# Sur les continus plans non bornés.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Dans une note: „Un théorème sur les ensembles continus" [1]) M. Sierpiński a démontré les résultats suivants:

α) Un continu borné (dans l'espace à $m$ dimensions) ne peut être décomposé en une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, non vides, n'ayant deux à deux aucun point commun.

β) Il existe dans l'espace à 3 dimensions un continu non borné décomposable en une somme d'une infinité dénombrable de continus, n'ayant deux à deux aucun point commun.

M. Sierpiński pose le problème analogue pour les continus non bornés du plan [2]). Le but de cette note est la solution du problème indiqué Je vais démontrer à cet effet deux théorèmes.

2. Théorème I. *Il existe un continu plan non borné décomposable en une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés non vides, n'ayant deux à deux aucun point commun.*

3. Théorème II. *Un continu plan non borné ne peut être décomposé en une somme d'une infinité dénombrable de continus n'ayant deux à deux aucun point commun.*

## Démonstration du théorème I.

4. Je vais désigner le plan par $R_2$.

5. En supposant fixé dans $R_2$ un système de coordonnées cartesiennes je désigné par $(\xi, \eta)$ le point d'abscisse $\xi$ et d'ordonnée $\eta$. $a$, $b$ étant deux points de $R_2$, $\overline{ab}$ désignera le segment rectilinéaire aux extrémités $a$, $b$.

1) W. Sierpiński: Tôhoku Math. Journ. vol. 13, 1918, p. 300; Wiad. matem. t. 23. p. 188.

2) Cf. *Fund. Math.* t. II, p. 286 (Problème 13).

**6. Définition du continu cherché $A$.** Soit sur l'axe des $\xi$ un ensemble $\Gamma$, borné, parfait, punctiforme et tel que les longueurs des intervalles contigus à $\Gamma$ convenablement rangées forment une suite décroissante. Soient $\alpha_n, \beta_n$ respectivement les abscisses des extrémités gauche et droite du $n^{ieme}$ de ces intervalles; posons $\gamma_n = \frac{1}{2}(\alpha_n+\beta_n)$ et $\delta_n = \frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)$. On a $\delta_n > \delta_{n+1}$, avec $\lim\limits_{n=\infty} \delta_n = 0$.

Soit $B$ l'ensemble de points: $\xi \subset \Gamma$, $\eta \geqq 0$, $D_n$ — la demi — droite: $\xi = \gamma_n$, $\eta \geqq -\delta_n$.

Posons pour tout entier $k$ et tout entier $n > k$:

$$a(k, n) = (\alpha_k + \delta_n, -\delta_n) \tag{1}$$

$$a'(k, n) = (\alpha_k + \delta_n, n) \tag{2}$$

$$b(k, n) = (\beta_k - \delta_n, -\delta_n) \tag{3}$$

$$b'(k, n) = (\beta_k - \delta_n, n) \tag{4}$$

$$c(k, n) = (\gamma_k - \delta_n, 0) \tag{5}$$

$$c'(k, n) = (\gamma_k - \delta_n, n) \tag{6}$$

$$d(k, n) = (\gamma_k + \delta_n, 0) \tag{7}$$

$$d'(k, n) = (\gamma_k + \delta_n, n). \tag{8}$$

S'il y a à gauche de $\alpha_n$ des intervalles contigus à $\Gamma$ d'indice inférieur à $n$, désignons par $p(n)$ l'indice de celui d'entre eux qui est le plus proche de $\alpha_n$; de même s'il y a à droite de $\beta_n$ des intervalles contigus à $\Gamma$ d'indice inférieur à $n$, désignons par $q(n)$ celui d'entre eux qui est le plus proche de $\beta_n$.

1) S'il y a à droite de $\beta_n$ et à gauche de $\alpha_n$ des intervalles contigus à $\Gamma$, posons:

$$\begin{aligned} A_n = D_n &+ \overline{d(p(n), n)\,d'(p(n), n)} + \overline{d'(p(n), n)\,b'(p(n), n)} + \\ &+ \overline{b'(p(n), n)\,b(p(n) n)} + \overline{b(p(n), n)\,a(q(n), n)} + \overline{a(q(n), n)\,a'(q(n), n)} \\ &+ \overline{a'(q(n), n)\,c'(q(n), n)} + \overline{c'(q(n), n)\,c(q(n), n)} = D_n + L_n^{(1)} + L_n^{(2)} + \\ &+ L_n^{(3)} + L_n^{(4)} + L_n^{(5)} + L_n^{(6)} + L_n^{(7)}. \end{aligned} \tag{9}$$

2) Dans le cas contraire:

$$A_n = D_n. \tag{10}$$

Nous définirons $A$ par la relation:

$$A = B + \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{11}$$

7. $B$ est fermé, $A_n$ fermé et continu, car si $A_n$ est défini par (9), on a:

(12) $$D_n \times L_n^{(4)} \supset (\gamma_n, -\delta_n).$$

8. *A est fermé.* Soit $g' = (\xi', \eta') \subset A'$, $\{g_i\} = \{(\xi_i, \eta_i)\}$ une suite de points de $A$ telle que:

(13) $$g' = \lim g_i.$$

D'après 7 on aura surement $g' \subset A$, si $\{g_i\}$ contient une infinité de points contenus soit dans $B$, soit dans un seul et même $A_n$.

Dans le cas contraire, on aura, en désignant par $A_{n_i}$ le premier $A_.$ contenant $g_i$, $\lim\limits_{i=\infty} n_i = \infty$. Posons $E = B + \sum\limits_{n=1}^{\infty} D_n$: on voit facilement que tout point $(\xi, \eta) \subset A_n$ est assujétti à l'une au moins des deux inégalités:

(14) $$\eta \geqq n;\ \varrho((\xi, \eta), E) \leqq \sqrt{10}\,\delta\ .$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $j$ un entier tel que l'on ai:

(15) $$\varrho(g', g_j) < \frac{\varepsilon}{2};\ \sqrt{10}\,\delta_{n_j} < \frac{\varepsilon}{2};\ n_j > \eta' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ces inégalités entraînent:

(16) $$\eta_j < n_j,$$

(17) $$\varrho(g_j, E) \leqq \sqrt{10}\,\delta_{n_j}$$

(18) $$\varrho(g', E) \leqq \varrho(g', g_j) + \varrho(g_j, E) < \varepsilon;$$

$\varepsilon$ étant arbitrairement petit, il s'ensuit: $g' \subset E \subset A$, c. q. f. d.

9. S'il existe à gauche de $\alpha_n$ des intervalles contigus à $\Gamma$, d'indice $< n$, posons $l_n = p(n)$, dans le cas contraire soit $l_n$ le plus petit entier tel que $\beta_{l_n} < \alpha_n$. Soit $r_1(n)$ le premier entier pour lequel $\beta_{l_n} < \beta_{r_1(n)} < \alpha_n$; $r_{k+1}(n)$ le premier entier pour lequel $\beta_{r_k(n)} < \beta_{r_{k+1}(n)} < \alpha_n$. $\Gamma$ étant parfait punctiforme, la suite $\{r_k(n)\}$, $k = 1, 2 \ldots$ existe. On a $r_k(n) < r_{k+1}(n)$, donc:

(19) $$\lim_{k=\infty} r_k(n) = \infty.$$

En tenant compte des définitions de $q(n)$, $r_k(n)$, $A_n$, on voit que $A_{r_k(n)}$ est défini par (9) et que l'on a:

(20) $$q(r_k(n)) = n,$$

On démontre d'une manière analogue l'existence d'une suite $\{s_k(n)\}$, telle que $A_{s_k(n)}$ est défini par (9) et que l'on a

(21) $$\lim_{k=\infty} s_k(n) = \infty;\ p(s_k(n)) = n.$$

**10.** *A est continu.* Supposons que l'on a une décomposition:

(22) $A = C_1 + C_2,\ C_1 \times C_2 = 0,\ C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,\ C_1$ et $C_2$ fermés.

*Si* $C_i \supset (\alpha_n, 0)$, *alors* $C_i \supset A_n$; *si* $C_i \supset (\beta_n, 0)$ *alors*, $C_i \supset A_n (i = 1, 2)$. Il suffit de démontrer la première de ces propositions et de supposer $i = 1$. Supposons donc:

(23) $$C_1 \supset (\alpha_n, 0).$$

On a:

(24) $$A_{r_k(n)} \supset a(q(r_k(n)), r_k(n)) = a(n, r_k(n)) = (\alpha_n + \delta_{r_k(n)}, -\delta_{r_k(n)})$$

(25) $$\lim_{k=\infty} a(n, r_k(n)) = (\alpha_n, 0).$$

$(\alpha_n, 0)$ étant contenu dans $C_1$ ne peut pas être point limite des points contenus dans $C_2$. Il existe par suite un entier $k'$ tel que:

(26) $$a(n, r_k(n)) \subset C_1 \quad \text{pour} \quad k > k'$$

$A_{r_k(n)}$ étant continu, on a:

(27) $C_1 \supset A_{r_k(n)} \supset C(q(r_k(n))\ r_k(n)) = c(n, r_k(n)) = (\gamma_n - \delta_{r_k(n)}, 0)$ pour $k > k'$

(28) $$C_1 \supset C_1' \supset \lim c(n, r_k(n)) = (\gamma_n, 0)$$

(29) $$(\gamma_n 0) \subset D_n \subset A_n$$

donc $A_n$ étant continu, $C_1 \supset A_n$.

Nous distinguerons 3 cas.

I Si $C_1 \supset \Gamma$, alors $C_1 \supset B$ et pour tout $n$, $C_1 \supset (\alpha_n, 0)$, donc $C_1 \supset A_n$. Il en résulte: $C_1 \supset A$, $C_2 = 0$, contrairement à la supposition.

II $C_2 \supset \Gamma$ entraîne de même $C_1 = 0$, contrairement à la supposition.

III Si $C_1 \times \Gamma \neq 0$ et $C_2 \times \Gamma \neq 0$. on peut toujours supposer que $C_1$ contient le point de $\Gamma$ de plus petite abscisse. Soit $(\xi', 0)$ le point de la plus petite abscisse de l'ensemble fermé $\Gamma \times C_2$. Tous les points de $\Gamma$ à gauche de $(\xi', 0)$ sont contenus dans $C_1$, donc $(\xi', 0)$ n'est pas leur point limite, donc on a pour une valeur $n_0$: $(\xi', 0) = (\beta_{n_0}, 0)$. On a maintenant les relations:

(30) $$C_1 \supset (\alpha_{n_0}, 0);\ C_2 \supset (\beta_{n_0}, 0)$$

qui entraînent $C_1 \supset A_{n_0}$; $C_2 \supset A_{n_0}$, $C_1 \times C_2 \neq 0$, contrairement à la supposition. La décomposition (22) étant ainsi impossible, $A$ est continu c. q. f. d.

**11.** *$A$ est décomposable en une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés non vides, n'ayant deux a deux aucun point commun et* (11) *est une telle décomposition.* D'après 7 il suffit de démontrer:

$$(31) \qquad B \times A_n = 0. \ A_i \times A_n = 0 \quad i \neq n.$$

Soient $G(\alpha, \beta)$, $\overline{G}(\alpha, \beta)$, $H(\lambda)$, $\overline{H}(\lambda)$ les ensembles définis respectivement par les inégalités: $\alpha < \xi < \beta$, $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$, $\eta > \lambda$, $\eta \geqq \lambda$. On a d'après (9), (10):

$$(32) \qquad B \times A_n \subset \{B \times (R_2 - H(-\delta_n))\} + \\ + \{B \times [G(\alpha_n, \beta_n) + G(\alpha_{p(n)}, \beta_{p(n)}) + G(\alpha_{q(n)}, \beta_{q(n)})]\} = 0.$$

Pour démontrer la seconde relation (31), supposons $i < n$ et posons $L_i^{(m)} = 0$, resp. $L_n^{(m)} = 0$, si $A_i$ resp. $A_n$ est défini par (10). On a, en remplaçant par 0 les symboles où interviennent $p(i)$, $q(i)$, $p(n)$, $q(n)$, si $A_i$, resp. $A_n$ est defini par (10), avec la seule exception de $G(\beta_{p(n)}, \alpha_{q(n)})$ qui est à remplacer par $G(\alpha_n, \beta_n)$).

$$(33) \qquad A_i \times A_n \subset (L_i^{(4)} \times A_n) + \\ + \{[G(\alpha_i, \beta_i) + G(\alpha_{p(i)}, \beta_{p(i)}) + G(\alpha_{q(i)}, \beta_{q(i)})] \times \overline{G}(\beta_{p(n)}, \alpha_{q(n)})\} + \\ + \{D_i \times [G(\gamma_{p(n)}, \beta_{p(n)}) + G(\alpha_{q(n)}, \gamma_{q(n)})]\} + \{[L_n^{(2)} + L_n^{(4)}] \times [A_i - (L_i^{(4)} + D_i)]\} + \\ + [G(\gamma_{p(i)}, \beta_{p(i)}) \times G(\alpha_{q(n)}, \gamma_{q(n)})] + [G(\alpha_{q(i)}, \gamma_{q(i)}) \times G(\gamma_{p(n)}, \beta_{p(n)})] + \\ + \{G(\gamma_{p(i)} + \delta_i, \beta_{p(i)} - \delta_i) \times [\overline{G}(\gamma_{p(n)}, \gamma_{p(n)} + \delta_n) + \overline{G}(\beta_{p(n)} - \delta_n, \beta_{p(n)})]\} + \\ + \{G(\alpha_{q(i)} + \delta_i, \gamma_{q(i)} - \delta_i) \times [\overline{G}(\alpha_{q(n)}, \alpha_{q(n)} + \delta_n) + \overline{G}(\gamma_{q(n)} - \delta_n, \gamma_{q(n)})]\}.$$

$$(34) \quad A_i \times A_n \subset \{[R_2 - H(-\delta_i)] \times \overline{H}(-\delta_n)\} + \{\overline{H}(n) \times [R_2 - H(i)]\} + \\ + \{G(\gamma_{p(i)} + \delta_i, \beta_{p(i)} - \delta_i) \times [\overline{G}(\gamma_{p(n)}, \gamma_{p(n)} + \delta_n) + \overline{G}(\beta_{p(n)} - \delta_n, \beta_{p(n)})]\} + \\ + \{G(\alpha_{q(i)} + \delta_i, \gamma_{q(i)} - \delta_i) \times [\overline{G}(\alpha_{q(n)}, \alpha_{q(n)} + \delta_n) + \overline{G}(\gamma_{q(n)} - \delta_n, \gamma_{q(n)})]\} = 0$$

car l'avant-dernier produit est certainement $= 0$ si $p(i) \neq p(n)$ et dans le cas $p(i) = p(n)$ il disparaît en vertu des inégalités:

$$\gamma_k < \gamma_k + \delta_n < \gamma_k + \delta_i < \beta_k - \delta_i < \beta_k - \delta_n < \beta_n.$$

La même remarque s'applique mutatis mutandis au dernier produit.

Le théorème I est ainsi démontré.

### Quelques lemmes.

**12.** Je vais désigner par $F(G)$ la frontière d'une région $G$ (région = domaine connexe). Les symboles $\mathfrak{S}(a, b; R_1)$ et $\mathfrak{S}_i(a, b; R_2)$ seront employés dans un sens fixé dans mon mémoire: „Sur un ensemble $G_\delta$ etc.“ [1]).

**13. Lemme 1.** *$G_1$ étant une région, $G_2$ une région determinée par $G_1 + F(G_1)$, $x_1$ un point de $G_1$, $x_2$ un point de $G_2$, l'ensemble $F(G_2)$ est un $\mathfrak{S}_i(x_1, x_2; R_2)$.*

$F(G_2)$ est evidemment un $\mathfrak{S}(x_1, x_2; R_2)$. Soit $H \subset F(G_2)$ un ensemble fermé différent de $F(G_2)$, $x_3$ un point de $F(G_2) - H$. On a: $x_3 \subset F(G_2) \subset F(G_1)$, donc le cercle de centre $x_3$ et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(x_3, H)$ contient un point $x_4 \subset G_1$ et un point $x_5 \subset G_2$. $G_1$ contient un continu $K_1$ contenant $x_1, x_4$, $G_2$ un continu $K_2$ contenant $x_2$ et $x_5$.

$K_1 + K_2 + \overline{x_4 x_5}$ est un continu contenant $x_1, x_2$, sans point commun avec $H$. Donc $H$ n'est pas un $\mathfrak{S}(x_1 . x_2; R_2)$ c. q. f. d.

**14. Lemme 2.** *Si $C$ est un continu borné, $c$ un point et si l'on a:*

$$(35) \qquad C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \quad C_k \neq 0;\ C_k \text{ fermé};\ C_i \neq C_k \subset c \quad i \neq k$$

*alors:* 1) $C_n \supset c$, 2) $C_k$ *est bien enchainé*$^{*}(k = 1, 2, \ldots)$.

Supposons que $C_j$ ne contient pas $c$. Soit $G$ l'intérieur de la circonférence de centre $c$ et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(c, C_j)$, $c_1$ un point de $C_j$, $H$ le continu saturé contenant $c_1$ et contenu dans $C - G$ [2]). $H$ contient un point $c_2 \supset F(G)$ [3]). On a: $\varrho(c_2, c) = \frac{1}{2}\varrho(c, C_j)$ donc $c_2 \subset C - C_j$. (35) entraîne

$$(36)\ H = \sum_{k=1}^{\infty}(H \times C_k);\ H \times C_k \text{ fermé}, (H \times C_i) \times (H \times C_k) \subset H \times c = 0\ i \neq k$$

deux au moins des ensembles $H \times C_k$ n'étant pas vides ($C_j \times H$ et celui qui contient $c_2$). Mais d'après le théorème cité de M. Sierpiński une telle décomposition est impossible, $H$ étant un continu borné (voir **1**, $a$)). 1) est ainsi démontré.

[1]) Fund. Math I p. 62—66.

[2]) Janiszewski: Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèse, p. 20—21.

[3]) l. c. p. 22—23.

Supposons maintenant que $C_j$ n'est pas bien enchainé. On aura alors:

(37) $C_j = C_j^{(1)} + C_j^{(2)} \quad C_j^{(1)} \neq 0, \; C_j^{(2)} \neq 0, \; C_j^{(1)} \times C_j^{(2)} = 0,$ $C_j^{(1)}$ et $C^{(2)}$ fermés; un des ensembles $C_j^{(1)}, C_j^{(2)}$ on peut suppose que c'est le premier ne contient pas $c$.

La décomposition $C = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} C_k + C_j^{(1)} + C_j^{(2)}$ est analogue à (35) et telle que $C_j^{(1)}$ ne contient pas $c$, ce qui est contradictoire. Le lemme est donc démontré.

**15.** Lemme 3. *Un $\mathfrak{S}_i(a, b; R_2)$ borné ne peut être décomposé en un nombre fini ou une infinité dénombrable de continus n'ayant deux à deux qu un seul et même point $c$ en commun.*

Je réproduis une élegante démonstration de ce lemme, due à M. Kuratowski. Soit $C$ le $\mathfrak{S}_i(a, b; R_2)$ donné. Supposons que l'on à:

(38) $$C = \sum_{i=1} \quad C_i \times C_k = c \; (i \neq k) \quad C_i \text{ continu}$$

la somme à droite comprenant au moins deux membres. Si cette somme est finie:

$C = \sum_{i=1}^{n} C_i \, (n \geqq 2)$, alors:

(39) $$C = C_1 + \left(\sum_{i=2}^{n} C_i\right); \quad C \times \left(\sum_{i=2}^{n} C_i\right) = c$$

$C_1$ et $\sum_{i=2}^{n} C_2$ sont des sous ensembles fermés de $C$ différents de $C$, donc ce ne sont pas des $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$.

Il en résulte d'après un théorème de Janiszewski [1]) que $C$ n'est pas un $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$, contrairement a la supposition.

Soit maintenant $C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$; on ne peut pas avoir pour toute valeur de $k$:

(40) $$(C - C_k)' \supset C_k$$

car dans ce cas $C$ serait de première catégorie par rapport à lui même, ce qui est impossible. Il existe donc des valeurs de $k$,

[1]) Janiszewski: Prace mat.-fiz t. 26 p. 48, 62.

pour lequel (40) n'a pas lieu, ou peut évidemment supposer que 1 est une de ces valeurs. Soit: $D=(C-C_1)+(C-C_1)'=\overline{C-C_1}$. On a:

$$D=(D\times C_1)+\sum_{i=2}^{\infty}C_i \tag{41}$$

donc d'après le lemme 2, $D\times C_1$ est bien-enchaîné, $D$ étant un continu. D'autre part:

$$C_1+D=C \tag{42}$$

$$C_1-D\neq 0;\ D-C_1\supset C_2-c\neq 0 \tag{43}$$

$C_1$ et $D$ sont des sous-ensembles fermés de $C$, différents de $C$, donc ce ne sont pas des $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$. $C_1\times D$ étant bien-enchaîné, il résulte du théorème de Janiszewski[1]), que $C$ n'est pas un $\mathfrak{S}(a, b; R_2)$, contrairement à la supposition. Le lemme est ainsi démontré.

**16. Lemme 4.** *Si l'ensemble fermé $A$ admet la décomposition:*

$$A=\sum_i A_i \quad A_i\times A_k=0,\ i\neq k;\ A_i \text{ fermé},\ A_i\neq 0 \tag{44}$$

*pour deux valeurs de $i$ au moins, alors* 1) $R_2-A\neq 0$, 2) *La frontière de l'une au moins des régions déterminées par $A$ a des points communs avec deux aux moins des $A_i$.*

On peut supposer $A_1\neq 0$, $A_2\neq 0$, soit $x_1\subset A_1$, $x_2\subset A_2$, $B=\overline{x_1x_2}$. On a:

$$B=(B-A)+\sum_i(A_i\times B);\quad (A_i\times B)\times(A_k\times B)=0\quad i\neq k, \tag{45}$$

$$A_1\times B\neq 0,\quad A_2\times B\neq 0\quad A_i\times B \text{ fermé}$$

donc en vertu du théorème 1 $\alpha$) de M. Sierpiński $B$ étant un continu borné, on aura:

$$R_2-A\supset B-A\neq 0 \tag{46}$$

c. à. d. 1) est démontré. Supposons 2) faux. Soit $C_i=A_i+$ l'ensemble somme de toutes les régions déterminées par $A$ dont les

[1]) Janiszewski: Prace mat.-fiz. t. 26 p. 48, 62.

frontières sont contenus dans $A_i$. On aura:

(47) $$R_2 = \sum C_i \quad C_i \times C_k = 0 \ (i \neq k); \quad C_i \text{ fermé.}$$

$C_i \neq 0$ pour deux au moins valeurs de $i$.

Mais (47) est impossible d'après 1). Donc 2) est démontré.

**17. Définition.** Le continu $A$ est *décomposé* par le point $a$, si:

(48) $$A = A_1 + A_2 \quad A_1 \times A_1 = a, \quad A_1, A_2 \text{ continus.}$$

**18. Lemme 5.** *Si $A$ est une région, $A$ n'est décomposé par aucun de ses points.* J'omets la démonstration immédiate.

## Transformation du problème

**19. Lemme 6.** *L'existence d'un continu non borné $A$ admettant la décomposition:*

(49) $$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \quad A_i \times A_k = 0 \ (i \neq k); \ A_i \text{ continu}$$

*entraîne l'existence d'un continu borné $B$, tel que:*

*α) $B$ ne découpe pas $R_2$, β) $B = \sum_{m=1}^{\infty} B_m$; $B_m \times B_n = b (m \neq n$, $b$ point de $B$); $B_m$ continu qui n'est pas décomposé par $b$; γ) $B$ n'est pas décomposé par $b$.*

**20.** D'après **16** $R_2 - A \neq 0$ et il existe une région $G$ déterminée par $A$ telle que $F(G)$ à des points communs avec deux $A_i$ au moins. On peut supposer que $F(G) \times A_1 \neq 0$ et $F(G) \times A_2 \neq 0$. Transformons $R_2$ par inversion de centre $b \subset G$. $A$ devient un continu borné $C \supset b$ qui n'est pas décomposé par $b$, $A_i$ un continu $C_i \supset b$, qui n'est pas décomposé par $b$, $G$ la region non borné $H$ déterminée par $B$. $F(G)$ devient $F(H) = D$. On a:

(50) $$D = \sum_{i=1}^{\infty} (D \times C_i); \ (D \times C_i) \times (D \times C_k) \subset b \ (i \neq k);$$
$$(D \times C_1) - b \neq 0, \ (D \times C_2) - b \neq 0.$$

D'après **14** les ensembles $D \times C_i$ sont bien enchaînés et contiennent $b$. Désignons par $D_1, D_2 \ldots$ successivement ceux des ces ensembles qui sont continus (c. à. d. ne se réduisent pas au seul point $b$). On aura:

(51) $$D = \sum_i D_i;\ D_i \times D_k = b,\ D_i \text{ continu}$$

la somme à droite contenant deux termes au moins

**21.** *$H_1$ étant une région déterminée par $H+D$, $F(H_1)$ est contenu dans un et un seul $D_i$* On a:

(52) $$F_1(H) = \sum_{(=1)}^{\infty} D_i \times F(H_1);\ [D_i \times F(H_1)] \times [D_k \times F(H_1)] \subset b.$$

D'après **14** les ensembles fermés $D_i \times F(H_1)$ sont bien-enchaînés et contiennent $b$. En désignant ceux d'entre eux qui sont continus c. a. d. ne se réduisent pas au point $b$ par $E_1, E_2 \dots$ successivement on aura:

(53) $$F(H_1) = \sum_k E_k;\ E_k \times E_l = b\ (k \neq l),\ E_k \text{ continu.}$$

Mais (lemme 1, **13**) pour $x_1 \subset H$, $x_2 \subset H_1$, $F(H_1)$ est un $\mathfrak{S}_i(x_1, x_2; R_2)$. Donc (**15** lemme 3) la somme à droite de (53) se réduit à un seul terme, ce qui démontre l'énoncé.

**22.** Soient $H_i^{(1)}, H_i^{(2)} \dots$ les régions déterminés par $H+D$, pour esquels $F(H_i^{(\nu)}) \subset D_i$. Posons:

(54) $$B_i = D_i + \sum_\nu H_i^{(\nu)}$$

(55) $$B = \sum_i B_i = R_2 - H \supset C.$$

**23.** $B$ et $B_i$ sont des continus bornés contenant $b$. La somme à droite de (55) contient au moins deux termes *On a* $B_i \times B_k = b$ $(i \neq k)$ *et $B$ ne découpe pas le plan.*

**24.** *Un $C_k$ est contenu dans un et un seul $B_i$.* Dans le cas contraire, on aurait pour trois indices: $j, l \neq m$:

(56) $$(C_j \times B_l) - b \neq 0;\ (C_j \times B_m) - b \neq 0.$$

D'après **20** on a pour deux indices determinés $n$ et $q$:

$$D_l = D \times C_n \subset C_n;\ D_m = D \times C_q \subset C_q \text{ et } n \neq q.$$

Un au moins des indices $n, q$, nous pouvons supposer que c'est $n$. est différent de $j$. Posons:

(57) $$C_j^{(1)} = C_j \times B_l.\ C_j^{(2)} = C_j \times \sum_{i \neq l} B_i$$

D'après (56): $C_j^{(1)} - b \neq 0$; $C_j^{(2)} - b \neq 0$. On a de plus, en vertu de (55) et **23**.

$$(58) \qquad C_j = C_j^{(1)} + C_j^{(2)};\; C_j^{(1)} \times C_j^{(2)} = b$$

$C_j^{(1)}$ est fermé. D'autre part:

$$(59) \qquad C_j^{(2)} \supset b$$

$$(60)\; C_j^{(2)} = \Big(C_j \times \sum_{i \neq j \neq l} B_i\Big) + b = \Big(C_j + \sum_{i \neq j \neq l} B_i\Big) + (C_j \times C_n) + (C_j \times H) =$$

$$= \Big(C_j \times \sum_{i \neq j \neq l} B_i\Big) + (C_j \times D_i) + (C_j \times H) = C_j \times \Big[R_2 - \sum_p H^{(p)}\Big]$$

$\sum\limits_p H_i^{(p)}$ est un domaine, son complementaire est par suite fermé. Donc $C_j^{(2)}$ est fermé. (58) montre que $b$ décompose $C_j$, contraiment à **20**.

**25.** *$B_i$ n'est pas décomposé par $b$.* Dans le cas contraire on aurait pour un indice $j$:

$$(61) \qquad B_j = B_j^{(1)} + B_j^{(2)};\quad B_j^{(1)} \times B_j^{(2)} = b;\quad B_j^{(1)},\ B_j^{(2)} \text{ continus.}$$

D'après **20** $D_j = D \times C_n \subset C_n$, pour un indice $n$ déterminé. Considérons la décomposition:

$$(62) \qquad B = B_j^{(1)} + B_j^{(2)} + \sum_{i \neq j} B_i$$

$C_n$ est d'après **24** contenu dans un seul $B_i$ et on doit avoir $C_n \subset B_j$, car $C_n \times B_j$ contient le continu $D_j$. En appliquant **24** à la nouvelle décomposition (62) on a une des deux relations: $D_j \subset C_n \subset B_j^{(1)}$ ou bien $D_j \subset C_n \subset B_j^{(2)}$, nous pouvons supposer que c'est la première qui a lieu. On a:

$$(63) \qquad B_j^{(2)} \subset B_j = D_j + \sum_p H_j^{(p)}$$

$$(64) \qquad B_j^{(2)} - b = [(B_j^{(2)} - b) \times D_j] + \Big[(B_j^{(2)} - b) \times \sum_p H_j^{(p)}\Big] =$$

$$= (B_j^{(2)} - b) \times \sum_p H_j^{(p)}$$

donc pour un indice $p_1$:

$$(65) \qquad (B_j^{(2)} - c) \times H_j^{(p_1)} \neq 0$$

$$(66) \qquad \overline{H_j^{(p_1)}} = H_j^{(p_1)} + F(H_j^{(p_1)}) = (\overline{H_j^{(p_1)}} \times B_j^{(1)}) + (\overline{H_j^{(p_1)}} \times B_j^{(2)}).$$

(67) $$(\overline{H_j^{(p_1)}} \times B_j^{(1)}) - b \supset F(H_j^{(p_1)}) - b \neq 0$$

(68) $$(\overline{H_j^{(p_1)}} \times B_j^{(1)}) \times (\overline{H_j^{(p_1)}} \times B_j^{(2)}) = b.$$

(65)—(68) montrent que $H_j^{(p_1)}$ est décomposé par $b$ ce qui est impossible (18, lemme 5)

**26.** *B n'est pas décomposé par b.* Supposons le contraire, on aura:

(69) $B = B^{(1)} + B^{(2)} \quad B^{(1)} \times B^{(2)} = b$: $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ continus

Soit $x \subset B^{(1)} - b$; $y \subset B^{(2)} - b$. $B_j$ celui des $B_i$ qui contient $x$. $B_k$, celui des $B_i$ qui contient $y$. On aura d'après (54) **25**

(70) $$D_j \subset B_j \subset B^{(1)};\ D_k \subset B_k \subset B^{(2)}$$

(71) $(C \times B^{(1)}) - b \supset D_j - b \neq 0$; $(C \times B^{(2)}) - b \supset D_k - b \neq 0$

(72) $C = (C \times B^{(1)}) + (C \times B^{(2)})$; $(C \times B^{(1)}) \times (C \times B^{(2)}) = b$

(71) et (72) montrent que $b$ décompose $c$ contrairement à **20**.

**27.** Il résulte de **26** que la somme à droite de (55) contient une infinité de termes.

**28.** D'après **22**, **23**, **25**, **26**, **27** le Lemme **6** est démontré.

## Démonstration du théorème II.

**29.** Lemme 7. *Il n'est aucun continu borné B possèdant les propriétés suivantes:*

*α) B ne découpe pas $R$,*

$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$; $B_i \times B_k = b$ ($i \neq k$, *b point de B*); $B_i$ *continu qui n'est pas décomposé par b.*

*γ) B n'est pas décomposé par b.*

**30.** Supposons qu'un tel continu existe. Posons:

(73) $$C_k = B_k \times \overline{\sum_{\substack{i=1\\ i \neq k}}^{\infty} B_i}$$

(74) $$C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k.$$

**31.** $C_k - b \neq 0$. En effet, supposons le contraire pour un indice

$k$ déterminé. L'ensemble $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} B_i$ est alors fermé et nous avons:

$$(75)\qquad B = B_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} B_i \qquad B_k \times \Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty} B_i\Big) = b$$

c. a. d, $B$ est décomposé par $b$ contrairement à **29** $\gamma$).

**32.** $x_0$ étant un point arbitraire de $R_2 - B$, soien $K$, $M$ respectivement le cercle et la circonférence de centre $x$ et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(x, B)$. Supposons fixé sur $M$ un sens positif du parcours; $x_1$, $x_2$ désignant deux points de $M$, $M(x_1, x_2)$ désignera celui des deux arcs simples déterminés sur $M$ par $x_1$, $x_2$ qui est décrit par un point mobile venant de $x_1$ à $x_2$ dans le sens positif (extrémités non comprises).

**33.** Soit $\{c_k\}$ une suite de points de $C - b$, telle que tout point de $C - b$ soit point limite pour une suite extraite de $\{c_k\}$.

**34.** Déterminons:

une suite de points $\{d_k\}$, $d_k \subset B - b$ $\quad d_k \neq d_l \quad k \neq l$

une suite de points $\{g_k\}$, $g_k \subset M \quad g_k \neq g_l \quad k \neq l$

une suite d'arcs simples $\{L_k\}$ aux extrémités $d_k$, $g_k$ respectivement, assujétis aux conditions:

$$(76)\qquad L_k \times B = d_k, \quad L_k \times M = g_k, \quad L_k \times L_l = 0 \quad (k \neq l)$$

et cela de manière suivante.

I. Considérons un arc simple $W$ aux extrémités $x_0$ et $c_1$; soit $d_1$ le dernier point de $W$, à partir de $c_1$ contenu dans $B$, $g$ le premier point de $W$, à partir de $d_1$, contenu dans $M$, $L_2$ la partie de $W$ entre $d_1$ et $g_1$, $n(1)$ l'indice du $B_n$ contenant $d_1$.

II. Supposons déterminés pour $k = 1, 2 \ldots m$, $d_k$, $g_k$, $L_k$; soit $n(k)$ l'indice du $B_n$ contenant $d_k$. Entourons $c_{m+1}$ d'une circonférence de rayon inférieur à $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{2}\varrho(c_{m+}, b)$. L'intérieur de cette circonférence contient des points de $B_n$ pour une infinité d'indices $n$. Soit $n'$ le premier entier différent à la fois de $n(k)$, $k = 1, 2 \ldots m$ et de l'indice du $B_n$ contenant $c_{m+1}$ et tel, que la circonférence en question contient un point $x'$ de $B_{n'}$. Soit $x''$ le dernier point de $\overline{x' c_{m+1}}$ (à partir de $x'$) contenu dans $B_{n'}$. Entourons $x''$ d'une circonférence de rayon inférieur à la fois à $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{2}\varrho(x'', \sum\limits_{k=1}^{m}(B_{n(k)} + L_k))$. L'intérieur de cette circonférence contient des points de $R_2 - B_{n'}$ (tous les points de $\overline{x''c_{m+1}}$ suffisament rapprochés à $x''$), donc en vertu du théorème 1 $\alpha$) de M. Sierpiński des points de $R_2 - B$. Soit $y'$ un tel point, $d_{m+1}$ le premier point de $\overline{y'x''}$ (à partir de $y'$) contenu dans $B$. D'après le théorème de Janiszewski[1]) de **29** $\alpha$) et des conditions (85) verifiées par les $L_k$ $(k=1, 2\dots m)$ l'ensemble $B+\sum_{k=1}^{m} L_k$ ne découpe pas le plan, de plus $y' \subset R_1 - (B+\sum_{k=1}^{m} L_k)$. Il existe donc dans $R_2 - (B+\Sigma L_k)$ un arc simple $V$ aux extremités $x_0$, $y'$. Soit $g_{m+1}$ le dernier point de cet arc (à partir de $x_0$) contenu dans $M$, $V_1$ la partie de $V$ entre $y'$ et $g_{m+1}$, enfin $L_{m+1}$ l'arc simple aux extrémités $d_{m+1}$, $g_{m+1}$ contenu dans: $V_1 + \overline{y'd_{m+1}}$. On voit sans peine que pour $k=1, 2\dots m+1$ les suites $\{g_k\}$, $\{d_k\}$, $\{L_k\}$ verifient les conditions requises.

**35.** On voit de plus que les entiers $n(1)$, $n(2)$ .. sont tous différents entre eux.

**36.** Soit $D$ l'ensemble de tous les $d_k$, $G$ l'ensemble de tous les $g_k$.

**37.** D'après **34** II on a:

$$\varrho(c_{m+1}, d_{m+1}) \leqq \frac{2}{m} \tag{77}$$

les $d_k$ étant différents entre eux on a d'après **33**:

$$D' \supset C - b. \tag{78}$$

**38.** Posons:

$$L(i, j) = L_i + B_{n(i)} + B_{n(j)} + L_j \tag{79}$$

c'est un continu qui ne découpe pas le plan. Le cercle $K$ (**32**) ne découpe pas le plan non plus Comme on a: $L(i, j) \times K = g_i + g_j$ le continu $L(i, j) + K$ découpe le plan en deux régions: $H_1$, $H_2$[2]). Mais l'ensemble $M(g_i, g_j) + L(i, j) = \overline{M(g_i, g_j)} + L(i, j)$ découpe $R_2$ aussi en deux régions $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ et l'on a:

$$F(H_1^{(1)}) \subset L(i, j) + M(g_i, g_j); \quad F(H_2^{(1)}) \subset L(i, j) + M(g_i, g_j). \tag{80}$$

L'ensemble connexe $K - M(g_i, g_j)$ est contenu entiérement soit dans $H_1^{(1)}$ soit dans $H_2^{(1)}$, on peut toujours supposer: $K - M(g_i, g_j) \subset H_1^{(1)}$. Alors $H_1^{(1)}$ doit être identique soit avec $H_1$ soit avec $H_2$. Donc la

[1]) Janiszewski: Prace mat.-fiz. t. 26 p. 48, 62.

[2]) Straszewicz: Fund. mat. IV. p. 128.

frontière de l'un des deux domaines $H_1, H_2$ est contenu dans $L(i, j) \cdot M(g_i, g_j)$, nous désignerons ce domaine par $H(i, j)$. La frontière de l'autre domaine $H(j, i)$ est contenu dans $L(i, j) + M(g_j, g_i)$.

**39.** *Si $m \neq n(i)$, $m \neq n(j)$, alors on a l'une des deux relations:*

$$B_m \subset \overline{H(i, j)};\quad B_m \subset \overline{H(j, i)}. \tag{81}$$

On a

$$B_m = (B_m \times \overline{H(i, j)}) + (B_m \times \overline{H(j, i)}) \tag{82}$$

$$(B_m \times \overline{H(i, j)}) \times (B_m \times \overline{H(j, i)}) = B_m \times [\overline{H(i, j)} \times \overline{H(j, i)}] = \tag{83}$$
$$= B_m \times L(i, j) = (B_m \times L_i) + (B_m \times L_j) + B_m \times [B_{n(i)} + B_{n(j)}] = b$$

donc d'après **29** $\beta$ l'un des deux ensembles $B_m \times \overline{H(i, j)}$, $B_m \times \overline{H(j, i)}$ se réduit à $b$. ce qui démontre l'énoncé.

**40.** *La relation: $g_k \subset M(g_i, g_j)$ entraîne $B_{n(k)} \subset \overline{H(i, j)}$. En effet:*

$$L_k = (L_k \times \overline{H(i, j)}) + (L_k \times \overline{H(j, i)}) \tag{84}$$

$$(L_k \times \overline{H(i, j)}) \times (L_k \times \overline{H(j, i)}) = L_k \times L(i, j) = 0 \tag{85}$$

$$L_k \times \overline{H(i, j)} \supset g_k \tag{86}$$

donc $L_k$ étant continu, on a:

$$L_k \times H(j, i) = 0 \tag{87}$$

donc $H(j, i)$ ne contient pas le point $d_k$ de $B_{n(k)}$. D'après **39** il en résulte l'énoncé.

**41.** En tenant compte de (92) on voit qse si $B_m \subset \overline{H(i, j)}$, $m \neq n(i)$, $m \neq n(j)$ alors $B_m - b \subset H(i, j)$.

**42.** *$G'$ est parfait.* $G$ étant dénombrable, on a $G' \neq 0$, il suffit par suite de démontrer que $G'$ ne contient aucun point isolé. Supposons le contraire et soit $x_1$ un point de $G' - G''$. On peut déterminer deux points de $M$: $y_1, y_2$ de manière que $M(y_1, y) \times G' = x_1$. Un au moins des deux ensembles: $G \times M(y_1, x_1)$, $G \times M(x_1, y_2)$ contient une infinité de points; nous pouvons supposer que c'est le premier. Soit $g_{i_1}$ un point de $M(y_1, x_1)$ contenu dans $G$, $g_{i_2}$ le premier point de $M(g_{i_1}, x)$ contenu dans $G$, $g_{i_3}$ le premier point de $M(g_{i_2}, x_1)$ contenu dans $G$. On a evidement:

$$g_{i_2} \subset M(g_{i_1}, g_{i_3}) \tag{88}$$

$$g_i \subset M(g_{i_3}, g_{i_1}) \quad i \neq i_1,\ i \neq i_2,\ i \neq i_3 \tag{89}$$

donc, d'après **40**, **41**:

(90) $$B_{n(i_2)} - b \subset H(i_1, i_3)$$

(91) $$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1 \neq i_2}}^{\infty} B_{n(i)} \subset \overline{H(i_3, i_1)} + B_{n(i_1)} + B_{n(i_2)}$$

(92) $$D - d_{i_2} \subset \overline{H(i_3, i_1)} + B_{n(i_1)} + B_{n(i_2)}$$

(93) $$D' \subset \overline{H(i_3, i_1)} + B_{n(i_1)} + B_{n(i_2)}.$$

Donc d'après (87) et (82), (83):

(94) $$C_{i_2} - b \subset D' \times B_{n(i_2)} \subset H(i_1, i_3) \times [\overline{H(i_3, i_1)} + B_{n(i_1)} + B_{n(i_2)}] = 0$$

contrairement à **31**.

**43.** Pour tout couple de points $x, y$ de $M$ nous désignerons par $U(x, y)$ l'ensemble somme de tous les $B_{n(k)}$ pour lesquels $g_k \subset M(x, y)$.

**44.** Posons pour tout point $z \subset G'$:

(95) $$U(z) = \prod_{\substack{x+y \subset M \\ z \subset M(x, y)}} \overline{U(x, y)}$$

$U(z)$ est evidement fermé et contient $b$. On a:

(96) $$U(z) \subset B.$$

**45.** Si $U(z) - b \neq 0$ nous désignerons par $N(z)$ l'ensemble de tous les entiers $i$, pour lesquels $[U(z) - b] \times B_i \neq 0$. Si $U(z) = b$, alors $N(z) = 0$.

**46.** *Tout entier $m$ fait parti d'un $N(z)$ au moins.* Soit $x'$ un point de $C_m - b$. En vertu de (87) il existe une suite $\{d_{i_k}\}$, $k = 1, 2\ldots$, telle que $x' = \lim\limits_{k=\infty} d_{i_k}$. De la suite correspondante $\{g_{i_k}\}$ extrayons une suite convergente et désignons par $z'$ son point limite. On aura evidemment $x' \subset \overline{U(x, z)}$ pour tout couple $x, y$ de points de $M$, tel que $z' \subset M(x, y)$ donc $x' \subset U(z')$, $m \subset N(z')$ c. q. f. d.

**47.** *Les relations $m \subset N(z)$, $z \subset M(g_i, g_j)$, $m \neq n(i)$, $m \neq n(j)$ entraînent*

(97) $$B_m - b \subset H(i, j)$$

Soit $y'$ un point de $(U(z) - b) \times B_m$. D'après **39** et **41** il suffit de démontrer que $y' \subset H(y, j)$. Supposons au contraire $y \subset H(j, i)$. Entourons $y'$ d'un cercle $K_1$ intérieur à $H(j, i)$. On a: $y' \subset U(z) \subset \subset \overline{U(g_i, g_j)}$, donc $K_1$ contient un point $y'' \subset U(g_i, g_j)$. Soit $n(l)$ l'indice du $B_n$ contenant $y''$. On aura $g_i \subset M(g_i, g_j)$ donc, d'après **40**:

(98) $$y'' \subset B_{n(i)} \subset \overline{H(i, j)}$$

et d'autre part $y'' \subset K_1 \subset H(j\ i)$ La supposition $y' \subset H(j, i)$ entraîne par suite une contradiction c. q. f. d.

**48.** Soit $G_1$ l'ensemble de tous les points $z \subset G'$ qui ne sont pas des extrémités d'arcs de la circonférence $M$ contigus à $G'$. D'après **42** $G_1$ *est non dénombrable.*

**49.** *Si* $z_1 + z_2 \subset G_1$, *alors* $N(z_1) \times N(z_2) = 0$.

Supposons $m \subset N(z_1) \times N(z_2)$. $M(z_1, z_2)$ contient un point au moins de $G'$, donc une infinité de points de $G$. Il existe par suite un entier $i$ tel que:

(99) $$n(i) \neq m, \quad g_i \subset M(z_1, z_2)$$

de même il existe un entier $j$ tel que:

(100) $$n(j) \neq m, \quad g_j \subset M(z_2, z_1)$$

(99) et (100) entraînent: $z_1 \subset M(g_i, g_j)$, $z_1 \subset M(g_j, g_i)$, donc d'après **47**:

(101) $$B_m - b \subset H(i, j); \quad B_m - b \subset H(j, i)$$

ce qui est impossible.

**50.** *L'ensemble des points* $z \subset G_1$ *pour lesquels* $N(z) \neq 0$ *est dénombrable.* En effet soit $n(z)$ le plus petit entier positif contenu dans $N(z)$ en supposant $N(z) \neq 0$. D'après **49** pour $z_1 \neq z_2$, $z_1 + z_2 \subset G_1$ on a $n(z_1) \neq n(z_2)$ Il y a donc équivalence entre l'ensemble en question et un sous ensemble de la suite d'entiers positifs.

**51** D'après **50** $G_1$ contient deux points $z'$ et $z''$ tels que $N(z') = N(z'') = 0$. Posons:

(102) $$B^{(1)} = \overline{U(z', z'')}; \quad B^{(2)} = \overline{U(z'', z')}.$$

On aura d'après **46** et (95)

(103) $$B = \sum_{z \subset G'} U(z) = U(z') + U(z'') + \sum_{z \subset M(z', z'')} U(z) + \sum_{z \subset M(z'', z')} U(z) \subset b + \\ + \overline{U(z', z'')} + \overline{U(z'', z')} = B^{(1)} + B^{(2)}$$

et comme $B \supset B^{(1)}, B^{(2)} \subset B$:

(104) $$B = B^{(1)} + B^{(2)}.$$

Soit $v$ un point de $B - b$, $m$ l'indice du $B_i$ contenant $v$, $z_1$ un point de $G'$ pour lequel $m \subset N(z_1)$. Nous pouvons supposer que

$z_1 \subset M(z', z'')$. Comme $z' \subset G_1$ l'ensemble $G' \times M(z', z_1)$ n'est pas vide Donc $M(z', z_1)$ contient une infinité de points de $G$ il existe par suite un indice $j$ tel que:

(105) $$n(j) \neq m;\ g_j \subset M(z', z_1)$$

de même il existe un entier $k$, tel que:

(106) $$n(k) \neq m;\ g_k \subset M(z_1\ z'')$$

On a $z_1 \subset M(g_j\ g_k)$, donc d'après **47**:

(107) $$v \subset B_m - b \subset H(j, k).$$

D'autre part $M(z'', z') \subset Mg_k, g_j)$. D'après **43**:

(108) $$U(z'', z') = \sum_{g_l \subset M(z'', z')} B_{n(l)}.$$

Mais $g_l \subset M(z'', z')$ entraîne $g_l \subset M(g_k, g_j)$ et d'après **40**:

(109) $$B_{n(l)} \subset H\overline{(k, j)}$$

donc:

(110) $$U(z'', z') \subset \overline{H(k, j)}$$

(111) $$B^{(2)} = \overline{U(z'', z')} \subset \overline{H(k, j)}$$

(107) et (111) montrent que $v$ n'est pas contenu dans $B^{(2)}$. On voit ainsi, que

(112) $$B^{(1)} \times B^{(2)} = b$$

(104) et (112) montrent que $b$ décompose $B$ (on voit aisément que ni $B^{(1)}$ ni $B^{(2)}$ ne peuvent se réduire au seul $b$). Nous arrivons à une contradiction avec **29** $\gamma$). Le lemme **7** est ainsi démontré.

**52.** Les lemmes 6 et 7 entraînent le théorème II.