# Sur les ensembles complémentaires aux ensembles $(A)$.

Par

Paul Alexandroff (Moscou).

1. Le but de la présente Note est de donner une définition *positive* des ensembles complémentaires aux ensembles $(A)$ et de l'appliquer ensuite à la démonstration de l'invariance topologique de ces ensembles[1]). Nous supposons tous les ensembles dont on aura l'affaire agrégés à un espace compact métrique[2]) (= classe $(D)$ de M. Fréchet compacte en soi), donc, en particulier, à l'espace euclidien borné d'un nombre quelconque de dimensions. Les raisonnements qui vont suivre permettent d'ailleurs une généralisation immédiate pour le cas d'un espace euclidien non borné, ou de l'espace à zéro dimensions si heureusement introduit par M. René Baire.

Dans ces conditions on peut prendre une quelconque des deux définitions I, II suivantes des ensembles $(A)$, définitions immédiatement équivalentes:

Un ensemble de points $E$ est dit *ensemble* $(A)$ s'il existe pour lui au moins un *système déterminant* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$, $k$, $i_1\, i_2 \ldots i_k$ prenant indépendamment toutes les valeurs entières et positives, tel que

1° l'ensemble $E$ est l'ensemble-somme de tous les ensembles

$$E_{i_1} \cdot E_{i_1 i_2} \cdot E_{i_1 i_2 i_3} \ldots E_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k} \ldots$$

[1]) C'est mon ami, Paul Urysohn qui me souleva l'idée d'appliquer la méthode de M. Sierpiński à la démonstration de cette dernière proposition: il appela, notamment, mon attention sur la facilité avec laquelle cette même méthode resoût la question d'invariance pour les ensembles $(A)$.

[2]) Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Kap. VII, VIII.

$2^0$ les ensembles $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sont:

(Df. I) des ensembles fermés (Df. II) des ensembles ouverts.

On consultera pour la théorie des ensemble $(A)$ les Notes de Mich. Souslin et M. N. Lusin (C. R, t. 164). le Mémoire MM. Lusin et Sierpiński (Bull. de l'Ac. de Sc. Cracovie, 1918) et les récents travaux des mêmes Auteurs. On remarquera aussi peut être qu'une première démonstration de ce que tout ensemble mesurable $(B)$ est un ensemble $(A)$ se trouve implicitement dans ma Note sur la puissance des ensembles mesurables $(B)$ (C. R, t. 162), où fût donné pour la cas particulier d'ensembles $(B)$ un procédé opératoire très voisin à celui qui a reçu plus tard le nom de procédé $(A)$.

**2.** Nous aurons besoin dans la suite des notions suivantes:

Rappelons qu'on appelle *espace à zéro dimensions* $E_0$ (de M. Baire) l'ensemble de toutes les suites d'entiers

$$x = (i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_k \ldots),\ \textit{points} \text{ de l'espace } E_0.$$

Or, les *domaines élémentaires* de cet espace (analogues, p. ex. aux intervalles rectilignes dans l'espace euclidien à 1 dimension) sont donnés par des groupes

$$[i_1\, i_2 \ldots i_k].$$

On entend par là l'ensemble de tous les poins $x = (i_1\, i_2 \ldots i_k r_{k+1} \ldots r_{k+l} \ldots)$ c'est-à-dire de toutes les suites commençant par les nombres entiers fixes $i_1 i_2 \ldots i_k$. Le nombre $k$ est appelé rang du groupe $[i_1\, i_2 \ldots i_k]$. Appelons *chaîne* toute suite de groupes $[i_1\, i_2 \ldots i_k]$ construite selon une loi déterminée. Telles sont, pour citer seulement les plus importantes:

(α) les (α) chaînes dont les groupes $[i_1\, i_2 \ldots i_k]$ convergent vers un seul point de $E_0$, ce sont donc les chaînes de la forme

$$[i_1],\ [i_1\, i_2],\ [i_1\, i_2\, i_3], \ldots,\ [i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_k], \ldots$$

(γ) les (γ) chaînes dont les groupes $[i_1\, i_2 \ldots i_k]$ recouvrent tout l'espace $E_0$.

On parlera aussi *des chaînes d'un système* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ *d'ensembles*, en désignant ainsi des suites *d'ensembles* $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ dont les cortèges d'indices $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ envisagés comme groupes $[i_1\, i_2 \ldots i_k]$ de l'espace $E_0$ forment une chaîne correspondante. Nous considérons, en particulier les (α)-et les (γ)-chaînes du système $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$.

Appelons enfin *noyau* d'une chaîne la partie commmune[1]) (= le produit) de tous les ensembles $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ faisant partie de la chaîne considérée; appelons respectivement $(\alpha)$-*noyau* ou $(\gamma)$-*noyau du système* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ l'ensemble de points formé de tous les noyaux des chaînes correspondantes ($(\alpha)$ ou $(\gamma)$) du système $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$.

Or on peut évidemment exprimer comme il suit la définition des ensembles $A$:

ce sont des ensembles-noyaux $(\alpha)$ de systèmes $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ d'ensembles $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ qui sont (I) fermés, (II) ouverts.

Le résultat essentiel de ce travail est le suivant

**Théorème I.** *Les ensembles complémentaires aux ensembles* $(A)$ *sont les* $(\gamma)$-*noyaux de systèmes* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ *composés d'ensembles* $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ *qui sont fermés* (Df. I) *qui sont ouverts* (Df. II).

C'est-à-dire:

*Pour qu'un ensemble* $E$ *soit complémentaire à un ensemble* $(A)$ *il faut et il suffit qu'on puisse construire un système* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ *formé* (I) d'ensembles fermés $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ | (II) d'ensembles ouverts $E_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ *et tel que* $E$ *soit précisément le* $(\gamma)$-*noyau du système* $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$.

Pour obtenir la forme I on doit prendre l'ensemble $(A)$ complémentaire à $E$ défini sous la forme II et vice versâ.

**La condition est nécessaire.**

Soit $X$ un ensemble $(A)$, $Y$ son complémentaire. Il nous sera plus facile d'obtenir pour $Y$ un système $S(G_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ composé d'ensembles ouverts. A cet effet nous prendrons pour $X$ un système $S(F_{i_1 i_2 \ldots i_k})$

[1]) On pourrait définir d'une autre manière quelconque ce qu'on veut entendre sous le mot *noyau* d'une chaîne. Ainsi pourrait-on prendre p. ex. les limites topologiques supérieure ou inférieure[2]) de la suite d'ensembles formant la chaîne. On aboutit dans cette voie p. ex. à cette définition nouvelle d'ensembles $(A)$ (linéaires, pour simplifier): Un ensemble $(A)$ est un tel ensemble $E$ pour lequel on peut former un système $S(r_{i_1 i_2 \ldots i_k})$, les $r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ étant des points d'abscisse rationnelle et $E$ étant l'ensemble de tous les points $x = \lim\limits_{k \to \infty} r_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, (correspondants aux suites convergentes au sens arithmétique). On peut de plus supposer

$$0 \leqslant r_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} - r_{i_1 i_2 \ldots i_k} < \frac{1}{k}.$$

Cette définition est équivalente, bien entendu, à la définition ordinaire.

[2]) *oberer und unterer abgeschlossener Limes:* Hausdorff, op. cit., Kap. VII, § 5.

composé d'ensembles fermés, dont $X$ est le ($\alpha$)-noyau. On peut évidemment supposer que $F_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset F_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}$ [1]). Posons

$$G_{i_1 i_2 \ldots i_k} = E - F_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$E$ étant l'espace total. $G_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sont des ensembles ouverts. Désignons par $U$ le ($\gamma$)-noyau du système $S(G_{i_1 i_2 \ldots i_k})$. Démontrons que $Y = U$.

Soit $x \subset Y$ un point quelconque de l'ensemble $Y$. Supposons, par impossible, qu'il existe un point

$$\xi_0 = (i_1^0 i_2^0 i_3^0 \ldots i_k^0 \ldots) \tag{1}$$

de l'espace $E_0$ de M. Baire, tel que

$$\xi_0 \cdot \Sigma [i_1^{(x)} i_2^{(x)} \ldots i_k^{(x)}] = 0$$

où la somme est étendue à tous les groupes (en infinité dénombrable)

$$[i_1^{(x)} i_2^{(x)} \ldots i_k^{(x)}]$$

vérifiant la condition

$$G_{i_1^{(x)} i_2^{(x)} \ldots i_k^{(x)}} \supset x.$$

Il en résulte qu'aucun des groupes $[i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_r^{(0)}]$ définis par l'égalité (1) n'est un groupe $[i_1^{(x)} i_2^{(x)} \ldots i_k^{(x)}]$. Donc

$$x \cdot G_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_r^{(0)}} = 0$$

quel que soit $r$; c'est-à-dire que

$$x \subset F_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_r^{(0)}},$$

quelque soit $r$, donc $x \subset X$, contrairement à notre supposition $x \subset Y$. Nous avons démontré ainsi que $Y \subset U$.

Supposons maintenant qu'il existe un point $x \subset U$ appartenant en même temps à l'ensemble $X$. Il s'ensuit de là l'existence d'une suite

$$F_{i_1^{(0)}}, \quad F_{i_1^{(0)} i_2^{(0)}}, \ldots, F_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_k^{(0)}}, \ldots$$

[1]) en effet, si cela n'était pas le cas, on prendrait au lieu des $F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ les

$$\mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = F_{i_1} \cdot F_{i_1 i_2} \ldots F_{i_1 i_2 i_3} \ldots F_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Les deux systèmes $S(\mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ et $S(F_{i_1 i_2 \ldots i_k})$ ont évidemment le même ($\alpha$)-noyau;

$$\mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}}.$$

telle que

$$x \subset \prod_{k=1}^{\infty} F_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_k^{(0)}}.$$

Par conséquent

$$x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} G_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_k^{(0)}} = 0$$

et le point

$$\xi_0 = (i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_k^{(0)} \ldots)$$

n'est couvert par aucun des groupes $[i_1^{(x)} i_2^{(x)} \ldots i_k^{(x)}]$, contrairement à ce que $x \subset U$.

Donc $U \subset Y$ et parsuite $U = Y$.

Notre condition cet ainsi nécessaire.

**La condition est suffissante.**

Soit $U$ le $(\gamma)$-noyau d'un système $S(G_{i_1 i_2 \ldots i_k})$; soient de plus

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_k} = E - G_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$X$ le $(\alpha)$-noyau du système $S(F_{i_1 i_2 \ldots i_k})$, $Y$ son complémentaire. En reprenant le raisonnement que nous venons de faire, nous trouvons que $Y$ est le $(\gamma)$-noyau exactement du système $S(G_{i_1 i_2 \ldots i_k})$, donc $Y = U$, et $U$ est complémentaire à un ensemble $(A)$, c. q. f. d.

Remarquons encore que l'énoncé ci-dessus reste inaltéré si l'on veut préciser davantage la définition des $(\gamma)$-chaînes en demandant que les groupes correspondants n'aient deux à deux aucun point commun. On s'en apperçoit par un raisonnement tout élémentaire que nous ne croyons pas utile de reproduire ici. Voir d'ailleurs pour les détails une Note que j'ai publié récemment dans le *Recueil Math. de Moscou*, t. XXXI.

3. Indiquons enfin cette conséquence fondamentale du théorème démontré:

**Théorème II.** *Un ensemble homéomorphe à un ensemble dont le complémentaire est* $(A)$ *rentre encore dans la même classe d'ensembles* (c'est-à dire qu'il est complémentaire d'un ensemble $(A)$).

La démonstration se fait par une application directe d'une méthode très générale employée par M. Sierpiński [1]) pour démontrer

[1]) *Sur les ensembles mesurables* $(B)$. Comptes Rendus, t. 171, p. 24 (Note du 5 juillet 1920).

un théorème analogue sur les ensembles $(B)$. En effet, en vertu du théorème I tout ensemble complémentaire à un ensemble $(A)$ est donné par une fonction

$$\Gamma(G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, \ldots)$$

si l'on substitue à $G_n$ des ensembles ouverts convenables et qui ne donne que des ensembles de cette nature. De plus la fonction $\Gamma$ est telle que tout point qui appartient à

$$E = \Gamma(G_1, G_2, G_3 \ldots, G_n, \ldots)$$

appartient à une infinité des ensembles $G_n$.

Ces sont les seules propriétés utilisés dans la démonstration de M. Sierpiński; elle s'applique donc sans aucune modification qui ne soit un simple changement de notations; nous nous dispenserons de cette reproduction textuelle de la belle analyse de M. Sierpiński en renvoyant à sa Note déjà citée [1]).

4. Remarquons, en terminant, que nous sommes maintenant en possession de deux méthodes pour la construction d'ensembles dont les classes vont dans le transfini: l'opération $(A)$ et l'opération que nous venons de définir ici et que nous désignons comme opération $(\Gamma)$: elle consiste dans la construction du $(\gamma)$-noyau d'un système quelconque $S(E_{i_1 i_2 \ldots i_k})$.

Une première application d'une quelconque de ces opérations donne déjà tous les ensembles mesurables $(B)$; des applications transfinies donnent des classes d'ensembles de plus en plus compliquées [2]); or on voit que *toutes ces classes sont topologiquement invariantes:* on s'en apperçoit toujours par la même méthode. On voit enfin que les ensembles ainsi obtenus sont précisément ceux qu'on obtient en combinant d'une façon transfinie l'opération $(A)$ avec l'opération de soustraction [3]).

[1]) On trouvera plus de détails de l'application de ladite méthode au problème qui nous intéresse ici dans mon travail *„Sur l'invariance topologique des ensembles etc"*, Recueil Math. de Moscou, t. XXXI (en français).

[2]) aucune de ces classes n'est d'ailleurs vide, comme il est démontré par M. Kolmogoroff.

[3]) c'est M. Lusin qui a proposé, dans ses Cours de l'Université de Moscou, le problème d'étudier les ensembles obtenus par la combinaison de ces deux dernières opérations.

Été 1922 (Gorki, près de Moscou).