# Sur la puissance des ensembles mesurables $(B)$.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. M. Alexandroff et Hausdorff ont démontré presque en même temps, indépendamment l'un de l'autre, que tout ensemble non dénombrable mesurable $(B)$ contient un sous-ensemble parfait [1]. Leurs démonstrations, fondées sur une même idée, sont assez compliquées et utilisent les nombres transfinis. Le théorème en question résulte d'ailleurs d'une proposition plus générale de M. Souslin [2], d'après laquelle tout ensemble $(A)$ non dénombrable contient un sous-ensemble parfait.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème de MM. Alexandroff et Hausdorff sans faire appel aux nombres transfinis et à la théorie des ensembles $(A)$. Nous définirons une propriété $\Pi$ d'ensembles, dont nous prouverons qu'elle appartient aux ensembles fermés et aux sommes et produits d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de ladite propriété. Il en résulte, comme on sait, qu'une telle propriété appartient à tous les ensembles mesurables $(B)$. Or, nous prouverons que tout ensemble non dénombrable jouissant de la propriété $\Pi$ contient un sous-ensemble parfait.

**Définition.** Nous dirons qu'un ensemble de points $E$ (situé dans un espace à $m$ dimensions) jouit de la propriété $\Pi$, s'il existe une suite infinie de fonctions d'ensembles $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, satisfaisant aux deux conditions suivantes:

[1]) P. Alexandroff: *Comptes Rendus*, t. 162.
F. Hausdorff: *Math. Ann.* 77 (1916), p. 430. V. aussi H. Hahn: *Theorie der reellen Funktionen* I. Berlin 1921. p. 338.

[2]) M. Souslin: *C. R.*, t. 164: note du 8 janvier 1917.

1°: Si $P_n$ est un ensemble non dénombrable, $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est un ensemble non dénombrable contenu dans $P_n$.

2°: Si $P_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ est une suite infinie d'ensembles, telle que

α) $P_1 \subset E$,

β) $P_{n+1} \subset \varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

γ) $P_n$ est un ensemble non dénombrable (pour $n = 1, 2, \ldots$),

alors

$$\overline{P_1} \cdot \overline{P_2} \cdot \overline{P_3} \ldots \subset E \text{ [1]}. \tag{1}$$

On voit sans peine que les ensembles fermés jouissent de la propriété $\Pi$: pour obtenir la suite correspondante de fonctions $\varphi_n$, il suffira évidemment de poser $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = P_n$ (pour tout $n$ naturel et tous les ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_n$).

Soit maintenant

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots, \tag{2}$$

où $E_k (k=1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles jouissant de la propriété $\Pi$, et désignons par $\varphi_n^k$ la suite de fonctions correspondant à l'ensemble $E_k$. Nous définirons maintenant la suite de fonctions $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ comme il suit.

Si l'ensemble $EP_1$ est fini ou dénombrable, posons $\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = P_n$.

Si l'ensemble $EP_1$ est non dénombrable, il existe un premier terme de la série (2), soit $E_q$, tel que l'ensemble $E_q$ est non dénombrable; posons dans ce cas

$$\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = \varphi_n^q(E_q P_1, P_2, \ldots, P_n), \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

On prouve sans difficulté que la suite de fonctions $\varphi_n (n=1, 2, \ldots)$ ainsi définie correspond à l'ensemble $E$. Donc, l'ensemble $E$ jouit de la propriété $\Pi$.

En effet, il suffit de vérifier que les $\varphi_n$ satisfont aux conditions 1° et 2°.

Quant à la condition 1°, cela résulte immédiatement de la définition des fonctions $\varphi_n$ et de la remarque que la suite des fonctions $\varphi_n^q (n=1, 2, \ldots)$ correspond à l'ensemble $E_q$, donc satisfait à la condition 1°.

Or, soit $P_n (n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant aux conditions α), β) et γ). De α) et γ) résulte que l'ensemble $EP_1 = P_1$ est non dénombrable: d'après la définition des fonctions $\varphi_n$ nous avons donc les formules (3).

[1] $\overline{P}$ désigne, comme d'habitude, la somme $P + P'$, où $P'$ est l'ensemble dérivé de $P$.

Posons

(4) $$Q_1 = E_q P_1, \text{ et } Q_n = P_n \text{ pour } n = 2, 3, \ldots;$$

d'après $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) et (3) on voit que la suite d'ensembles $Q_n\,(n=1, 2,\ldots)$ est telle que

$\alpha'$) $Q_1 \subset E_q$,

$\beta'$) $Q_{n+1} \subset \varphi_n^q(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

$\gamma'$) $Q_n$ est non dénombrable, pour $n = 1, 2, \ldots$

Donc (la suite $\varphi_n^q\,(n=1, 2, \ldots)$ correspondant à l'ensemble $E_q$), nous concluons que

(5) $$\overline{Q_1}\,\overline{Q_2}\,\overline{Q_3}\ldots \subset E_q.$$

Or, d'après $\beta'$), $\varphi_1^q$ satisfaisant à condition 1° et $Q_1 = E_q P_1$ étant non dénombrable, nous avons $Q_2 \subset \varphi_1^q(Q_1) \subset Q_1$, donc $\overline{Q_2} \subset \overline{Q_1}$ et $\overline{Q_1}\,\overline{Q_2} = \overline{Q_2}$: la formule (5) donne donc

$$\overline{Q_2}\,\overline{Q_3}\,\overline{Q_4}\ldots \subset E_q,$$

donc, d'après (4):

$$\overline{P_2}\,\overline{P_3}\,\overline{P_4}\ldots \subset E_q,$$

et, à plus forte raison:

$$\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3}\,\overline{P_4}\ldots \subset E_q,$$

ce qui donne, d'après $E_q \subset E$, la formule (1).

La suite $\varphi_n\,(n=1, 2, \ldots)$ satisfait donc à la condition 2°.

Soit maintenant

(6) $$E = E_1 E_2 E_3 \ldots,$$

$E_k\,(k = 1, 2, 3, \ldots)$ étant des ensembles jouissant de la propriété $\Pi$. Désignons encore par $\varphi_n^k\,(n=1, 2, \ldots)$ la suite de fonctions correspondant à l'ensemble $E_k$

Désignons, pour tout $n$ naturel, par $p_n$ et $q_n$ deux nombres naturels, tels que $n = 2^{p_n-1}(2q_n - 1)$ (les nombres $p_n$ et $q_n$ sont, comme on sait, bien déterminés par le nombre $n$). Posons, pour tout $n$ naturel:

(7) $$\varphi_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = \varphi_{q_n}^{p_n}(P_{2^{p_n-1}\cdot 1}, P_{2^{p_n-1}\cdot 3}, P_{2^{p_n-1}\cdot 5}, \ldots, P_{2^{p_n-1}\cdot(2q_n-1)});$$

on vérifie sans peine que la suite des fonctions $\varphi_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ ainsi définies satisfait aux conditions 1° et 2°, d'où résulte que l'ensemble $E$ jouit de la propriété $\Pi$

En effet, il résulte immédiatement de (7), d'après $P_{2^{p_n-1}(2q_n-1)} = P_n$ (les fonctions $\varphi_n^k\,(n=1, 2, 3,\ldots)$ correspondant à l'ensemble $E_k$), que les fonctions $\varphi_n\,(n=1, 2,\ldots)$ satisfont à la condition 1°.

Or, soit $P_n\,(n=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'ensembles satisfaisant aux conditions $\alpha$), $\beta$) et $\gamma$). De $\beta$), $\gamma$) et 1° résulte que

$$(8) \qquad P_{n+1} \subset P_n, \text{ pour } n=1, 2, 3, \ldots$$

L'indice $p$ étant fixe, posons

$$(9) \qquad Q_q = P_{2^{p-1}(2q-1)} \text{ pour } q=1, 2, 3, \ldots$$

D'après (8), $\alpha$) et (6), nous avons:

$$(10) \qquad Q_1 = P_{2^{p-1}} \subset P_1 \subset E \subset E_p$$

Or, d'après (9) et (8)

$$(11) \qquad Q_{q+1} = P_{2^{p-1}(2q+1)} \subset P_{2^{p-1}(2q-1)+1}.$$

et, d'après $\beta$):

$$(12) \qquad P_{2^{p-1}(2q-1)+1} \subset \varphi_{2^{p-1}(2q-1)}(P_1, P_2, \ldots, P_{2^{p-1}(2q-1)});$$

d'autre part (d'après (7) et (9)):

$$(13) \qquad \varphi_{2^{p-1}(2q-1)}(P_1, P_2, \ldots, P_{2^{p-1}(2q-1)}) = \varphi_q^p(Q_1, Q_2, \ldots, Q_q).$$

Les formules (11), (12) et (13) donnent donc

$$(14) \qquad Q_{q+1} \subset \varphi_q^p(Q_1, Q_2, \ldots, Q_q), \text{ pour } q=1, 2, \ldots$$

D'apres $\gamma$) et (9) nous concluons enfin que les ensembles (9) sont tous non dénombrables. Donc, d'après (10) et (14), la suite $\varphi_q^p\,(q=1, 2, \ldots)$ correspondant à l'ensemble $E_p$, nous avons

$$\overline{Q_1}\,\overline{Q_2}\,\overline{Q_3} \ldots \subset E_p$$

et, d'après (9), à plus forte raison:

$$(15) \qquad \overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3} \ldots \subset E_p$$

La formule (15) étant vraie pour tout indice $p$, il en résulte, d'après (6), la formule (1).

Nous avons donc démontré que la suite des fonctions $\varphi_n$ satisfait à la condition 2°. Or, nous avons établi plus haut que les fonctions $\varphi_n$ satisfont à la condition 1°. Donc, la suite $\varphi_n$ correspond à l'ensemble $E$ qui jouit ainsi de la propriété $\Pi$, c. q f d.

Nous avons donc établi que tout ensemble mesurable $(B)$ jouit de la propriété $\Pi$. Nous allons maintenant démontrer que tout ensemble non dénombrable jouissant de la propriété $\Pi$ contient un sous-ensemble parfait.

On peut sans peine définir une loi d'après laquelle à tout ensemble non dénombrable de points $N$ correspondent deux sous-ensembles non dénombrables de $N$, $\psi(N)$ et $\vartheta(N)$, tels que

$$(16) \qquad \overline{\psi(N)} \cdot \overline{\vartheta(N)} = 0.$$

Soit maintenant $E$ un ensemble non dénombrable, jouissant de la propriété $II$. Posons

$$(17) \qquad E_0 = \psi(E), \quad E_1 = \vartheta(E).$$

et supposons que, $n$ étant un nombre naturel donné, nous avons déjà définis les ensembles non dénombrables $E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$, où $k \leqslant n$ et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ est un système quelconque formé de nombres 0 et 1. Posons

$$(18) \qquad \begin{aligned} E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0} &= \psi[\varphi_n(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1, \alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n})], \\ E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1} &= \vartheta[\varphi_n(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1, \alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n})], \end{aligned}$$

$\varphi_n$ étant la fonction correspondant à l'ensemble $E$.

Les ensembles $E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ sont ainsi définis par l'induction et ils sont évidemment tous non dénombrables.

Soit maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une suite infinie donné quelconque fermée de nombres 0 et 1 et posons

$$(19) \qquad P_n = E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On vérifie sans peine (en s'appuyant sur les formules (17) et (18)) que la suite infinie d'ensembles (19) satisfait aux conditions $\alpha$), $\beta$) et $\gamma$). Par conséquent nous avons la formule (1), c'est-à-dire

$$(20) \qquad F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) = \overline{E}_{\alpha_1} \overline{E}_{\alpha_1, \alpha_2} \overline{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \cdots \subset E.$$

L'ensemble $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ est fermé et non vide (comme produit d'une suite infinie décroissante d'ensembles fermés). Or, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ étant deux suites distinctes, formés de nombres 0 et 1, nous avons

$$(21) \qquad F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \,.\, F(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) = 0.$$

En effet, $\alpha_p$ et $\beta_p$ étant les premiers termes différents de ces suites. p. e. $\alpha_p = 0, \beta_p = 1$, nous aurons

$$E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = \psi(Q), \quad E_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p} = \vartheta(Q),$$

où $Q = \varphi_{p-1}(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1, \alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}})$ pour $p > 1$, et $Q = E$ pour $p = 1$. Donc, d'après (16):

$$(22) \qquad \overline{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \,.\, \overline{E}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p} = 0;$$

or, de (20) résulte que

$$F(\alpha_1, \alpha_2 . \alpha_3, \ldots) \subset \overline{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \quad \text{et} \quad F(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) \subset \overline{E}_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p},$$

ce qui prouve, d'après (22), la formule (21).

Posons

$$(23) \qquad S = \Sigma F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots),$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, formées de nombres 0 et 1. Il résulte de (21) que $S$ est un ensemble non dénombrable. Or. de (20) et (23) résulte que $S \subset E$.

Or, posons

$$(24) \qquad F_n = \Sigma \overline{E}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, formés de nombres 0 et 1 ($n$ étant fixe). Les ensembles $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont donc tous fermés (comme sommes finies d'ensembles fermés): donc leur produit

$$(25) \qquad F = F_1 F_2 F_3 \ldots$$

est un ensemble fermé. Or, il résulte sans peine de (20), (22), (23), (24) et (25) que $F = S$. Donc $F$ est un ensemble fermé non dénombrable, contenu dans $E$: le noyau de $F$ est donc un ensemble parfait $\subset E$.

Nous avons ainsi établi que *tout ensemble non dénombrable mesurable* $(B)$ *contient un sous-ensemble parfait*, c. q. f. d.