Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Par *l'hypothèse du continu* (Cantorsche Kontinuumhypothese) nous comprenons l'hypothèse que

(1) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

c'est-à-dire que la puissance du continu est *aleph-un.*

On ne sait pas jusqu'à présent si la formule (1) est vraie ou non, et il existe même des personnes qui n'excluent pas la possibilité que ce problème ne pourra guère être résolu sans admettre un nouvel axiome. Toutefois, dans l'état actuel de la science, il sera peut-être ulile d'examiner les théorèmes qui sont équivalents à la formule (1), ainsi que les conséquences qui résultent de l'hypothèse que la formule (1) est vraie. et celles qui résultent de l'hypothèse que la formule (1) est fausse C'est précisément l'objet de la présente Note.

1. Au premier regard on pourrait penser que la formule (1) équivaut au théorème que tout ensemble non dénombrable de nombres réels a la puissance du continu. Une démonstration d'une telle équivalence peut être en effet achevée sans peine, mais on doit faire appel à l'axiome de M. Zermelo (Auswahlpostulat). Nous ne savons pas, en effet. démontrer sans l'axiome du choix que tout ensemble ayant même puissance que tout son sous-ensemble non dénombrable, a la puissance $\aleph_1$ (et non plus que tout ensemble non dénombrable — même que tout ensemble de puissance du continu — a une puissance supérieure ou égale à $\aleph_1$)[1]. Or, nous savons

[1]) Cf. mon mémoire: *L'axiome de M. Zermelo* etc. Bulletin de l'Acad des Sc. de Cracovie, 1918.

démontrer sans l'axiome de M. Zermelo que la formule (1) entraîne que tout ensemble non dénombrable de nombres réels à la puissance du continu (puisque tout sous-ensemble non dénombrable d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ a la puissance $\aleph_1$). Donc, si l'hypothèse du continu était vraie, tout ensemble de points (dans un espace à un nombre quelconque de dimensions) serait soit fini, soit dénombrable, soit de puissance du continu. On en voit déjà quelles simplifications importantes subirait la théorie des ensembles de points, si l'hypothèse du continu était vraie.

Or, il résulte de l'hypothèse du continu l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu: donc, dans le cas où la formule (1) était vraie, on pourrait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix tous les théorèmes dont la démonstration s'appuit sur l'existence d'un ensemble bien ordonné, formé de tous les nombres réels (c'est-à-dire sur un cas particulier du théorème de M. Zermelo (Wohlordnungssatz)).

2. Il faut distinguer entre *l'hypothèse du continu* et le *problème du continu* (Kontinuumproblem) qui consiste en la détermination de la place occupée par le continu parmi les *alephs*, c'est-à-dire en la détermination du nombre ordinal α pour lequel

$$2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$$ [1].

Dans le cas où l'hypothèse du continu était vraie, on aurait ici naturellement $\alpha = 1$; or, il n'est pas encore démontré qu'on n'a pas $\alpha = 2$ (On a cependant démontré qu'il ne peut être $\alpha = \omega$: c'est un théorème de J. König dont la démonstration peut être achevée sans utiliser l'axiome de M. Zermelo [2]).

On pourrait encore dire que le problème du continu consiste à déterminer quelles peuvent être les puissances des ensembles de nombres réels (F. Bernstein).

Le problème du continu va donc plus loin que le problème si l'hypothèse du continu est vraie ou non. Dans le cas où l'hypothèse du continu était vraie, le problème du continu serait évidemment résolu; cependant, dans le cas où la formule (1) était fausse,

[1]) Une telle position du problème préjuge que la puissance du continu est un *aleph*, c. à. d. suppose l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu.

[2]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński: Sur une propriété du continu, C. R., t. 175; aussi W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 111.

le problème du continu resterait encore ouvert (De l'hypothèse que la formule (1) est fausse résulte seulement, à l'aide de l'axiome de M. Zermelo, que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$).

3. Nous connaissons très peu des théorèmes qui sont équivalents à l'hypothèse du continu.

En 1919 j'ai démontré [1]) que *l'hypothèse du continu est équivalente au théorème que l'ensemble de tous les points du plan est une somme de deux ensembles, dont un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe des ordonnées.*

Voici la démonstration. Admettons l'hypothèse du continu et soit

$$(2) \qquad t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots, t_\lambda, \ldots \qquad (\lambda < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω, formée du tous les nombres réels différents [2]), Ω désignant le plus petit nombre transfini de la 3^{me} classe).

Désignons par A l'ensemble de tous les points du plan P au coordonnées (t_α, t_β), où $\alpha \leqslant \beta$, et posons $B = P - A$.

Soit b un nombre réel donné: c'est donc un terme de la suite (2), p. ex. $b = t_\beta$ (où β est un nombre ordinal $< \Omega$). Les points de l'ensemble A, dont l'ordonnée y est égale à b, sont des points (t_λ, t_β), pour lesquels $\lambda \leqslant \beta$; β étant $< \Omega$, il en résulte que la droite $y = b$ contient un ensemble au plus dénombrable de points de A. Or, soit a un nombre réel donné, p. ex. $a = t_\alpha$. Les points de $B = P - A$ à l'abscisse $x = a$ sont, comme on voit sans peine, des points (t_α, t_λ), pour lesquels $\lambda < \alpha$: d'après $\alpha < \Omega$ on en conclut que la droite $x = a$ contient un ensemble au plus dénombrable de points de B.

L'hypothèse du continu entraîne donc l'existence d'une décomposition du plan $P = A + B$, jouissant des propriétés désirées. Nous allons maintenant démontrer qu'inversement, l'existence d'une telle décomposition entraine l'hypothèse du continu.

Admettons que l'hypothèse du continu est fausse et soit E un ensemble formé de $\aleph_1$ parallèles à l'axe d'abscisses: désignons par N l'ensemble de tous les points de A qui sont situés sur les parallèles formant E. Toute droite de E contenant un ensemble au plus dénombrable de points de A (d'après la propriété de A) et l'ensemble E contenant $\aleph_1$ droites, il s'ensuit que l'ensemble N a une puissance au plus égale à $\aleph_1$. Il en résulte, à plus forte raison, que la projection orthogonale de l'ensemble N sur l'axe des abscisses a une puissance $\leqslant \aleph_1$. Donc, si la puissance du continu n'est pas $\aleph_1$, il existe un point x_0 sur l'axe d'abscisses qui n'est la projection d'aucun point de l'ensemble N sur cet axe. Par conséquent, tout point d'intersection de la droite $x = x_0$ avec une parallèle à l'axe des abscisses faisant partie de E appartient à l'ensemble $P - A = B$. La droite $x = x_0$ contiendrait donc un ensemble non dénombrable de points de l'ensemble B, contrairement à la propriété de cet ensemble. Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) *Bull. Acad. Cracovie*, note du 24 Février 1919.

[2]) L'existence d'une telle suite résulte de l'hypothèse du continu.

Un autre *théorème équivalent à l'hypothèse du continu est le théorème que l'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'ensembles croissants dénombrables* [1]).

En effet, admettons l'hypothèse du continu. Pour obtenir une famille d'ensembles croissants dénombrables, dont la somme est l'ensemble de tous les nombres réels, il suffit de considérer la famille de tous les segments infinis de la suite transfinie (2).

Or, supposons que l'ensemble de tous les nombres réels est la somme S d'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles croissants dénombrables. La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment une infinité non dénombrable. d'ensembles: soit $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé de $\aleph_1$ ensembles, et soit T la somme de tous les ensembles constituant $\mathcal{H}$. Les ensembles appartenant à la famille $\mathcal{F}$ étant tous dénombrables, il est évident que l'ensemble T a la puissance $\aleph_1$. Or, je dis que $S = T$. Soit, en effet, x un nombre réel donné. L'ensemble de tous les nombres réels étant la somme S de tous les ensembles de la famille $\mathcal{F}$, il existe un ensemble D de cette famille, tel que $x \varepsilon D$. L'ensemble D, comme appartenant à $\mathcal{F}$, étant dénombrable, et l'ensemble T étant non dénombrable, il existe un élément t de T qui n'appartient pas à D. D'après $t \varepsilon T$ et d'après la définition de l'ensemble T, il existe un ensemble D_1 appartenant à $\mathcal{H}$ et tel que $t \varepsilon D_1$. Or D et D_1 appartenant à la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles croissants, nous avons soit $D \supset D_1$, soit $D_1 \supset D$, donc $D_1 \supset D$, puisque $t \varepsilon D_1$ et t non εD. Les formules $x \varepsilon D$, $D \subset D_1$ et $D_1 \subset T$ donnent donc $x \varepsilon T$. Donc l'ensemble T contient tous les nombres réels, et parsuite $S = T$: l'ensemble T ayant la puissance $\aleph_1$, il en résulte que $\overline{\overline{S}} = \aleph_1$, ce qui prouve la formule (1). L'équivalence de l'hypothèse du continu et de notre théorème est ainsi démontrée.

Observons encore que *l'hypothèse du continu est équivalente à l'inégalité*

$$\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0} \tag{3}$$ [2]).

En effet, de (1) résulte $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$, donc

$$\aleph_2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2 > \aleph_1 = \aleph_1^{\aleph_0},$$

ce qui donne l'inégalité (3).

Or, nous avons toutefois $2 < \aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$, ce qui donne

$$2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1^{\aleph_0} \leqslant (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}, \text{ donc } \aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}:$$

l'inégalité (3) donne donc

$$\aleph_2^{\aleph_0} > (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}, \text{ donc } \aleph_2 > 2^{\aleph_0},$$

ce qui entraîne la formule (1).

[1]) *Fund. Math.* t. III, p. 112.

[2]) Donc l'égalité $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_2^{\aleph_0}$ est équivalente à la proposition que l'hypothèse du continu est fausse.

Faisons encore une remarque concernant le *problème du continu:*

Pour qu'il soit $\aleph_x = 2^{\aleph_0}$, il faut et il suffit que α soit le plus petit nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \tag{4}$$

En effet, si $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, nous avons $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha = 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$, ce qui donne l'inégalité (4). Or, pour $\xi < \alpha$ nous avons $\xi + 1 \leqslant \alpha$, ce qui donne, d'après $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$:

$$2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\xi^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\xi+1}^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

donc $\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_{\xi+1}^{\aleph_0}$ pour $\xi < \alpha$.

Remarquons que, μ étant un nombre ordinal donné quelconque, il existe toujours des indices $\alpha \geqslant \mu$ pour lesquels l'inégalité (4) est vraie, et des indices $\alpha \geqslant \mu$ pour lesquels l'inégalité (4) est fausse.

Posons, en effet, $\aleph_\beta = 2^{\aleph_\mu^{\aleph_0}}$: nour aurons évidemment

$$\aleph_\mu^{\aleph_0} < \aleph_\beta^{\aleph_0} \tag{5}$$

(puisque, d'après l'inégalité connue de Cantor, $\aleph_\beta > \aleph_\mu^{\aleph_0}$); μ étant donné, il existe donc des indices β satisfaisant à l'inégalité (5): soit β le plus petit d'entre eux: nous aurons évidemment $\beta > \mu$. Si β était un nombre ordinal de seconde espèce, on aurait $\aleph_\xi \leqslant \aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_\mu^{\aleph_0}$ pour $\mu \leqslant \xi < \beta$, d'où $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\mu^{\aleph_0}$, donc

$$\aleph_\beta^{\aleph_0} \leqslant (\aleph_\mu^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\mu^{\aleph_0},$$

contrairement à (5). Donc β est de 1re espèce et nous pouvons poser $\beta = \alpha + 1$ d'après la définition du nombre β nous avons donc $\alpha \geqslant \mu$ et $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\mu^{\aleph_0} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0}$, ce qui donne l'inégalité (4).

Or, μ étant donné, posons $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\mu} + 2^{2^{\aleph_\mu}} + 2^{2^{2^{\aleph_\mu}}} + \ldots$: nous aurons évidemment $\alpha > \mu$, et on prouve sans peine que

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\alpha} \text{ [1]}; \tag{6}$$

or, nous avons évidemment $\aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$, donc $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\alpha}$, ce qui donne, d'après (6): $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ et prouve que l'indice α ne satisfait pas à l'inégalité (4).

Dans le même ordre d'idées on pourrait énoncer la proposition suivante:

[1]) Cette remarque est due à M. S. Banach; cf. W. Sierpiński: *Zarys Teorji mnogości* Cz. I, Warszawa 1923, p. 181—183.

Pour qu'il soit $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, il faut et il suffit que α soit le plus petit nombre ordinal satisfaisant à l'égalité

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha. \tag{7}$$

En effet, l'égalité (7) est évidemment vérifiée par $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$; or, si $\aleph_\xi < 2^{\aleph_0}$, nous avons $\aleph_\xi^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0} > \aleph_\xi$, donc $\aleph_\xi^{\aleph_0} > \aleph_\xi$.

Ici aussi on pourrait démontrer, pour tout indice μ donné, l'existence des indices $\alpha \geqslant \mu$ pour lesquels la formule (7) subsiste, ainsi que des indices $\alpha \geqslant \mu$ pour lesquels la formule (7) ne subsiste pas. En effet, la formule (7) subsiste, comme on voit sans peine, si l'on pose $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\mu}$ (ce qui donne $\alpha > \mu$); or, elle ne subsiste pas évidemment pour tout indice α, satisfaisant à l'égalité (6).

Remarquons encore que l'inégalité

$$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega \tag{a}$$

est équivalente à l'égalité

$$(\aleph_1 + \aleph_2 + \aleph_3 + \ldots)^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} + \aleph_2^{\aleph_0} + \aleph_3^{\aleph_0} + \ldots \tag{b}$$

En effet, de (a) résulte, pour $\alpha \leqslant \omega$:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

et puisque, d'autre part, $\aleph_\alpha^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0}$, nous avons dans ce cas

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant \omega$$

ce qui donne sans peine la formule (b) (puisque $\aleph_\omega = \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots$, et $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$).

Or, d'après M. F. Bernstein, nous avons

$$\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_n \text{ [1]}, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et la formule (b) donne

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_n^{\aleph_0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_n = 2^{\aleph_0} \aleph_\omega; \tag{c}$$

d'après M. J. König, on a

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega;$$

la formule (c) donne donc l'inégalité (a).

4. On a tiré de l'hypothèse du continu plusieurs consequences intéressantes (qu'on ne sait pas démontrer sans admettre cett hy-

[1]) Il en résulte que l'hypothèse du continu entraîne les formules $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

pothèse), dont nous ne savons pas d'ailleurs prouver qu'elles sont équivalentes à la formule (1). Telles sont les conséquences suivantes.

1) *De l'hypothèse du continu résulte l'inégalité*

$$2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}. \tag{8}$$

En effet, on a, d'après l'inégalité connue de Cantor: $2^{\aleph_1} > \aleph_1$, d'où, d'après (1), résulte l'inégalité (8).

2) *De l'hypothèse du continu résulte l'existence d'un ensemble ordonné (linéairement) de puissance* $\aleph_1$ *qui contient des sous-ensembles de tout type d'ordre de puissance* $\aleph_1$ [1]).

3) M. N. Lusin a démontré en 1914 [2]) que *de l'hypothèse du continu résulte l'existence dans l'intervalle* (0, 1) *d'un ensemble E non dénombrable, tel que tout ensemble non dense dans* (0, 1) *contient au plus un ensemble dénombrable de points de E* [3]).

M. Lusin en a tiré (l. c.) que si la formule (1) est vraie, il existe dans l'intervalle (0, 1) un ensemble G *ayant la puissance du continu* qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait (dense ou non) situé dans (0, 1) [4]). Une fonction $f(x)$ egale à 1 pour les points x d'un sous-ensemble donné quelconque de G et égale 0 pour tous les autres x réels est évidemment continue $(=0)$ sur tout ensemble parfait quand on néglige un ensemble de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait: elle satisfait donc à la condition connue de Baire. L'ensemble de tous les sous-ensembles de G ayant la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ (puisque $\overline{\overline{G}} = 2^{\aleph_0}$), il en résulte que *si la formule* (1) *est vraie, l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire a la puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$ [5]).

Une autre conséquence de la proposition de M. Lusin est que le théorème suivant est incompatible avec l'hypothèse du continu: „Si M est un ensemble mesurable (B) et E un sous-ensemble non dénombrable de M, il existe un ensemble parfait P contenu dans M et contenant une infinité non dénombrable de points de E [6])".

[1]) Cf. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 181 et 182.

[2]) *C. R.* t. 158 (note du 4 mai 1914), p. 1259.

[3]) Cette propriété de E est équivalente à la suivante: Tout sous-ensemble non dénombrable de E est de deuxième catégorie dans (0, 1).

[4]) L'existence d'un tel ensemble G *non dénombrable* peut être démontrée (à l'aide de l'axiome du choix) sans faire appel à l'hypothèse du continu: voir N. Lusin, *Fund. Math.* t. II, p. 155.

[5]) Cf. *Fund. Math.* t. IV, p. 368 (Problème 24).

[6]) On pourrait démontrer sans admettre l'hypothèse du continu que ce théo-

En effet, soit M l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ et soit E l'ensemble non dénombrable de M. Lusin. Si P est un ensemble parfait contenu dans M, P est évidemment non dense dans $(0, 1)$, donc P contient au plus un ensemble dénombrable de points de E. Notre assertion est ainsi démontrée.

4) De l'hypothèse du continu résulte une réponse affirmative au problème de M. Ruziewicz [1]), notamment il résulte de la formule (1) que tout ensemble (linéaire) de puissance inférieure à celle du continu est de la 1[re] catégorie de Baire.

5) De l'hypothèse du continu résulte l'existence d'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ qui est discontinue sur tout ensemble non dénombrable [2]).

6) De l'hypothèse du continu résulte que tout ensemble non mesurable (L) a la puissance du continu On pourrait démontrer que *de l'hypothèse du continu résulte l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable dont tout sous-ensemble non dénombrable est non mesurable* (L).

Nous prouverons d'abord qu'il résulte de la formule (1) l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable E, tel que tout ensemble mesurable (B) de mesure nulle contient au plus un ensemble dénombrable de points de E.

L ensemble de tous les ensembles mesurables (B) de mesure nulle ayant la puissance du continu. il résulte de la formule (1) l'existence d'une suite transfinie du type Ω,

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\dots,\ M_\omega,\ M_{\omega+1},\dots,\ M_\alpha,\dots,\qquad (\alpha<\Omega) \tag{9}$$

formée de tous les ensembles mesurables (B) de mesure nulle.

Posons

$$R_\alpha = M_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} M_\xi,\ \text{pour}\ \alpha<\Omega: \tag{10}$$

je dis que parmi les ensembles

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\dots\ R_\omega,\dots,\ R_\alpha,\dots \tag{11}$$

il y a une infinité non dénombrable qui sont non vides. En effet, dans le cas

rème ne subsiste pas pour les ensembles complémentaires aux ensembles (A) de M. Souslin. On peut, en effet démontrer (à l'aide de l'axiome du choix) l'existence d'un ensemble M, dont le complémentaire est un ensemble (A), et d'un ensemble non dénombrable $E \subset M$ tels que tout ensemble mesurable (B) contenu dans M contient au plus un ensemble dénombrable de points de E (Cf. N. Lusin et W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 42–43).

[1]) *Fund. Math.* t. III, p. 322 (Problème 18).

[2]) W. Sierpiński et A. Zygmund: *Fund Math.* t. IV, p. 318.

contraire, on aurait pour un certain nombre ordinal $\mu < \Omega$: $R_\alpha = 0$, pour $\alpha \geqslant \mu$, donc, d'après (10), $M_\alpha \subset \sum_{\xi<\alpha} M_\xi = S$, pour $\alpha \geqslant \mu$, donc pour tout $\alpha < \Omega$ (puisque évidemment $M_\alpha \subset S$ pour $\alpha < \mu$). L'ensemble S contiendrait donc tout ensemble mesurable (B) de mesure nulle, donc tout nombre réel, ce qui est impossible, S étant de mesure nulle, comme somme d'un ensemble au plus dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Supprimons dans la suite (11) tous les termes qui sont des ensembles vides: nous obtiendrons ainsi, comme on voit sans peine, une suite transfinie (du type Ω)

(12) $$R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, R_{\lambda_3}, \ldots, R_{\lambda_\omega}, \ldots, R_{\lambda_\alpha}, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

et nous aurons $\lambda_\alpha \geqslant \alpha$ pour $\alpha < \Omega$.

Dans chacun des ensembles R_{λ_α} prenons un point p_α, et soit E l'ensemble de tous les points p_α, où $\alpha < \Omega$. D'après (10) on voit sans peine que les ensembles (11) sont sans éléments communs deux à deux: l'ensemble E est donc non dénombrable.

Or, soit ξ un nombre ordinal donné $< \Omega$ D'après $\lambda_\alpha \geqslant \alpha$, nous avons $\lambda_\alpha > \xi$ pour $\alpha > \xi$, donc, d'après (10): $R_{\lambda_\alpha} M_\xi = 0$ pour $\alpha > \xi$, ce qui donne, d'après $p_\alpha \,\varepsilon\, R_{\lambda_\alpha}$: p_α non $\varepsilon\, M_\xi$ pour $\alpha > \xi$. Les points p_α de E qui appartient à M_ξ ont donc nécessairement des indices $\alpha \leqslant \xi$: donc leur ensemble est au plus dénombrable (puisque $\xi < \Omega$). Nous avons ainsi démontré que tout ensemble (9), donc tout ensemble (linéaire) mesurable (B) de mesure nulle, contient au plus un ensemble dénombrable de points de E.

Soit maintenant N un sous-ensemble non dénombrable donné quelconque de E. Si la mesure intérieure (lebesguienne) de N, $m_i(N)$, était > 0, N contiendrait évidemment un ensemble (parfait) mesurable (B) de mesure nulle, ce qui est impossible d'après $N \subset E$ et la propriété de l'ensemble E.

Donc $m_i(N) = 0$ Par conséquent, si N était mesurable (L), sa mesure serait $= 0$ et il existerait un ensemble mesurable B de mesure nulle contenant N, ce qui est impossible d'après $N \subset E$ et la propriété de E. Donc l'ensemble N est non mesurable (L).

Nous avons ainsi établi que tout sous-ensemble non dénombrable de l'ensemble E est non mesurable (L) Observons encore qu'on pourrait sans peine démontrer sans admettre l'hypothèse du continu (en s'appuyant sur l'axiome du choix) l'existence d'un ensemble non dénombrable dont tout sous-ensemble non dénombrable est non mesurable (B) (Tel est tout ensemble non dénombrable ne contenant aucun sous-ensemble parfait).

7) De l'hypothèse du continu résulte une réponse affirmative au problème suivant, posé par M. Kuratowski[1]): „A étant un ensemble de nombres réels qui n'est de 1re catégorie dans aucun intervalle, existe-il une décomposition: $A = B + C$, $BC = 0$, telle que ni B ni C ne soient de 1re catégorie dans aucun intervalle"?

[1]) *Fund. Math.* t. IV, p. 368 (Problème 21).

En effet, on démontre sans peine que pour qu'un ensemble ne soit pas de 1re catégorie dans un intervalle, il faut et il suffit qu'il possède une infinité non dénombrable de points communs avec tout ensemble G_δ [1]) dense dans cet intervalle.

Or, l'ensemble $\mathcal{F}$ de tous les ensembles G_δ dont chacun est situé dans un intervalle (d'ailleurs quelconque) et dense dans cet intervalle, a la puissance du continu. Il résulte donc de l'hypothèse du continu l'existence d'une suite transfinie du type Ω,

$$(13) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \ldots, \Gamma_\alpha, \ldots, \qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

Soit maintenant A un ensemble qui n'est de 1re catégorie dans aucun intervalle: les ensembles $A\Gamma_\alpha$ sont donc tous non dénombrables, pour $\alpha<\Omega$. Prenons deux points, p_1 et q_1 dans $A\Gamma_1$ et supposons définis les points p_ξ et q_ξ, pour $\xi<\alpha$ (α étant un nombre ordinal donné quelconque $<\Omega$). Les ensembles des points p_ξ et q_ξ, où $\xi<\alpha$, sont au plus dénombrables, puisque $\alpha<\Omega$: il existe donc dans l'ensemble (non dénombrable) $A\Gamma_\alpha$ deux points p_α et q_α, distincts de tous les points p_ξ et q_ξ pour $\xi<\alpha$. Soit B l'ensemble de tous les points p_ξ, où $\xi<\Omega$, et posons $C=A-B$: on voit sans peine que les ensembles $B\Gamma_\alpha$ et $C\Gamma_\alpha$ sont tous non vides pour $\alpha<\Omega$. Un intervalle quelconque étant donné, les ensembles B et C ont donc des points communs avec tout ensemble G_δ dense dans cet intervalle, d'où résulte sans peine que ni B ni C ne peuvent être de 1re catégorie dans aucun intervalle. La formule $A=B+C$ fournit donc la décomposition désirée.

5. Observons que les démonstrations de plusieurs propositions achevées à l'aide de l'hypothèse du continu peuvent être sans peine modifiées de sorte qu'on obtient des théorèmes vrais indépendamment de cette hypothèse et tels que les propositions en question en résultent immédiatement, si l'on admet l'hypothèse du continu. P. e. en modifiant légèrement la démonstration de la proposition 3) de M. Lusin, on obtient (à l'aide de l'axiome de M Zermelo, mais sans admettre l'hypothèse du continu) le théorème suivant:

Il existe dans l'intervalle (0, 1) *un ensemble non dénombrable de points E, tel que l'ensemble de points de E communs avec un ensemble donné quelconque non dense dans* (0, 1) *a une puissance inférieure à celle du continu.*

Pareillement la proposition 5) peut être remplacée par le théorème qu'il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$, discontinue sur tout ensemble de puissance du continu [2]), et la proposition 6) par le théorème qu'il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble de puissance du continu est non

[1]) c.-à.-d. produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

[2]) *Fund. Math.* t. IV. p. 316.

mesurable (L) (tous les deux théorèmes pouvant être déduits du théorème de M. Zermelo, sans l'aide de l'hypothèse du continu).

6. On ne connait que très peu de propositions qui semblent probables et qu'on ne sait pas démontrer autrement qu'en admettant que l'hypothèse du continu est fausse. Telle est p. e. la proposition suivante:

Tout ensemble linéaire de puissance du continu dont le complémentaire est un ensemble A[1]) *contient un sous-ensemble parfait.*

En effet, on démontre dans la théorie des ensembles (A) que tout ensemble E dont le complémentaire est un ensemble (A) est une somme $\sum_{\alpha<\Omega} B_\alpha$ de $\aleph_1$ ensembles mesurables (B)[2]). Supposons maintenant que E a la puissance du continu et admettons que l'hypothèse du continu est fausse. Il en résulte qu'un au moins des ensembles B_α est non dénombrable (puisque autrement l'ensemble E, comme une somme de $\aleph_1$ ensemble au plus dénombrables, serait de puissance $\leqslant \aleph_1$, donc inferieure à celle du continu, contrairement à l'hypothèse sur E). Or, comme on sait, tout ensemble non dénombrable mesurable (B) contient un sous-ensemble parfait. Donc $E \supset B_\alpha$ contient un sous-ensemble parfait, c. q. f. d.

[1]) Les ensembles (A) linéaires sont des projections orthogonales des ensembles plans mesurables (B).

[2]) Voir p. e.: N. Lusin et W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 39; *Journ. de Math.* t. II, 1923, p 56.

Il est remarquable qu'on peut démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'il n'existe aucun ensemble complémentaire à un ensemble (A) et dont la puissance est contenu entre $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$ (Cf. *Fund. Math* t. I, p. 224, Problème 9).