Sur l'unicité de la décomposition de nombres ordinaux en facteurs irréductibles.

Par

F. Sieczka (Varsovie).

M. A. Schoenflies écrit dans son livre connu[1]) que tout nombre transfini peut être représenté d'une façon unique comme produit d'un nombre fini de nombres multiplicativement irréductibles. Or, on voit sans peine que cette proposition n'est pas exacte, si l'on n'ajoute pas de conditions supplémentaires: p. e. le nombre ω^2 donne deux décompositions différentes en facteurs irréductibles, $\omega . \omega$ et $(\omega+1)\omega$. Le but de cette Note est de modifier la proposition de M. Schoenflies de sorte que l'unicité du développement subsiste pour tous les nombres transfinis.

Nous appellerons *facteur irréductible* tout nombre ordinal $\alpha > 1$ qui n'est pas un produit de deux nombres ordinaux $< \alpha$. On voit sans peine que le plus petit diviseur droit > 1 de tout nombre ordinal est un facteur irréductible[2]).

Soit $\alpha > 1$ un nombre ordinal donné π_1 le plus petit diviseur droit > 1 de α: il existe donc au mons un nombre ordinal ξ, tel que $\alpha = \xi\pi_1$: soit α_1 le plus petit de nombres ξ vérifiant cette égalité: nous aurons donc $\alpha = \alpha_1\pi_1$, et $\alpha_1 < \alpha$, puisque $\pi_1 > 1$. Si $\alpha_1 > 1$, soit π_2 le plus petit diviseur droit > 1 de α_1, et désignons par α_2 le plus petit nombre ordinal, tel que $\alpha_1 = \alpha_2\pi_2$. Si $\alpha_2 > 1$,

[1]) *Entwickelung der Mengenlehre etc.* Erste Hälfte. Leipzig u Berlin 1913, p. 161. V aussi l c, p. 116 (Proposition VI).

[2]) On appelle *diviseur droit* du nombre α le nombre ordinal δ, s'il existe un nombre ordinal ξ, tel que $\alpha = \xi\delta$. Un diviseur droit d'un diviseur droit du nombre α est évidemment un diviseur droit de α, d'où résulte notre proposition.

nous pouvons procéder de même, et ainsi de suite. Les nombres $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ formant une suite décroissante de nombres ordinaux, nous arrivons nécessairement, pour un indice k fini, au nombre $\alpha_k = 1$, et les égalités successives $\alpha = \alpha_1 \pi_1$, $\alpha_1 = \alpha_2 \pi_2, \ldots$ $\alpha_{k-1} = \alpha_k \pi_k$, donnent

(1) $$\alpha = \pi_k \pi_{k-1} \ldots \pi_2 \pi_1,$$

donc une décomposition du nombre α en un nombre fini de facteurs irréductibles[1].

Étudions maintenant quelques propriétés de la décomposition ainsi obtenue.

Soient π_{j+1} et $\pi_j (j < k)$ deux facteurs successifs de la décomposition (1). Je dis qu'il est impossible que π_{j+1} soit un nombre ordinal de première espèce et π_j un nombre ordinal de seconde espèce. Admettons, en effet, qu'il est ainsi, donc $\pi_{j+1} = \gamma + 1$. Le nombre π_j étant de seconde espèce, nous avons, comme on sait: $(\gamma+1)\pi_j = \gamma \pi_j$, donc

$$\alpha_{j-1} = \alpha_j \pi_j = \alpha_{j+1} \pi_{j+1} \pi_j = \alpha_{j+1} (\gamma + 1) \pi_j = \alpha_{j+1} \gamma^{\pi_j}$$

et

$$\alpha_{j+1} \gamma < \alpha_{j+1} (\gamma + 1) = \alpha_{j+1} \pi_{j+1} = \alpha_j:$$

le nombre $\xi = \alpha_{j+1} \gamma < \alpha_j$ vérifie donc l'égalité $\alpha_{j-1} = \xi \pi_j$, ce qui est impossible, α_j désignant le plus petit nombre ordinal vérifiant cette égalité.

Donc, dans la décomposition (1), un facteur de 1^re^ espèce ne précède jamais un facteur de seconde espèce.

On voit ensuite sans peine que si les facteurs successifs π_{j+1} et π_j sont tous deux finis, on a toujours $\pi_{j+1} \geqslant \pi_j$. Admettons, en effet, qu'il est $\pi_{j+1} < \pi_j$: les nombres π_{j+1} et π_j étant tous deux finis (donc leur produit commutatif), nous aurons

$$\alpha_{j-1} = \alpha_j \pi_j = \alpha_{j+1} \pi_{j+1} \pi_j = \alpha_{j+1} \pi_j \pi_{j+1}$$

et π_{j+1} serait un diviseur droit >1 de α_{j-1} plus petit que π_j, contrairement à la définition de π_j.

Supposons maintenant que les facteurs successifs π_{j+1} et π_j sont tous deux des nombres ordinaux de seconde espèce, et admettons qu'on a $\pi_{j+1} < \pi_j$. On démontre que tout facteur irréductible qui

[1] Cf. W. Sierpiński: *Zarys teorji mnogosci*, Część I (Wydanie drugie) Warszawa 1923, p. 158.

est de seconde espèce, est de la forme ω^{ω^γ} (où γ est un nombre ordinal quelconque $\geqslant 0$). Nous avons donc $\pi_j = \omega^{\omega^\zeta}$ et $\pi_{j+1} = \omega^{\omega^\eta}$, donc $\zeta > \eta$ (puisque, d'après l'hypothèse, $\pi_j > \pi_{j+1}$). Or, comme on sait, il est $\omega^\eta + \omega^\zeta = \omega^\zeta$ pour $\zeta > \eta$, donc

$$\alpha_{j-1} = \alpha_j \pi_j = \alpha_{j+1} \pi_{j+1} \pi_j = \alpha_{j+1} \omega^{\omega^\eta} . \omega^{\omega^\zeta} =$$
$$= \alpha_{j+1} \omega^{\omega^\eta + \omega^\zeta} = \alpha_{j+1} \omega^{\omega^\zeta} = \alpha_{j+1} \pi_j :$$

le nombre $\alpha_{j+1} < \alpha_{j+1} \pi_{j+1} = \alpha_j$ vérifie donc l'égalité $\alpha_{j-1} = \xi \pi_j$, ce qui est impossible, d'après la définition du nombre α_j. Il en résulte que $\pi_{j+1} \geqslant \pi_j$.

Nous avons ainsi démontré que tout nombre ordinal $\alpha > 1$ donne une décomposition (1) en facteurs irréductibles, telle que, pour deux facteurs successifs quelconques de (1), si le précédent est de première espèce, le suivant l'est aussi. et si tous les deux sont finis, ou si tous les deux sont de seconde espèce, le suivant est non supérieur que le précédent. Nous allons maintenant à démontrer qu'une telle décomposition est unique (pour tout nombre ordinal $\alpha > 1$ donné).

Soit α un nombre ordinal donné. Il existe, d'après Cantor, une décomposition unique du nombre α de la forme

$$\alpha = \omega^{\lambda_1} n_1 + \omega^{\lambda_2} n_2 + \ldots + \omega^{\lambda_k} n_k, \tag{2}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres ordinaux $\geqslant 0$ décroissants et k, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont des nombres naturels [1]). Soit $n_1 = pq$, où p et q sont deux nombres naturels. On vérifie sans peine l'égalité

$$\alpha = (\omega^{\lambda_1} p + \omega^{\lambda_2} n_2 + \omega^{\lambda_3} n_3 + \ldots + \omega^{\lambda_k} n_k) q;$$

d'où résulte tout de suite que les diviseurs droits finis de α coïncident avec les diviseurs du nombre n_1. Donc, si α possède des diviseurs droits finis > 1, on a $n_1 > 1$.

Soit maintenant π un diviseur droit de α qui est un facteur irréductible et un nombre transfini de 1re espèce. On démontre que tout facteur irréductible qui est un nombre transfini de 1re espèce, est de la forme $\omega^\gamma + 1$ (où γ est un nombre ordinal quelconque > 0) [2]). Nous avons donc, pour un nombre ordinal β:

$$\alpha = \beta \pi = \beta(\omega^\gamma + 1). \tag{3}$$

[1]) V. p. e. Schoenflies l. c. p. 115.
[2]) l. c. p 161.

Soit

$$\beta = \omega^{\mu_1} m_1 + \omega^{\mu_2} m_2 + \ldots + \omega^{\mu_l} m_l \tag{4}$$

la forme normale du nombre β. On trouve sans peine:

$$\beta \,.\, \omega^{\gamma} = \omega^{\mu_1} m_1 \, \omega^{\gamma} = \omega^{\mu_1+\gamma},$$

donc, d'après (3), et (4)

$$\alpha = \beta \,.\, \omega^{\gamma} + \beta = \omega^{\mu_1+\gamma} + \omega^{\mu_1} m_1 + \omega^{\mu_2} m_2 + \ldots + \omega^{\mu_l} m_l. \tag{5}$$

La forme normale du nombre α étant unique, nous trouvons, en comparant les formules (2) et (5):

$$\mu_1 + \gamma = \lambda_1, \ \mu_1 = \lambda_2, \quad \text{et} \quad n_1 = 1,$$

ce qui montre que le nombre γ est bien déterminé (par le nombre α) et que α n'a pas de diviseurs droits finis > 1.

Nous avons ainsi démontré qu'un nombre ordinal ne peut avoir plus qu'un diviseur droit qui est un facteur irréductible transfini de 1re espèce, et s'il y en a un, il n'a pas de diviseurs droits finis > 1.

Soit maintenant π un diviseur droit de α qui est un facteur irréductible et un nombre de seconde espèce. Tout facteur irréductible de seconde espèce étant de la forme $\omega^{\omega^{\gamma}}$, nous avons donc, pour un nombre ordinal β:

$$\alpha = \beta \pi = \beta \, \omega^{\omega^{\gamma}},$$

et, si (4) est la forme normale du nombre β:

$$\alpha = \beta \, \omega^{\omega^{\gamma}} = \omega^{\mu_1} m_1 \, \omega^{\omega^{\gamma}} = \omega^{\mu_1+\omega^{\gamma}}, \tag{6}$$

donc, d'après (2):

$$\lambda_1 = \mu_1 + \omega^{\gamma}, \quad \text{et} \quad n_1 = 1,$$

d'où résulte sans peine que ω^{γ} est le plus petit reste du nombre λ_1. Le nombre γ est ainsi bien déterminé par le nombre α. Or, de $n_1 = 1$ résulte que α n'a pas de diviseurs droits finis > 1. En comparant le formule (6) avec la formule (5), on voit enfin que α n'a par de diviseurs droits qui sont de facteurs irréductibles de 1re espèce.

En résumant les résultats obtenus, nous pouvons énoncer ce

Lemme I: *Un nombre ordinal α ne peut avoir plus qu'un diviseur droit transfini qui soit un facteur irréductible, et s'il y en a un, α n'a pas de diviseurs droits finis > 1.*

Démontrons encore le suivant

Lemme II: *Si δ est un diviseur droit de première espèce du nombre α, il existe un nombre β unique, tel que $\alpha = \beta\delta$.*

En effet, δ étant de 1re espèce, nous pouvons écrire $\delta = \gamma + 1$.

S'il était $\beta\delta = \beta_1\delta$, pour $\beta_1 > \beta$, on aurait

$$\beta\delta = \beta(\gamma+1) = \beta\gamma + \beta < \beta\gamma + \beta_1 \leqslant \beta_1\gamma + \beta_1 = \beta_1(\gamma+1) = \beta_1\delta,$$

donc $\beta\delta < \beta_1\delta$, ce qui est impossible.

Théorème. *Tout nombre ordinal α donne une décomposition unique en un nombre fini de facteurs irréductibles $\alpha = \pi_k\pi_{k-1}\ldots\pi_2\pi_1$, telle que, pour deux facteurs successifs, si le précédent est de première espèce, le suivant l'est aussi, et si tous les deux sont finis, ou bien tous les deux de seconde espèce, le suivant est non supérieur que le précédent.*

Nous avons prouvé plus haut qu'une telle décomposition existe: il suffira donc démontrer qu'elle est unique.

Soit donc $\alpha = \pi_k\pi_{k-1}\ldots\pi_2\pi_1$ une décomposition satisfaisant aux conditions de notre théorème. De ces conditions et du lemme I résulte tout de suite que π_1 est le plus petit diviseur droit > 1 de α. Si π_1 est de 1re espèce, le nombre $\alpha_1 = \pi_k\pi_{k-1}\ldots\pi_2$ est bien déterminé (par α) d'après le lemme II, et nous pouvons raisonner sur α_1 comme sur α. Si π_1 est de seconde espèce, $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_k$ le sont aussi, et nous avons $\pi_i = \omega^{\omega^{\gamma_i}}$, pour $i = 1, 2, \ldots k$, et $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_k$, donc $\alpha = \omega^{\omega^{\gamma_k}+\omega^{\gamma_{k-1}}+\ldots+\omega^{\gamma_2}+\omega^{\gamma_1}}$: il est donc $\alpha = \omega^\mu$, et $\mu = \omega^{\gamma_k} + \omega^{\gamma_{k-1}} + \ldots + \omega^{\gamma_1}$, et il résulte de la décomposition normale du nombre μ que les nombres γ_i, et parsuite les facteurs $\pi_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, sont bien déterminés par le nombre α. Notre théorème est ainsi démontré.
