembles appartenant à T et son ensemble limite est $E-(E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots)$. Si cet ensemble limite est presque nul relativement à f, il suffit de l'adjoindre à un des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, pour obtenir la décomposition de l'ensemble E en une famille denombrable d'ensembles disjoints monotones relativement à f. Si l'ensemble $E-(E+_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots)$ n'est pas presque nul relativement à f, on peut en tirer un nouvel ensemble monotone relativement à f et appartenant à T et on continue comme pour l'ensemble E. On est amené ainsi à envisager deux cas: ou bien on peut diviser l'ensemble E en une famille dénombrable d'ensembles monotones relativement à f et appartenant à T; ou bien on obtient une suite non dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_\alpha, \ldots$, disjoints, monotones relativement à f, appartenant à T et compris dans E. La variation totale de la fonction f sur chacun d'eux n'étant pas nulle et la variation totale de la fonction f sur la ensemble E étant bornée, il ne peut exister qu'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints, appartenant à T, compris dans E et sur lesquels la variation totale de f n'est pas nulle. La dernière hypothèse n'est pas réalisable et on peut toujours, dans les conditions de l'énoncé, décomposer l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles monotones relativement à f et disjoints. On peut alors grouper les ensembles monotones positifs relativement à f: leur ensemble somme est un ensemble P appartenant à T et monotone positif relativement à f. De même l'ensemble somme des ensembles monotones négatif est un ensemble N appartenant à T et monotone négatif relativement à f. On a $E=N+P$ et le théorème est ainsi démontré.

4. Théorème. *Si en se plaçant dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent, on trouve pour l'ensemble E deux décompositions en ensembles monotones relativement à la fonction f, l'une étant $E= =P_1+N_1$ et l'autre $E=P_2+N_2$, les ensembles P_1 et P_2 d'une part, N_1 et N_2 d'autre part ne diffèrent que par des ensembles presque nuls relativement à la fonction f.*

Soit, en effet, P_1-P_2: P_1-P_2 appartient à T et est à la fois un sous-ensemble de P_1 et un sous-ensemble de N_2. Comme sous-ensemble de P_1, P_1-P_2 ne peut être que positif ou presque nul relativement à f. Comme sous-ensemble de N_2, P_1-P_2 ne peut-être que négatif ou presque nul. Donc P_1-P_2 ne peut etre que presque nul relativement à f et il en est de même des ensembles $P_2 - P_1$, $N_1 - N_2$, $N_2 - N_1$.

Application à l'étude de la variation totale.

5. Le fait que tout ensemble E, non presque nul relativement à la fonction f et appartenant à la famille d'ensembles T (sur laquelle la fonction f est définie) est, soit monotone relativement à cette fonction f, soit divisible en deux ensembles monotones de signes contraires relativement à f, permet de ramener l'étude des fonctions additives d'ensemble à l'étude des fonctions monotones.

Comme $E = P + N$, on a $\int_E |df| = \int_P |df| + \int_N |df|$ Or $\int_P |df|$ n'est autre que $f(P)$ et $\int_{N} |df|$ n'est autre que $-f(N)$: On a donc

$$\int_E |df| = f(P) - f(N).$$

Voyons ce que devient la décomposition canonique

$$2\varphi(E) = \int_E |df| + f(E) = 2f(P)$$

$$2\psi(E) = \int_E |df| - f(E) = -2f(N).$$

On voit par là que la fonction $\varphi(E)$ est égale à la fonction f sur les ensembles monotones positifs relativement à la fonction f et nulle sur les négatifs tandis que la fonction $\psi(E)$ est égale à la valeur absolue de la fonction f sur les ensembles monotones négatifs relativement à la fonction f et nulle sur les positifs. On peut écrire ce fait

$$\varphi(E) = f(E \,.\, P), \quad \psi(E) = -f(N \,.\, E).$$

La notion de décomposition d'une fonction sous la forme canonique apparait ainsi non seulement comme un procédé de démonstration, mais encore comme une propriété qui est dans la nature même des fonctions additives d'ensemble; la formule $f(E) = f(P) + f(N)$ contient implicitement la décomposition de la fonction sous la forme canonique.

6. Les formules $\varphi(E) = f(E \,.\, P)$ et $\psi(E) = -f(E \,.\, N)$ et le fait que les ensembles P et N sont disjoints montrent que toute

singularité de $\varphi(E)$ est une singularité de $f(E)$, car elle est un ensemble presque nul relativement à $\psi(E)$. De même toute singularité de $\psi(E)$ est une singularité de $f(E)$ et un ensemble presque nul relativement à $\varphi(E)$. M. Fréchet est d'ailleurs arrivé au même résultat [1]) en considérant uniquement les ensembles singuliers pour lesquel la décomposition en ensembles monotones est évidente.

7. On voit enfin que les deux décompositions canoniques données respectivement par MM. Radon et Stieltjes d'une part, de la Vallée Poussin [2]) d'autre part sont identiques. Nous avons déjà montré que dans la décomposition canonique de Stieltjes-Radon, on a

$$\varphi(E)=f(E\,.\,P) \quad \psi(E)=-f(E\,.\,N).$$

Dans la décomposition canonique de M. de la Vallèe Poussin, la variation positive est le maximum des valeurs positives de la fonction sur les sous-ensembles de l'ensemble considéré E Ce maximum est atteint sur l'ensemble P et on a

$$\varphi(E)=f(P)=f(E\,.\,P) \quad \psi(E)=-[f(E)-f(E\,.\,P)]=-f(E\,.\,N).$$

On voit ainsi l'identité des deux définitions.

Application à l'étude des fonctions additives d'ensemble sans singularité.

8. Soit g une fonction additive d'ensemble, sans singularité, définie sur une famille additive d'ensembles T. La décomposition de tout ensemble de la famille T en ensembles monotones relativement à la fonction g me permet de compléter les résultats publiés plus haut par M. Fréchet.

9. **Remarque.** On peut décomposer tout ensemble E, appartenant à T et non presque nul relativement à g en un nombre fini de sous-ensembles, appartenant à T sur chacun desquels la *valeur absolue* de la fonction g est inférieure à un nombre E positif donné d'avance. Ce fait résulte immédiatement de ce que la valeur absolue de la fonction g sur un ensemble E est inférieure à sa variation totale et du théorème suivant de M. Fréchet [3]): on peut dé-

[1]) Cf. Enseignement mathématique. 1922.
[2]) Cf. De la Vallèe Poussin. Intégrales de Lebesgue. Page 85.
[3]) Cf. Fréchet. Des familles et fonctions additives d'ensembles § 44.

composer tout ensemble E appartenant à la famille T et non presque nul relativement à g en un nombre fini de sous ensembles sur chacun desquel la *variation totale* de g est inférieure à un nombre positif K donné d'avance.

10. **Théorème** *La valeur d'une fonction additive d'ensemble sans singularité sur un sous-ensemble e (appartenant à la famille T) d'un ensemble E de T passe, quand e varie, par toute valeur intermédiaire entre son minimum qui est $g(N)$ et son maximum qui est $g(N)$* [1].

Si, par exemple, la valeur intermédiaire, considérée, soit A, est positive, il suffit de montrer qu'il existe un sous-ensemble e de P tel que $g(e) = \lambda$. Or, sur les sous ensembles de P, $g(e) = \int_e |df|$ et on a $0 \leqslant \lambda \leqslant \int_P |df|$. La question est donc ramenée au cas, examiné par M Fréchet, où la fonction considérée est une variation totale.

Théorème. *Etant donnée une famille additive d'ensemble T et une fonction additive d'ensemble g definie sur T, sur les ensembles de T, la fonction g prend toute valeur comprise entre ses deux bornes sur T.*

Ce théorème est une conséquence du précédent et du fait que g est bornée sur T. En effet à chaque ensemble E de T correspond un ensemble monotone positif P et un ensemble monotone négatif N. L'ensemble des valeurs $g(P)$ est borné et admet une borne supérieure M positive ou nulle; l'ensemble des $g(N)$ est borné et admet une borne inférieure negative n. Soit E un ensemble de T; $g(E)$ étant tel que $g(N) \leqslant g(E) \leqslant g(P)$, $g(E)$ est compris entre m et M. Réciproquement, soit λ une valeur comprise entre m et M: supposons par exemple λ positif. Il existe au moins un ensemble P tel que $\lambda < g(P)$ et d'après le théorème précédent, il existe un sous-ensemble e de P, appartenant à T, tel que $f(e) = \lambda$.

[1] Cf. Fréchet. Ibidem. § 45, et Sierpiński. *Fundamenta Mathematicae.* Tome III. p. 241.