ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Les projections des ensembles mesurables (B) et les ensembles (A).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

C'est M. Souslin qui a prouvé le premier en 1917 que, contrairement à ce qu'on pensait avant lui, les projections orthogonales des ensembles plans mesurables (B) (sur une droite) ne sont pas nécessairement des ensembles mesurables (B)[1]. Elles constituent parsuite une classe d'ensembles — dits ensembles (A) — plus étendue que la classe d'ensembles mesurables (B). Les ensembles (A) se présentent ainsi tout à fait naturellement dans la théorie des ensembles mesurables (B). Or, nous montrerons que la définition des ensembles (A), donnée par M. Souslin à l'aide des *systèmes déterminants* intervient aussi sans aucún artifice lorsqu'on étudie les projections des ensembles mesurables (B) d'une classe assez petite. Nous prouverons aussi que *les ensembles* (A) (lineaires) *coïncident avec les projections* (orthogonales) *des ensembles plans* G_δ (c'est-à-dire d'ensembles qui sont produits d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts).

Les ensembles mesurables (B) les plus simples sont les ensembles fermés et bornés. Les projections de tels ensembles sont, comme on voit sans peine, de même des ensembles fermés et bornés. La classe d'ensembles qui suit après les ensembles fermés est la classe d'ensembles F_σ, c'est-à-dire des sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. On voit sans peine que tout ensemble F_σ peut être regardé comme une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et bornés. Il en résulte tout de suite qu'une projection d'un ensemble F_σ est un F_σ.

[1]) V. la note de M. Souslin du 8 janvier 1917 dans les *Comptes Rendus*, t. 164.

Allons donc à la classe suivante d'ensembles mesurables (B), donc aux ensembles $F_{\sigma\delta}$, c'est-à-dire produits d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ. Un $F_{\sigma\delta}$ est donc un ensemble P de la forme

$$(1) \qquad P=\prod_{k=1}^{\infty}(F_1^k+F_2^k+F_3^k+\ldots)=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}F_n^k\Big),$$

où $F_n^k (k=1,2,3,\ldots;\ n=1,2,3,\ldots)$ sont des ensembles fermés qu'on peut encore supposer bornés. La formule (1) donne évidemment

$$(2) \qquad P=\sum_{(n_1, n_2,\ldots)}F_{n_1}^1F_{n_2}^2F_{n_3}^3\ldots;$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Posons (pour toute suite finie $n_1, n_2, \ldots, n_k$ d'indices):

$$(3) \qquad F_{n_1}^1F_{n_2}^2\ldots F_{n_k}^k=F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$$

— ce seront évidemment des ensembles fermés et bornés (pouvant être vides). D'après (3), la formule (2) peut être écrite:

$$(4) \qquad P=\sum_{(n_1, n_2,\ldots)}F_{n_1}F_{n_1, n_2}F_{n_1, n_2, n_3}\ldots$$

Tout ensemble E de la forme (4), où $F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$ sont des ensembles fermés et bornés, est dit *ensemble* (A), noyau du système déterminant $S\{F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}\}$. Le système déterminant $S\{F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}\}$ est défini, lorsqu'on a fait correspondre un ensemble fermé et borné $F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$ à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Nous avons donc démontré que tout ensemble $F_{\sigma\delta}$ est un ensemble (A).

Or, nous prouverons qu'une projection d'un ensemble (plan) $F_{\sigma\delta}$ est un ensemble (A). Soit donc P un ensemble plan $F_{\sigma\delta}$ présenté sous la forme (1) En introduisant les ensembles (3), nous aurons la formule (4). Soit Π la projection de l'ensemble P sur l'axe d'abscisses et désignons généralement par $\Phi_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$ la projection de l'ensemble $F_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$. Les ensembles $\Phi_{n_1, n_2,\ldots, n_k}$ sont donc tous fermés et bornés. Posons

$$(5) \qquad E=\sum_{(n_1, n_2,\ldots)}\Phi_{n_1}\Phi_{n_1, n_2}\Phi_{n_1, n_2, n_3}\ldots$$

— ce sera donc un ensemble (A) (linéaire). Je dis que $E=\Pi$.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

En effet, soit x_0 un élément de l'ensemble Π. Il existe donc un point $p(x, y)$ de P, tel que $x = x_0$. De $p \varepsilon P$ et de la formule (4) résulte qu'il existe une suite infinie de nombres naturels m_1, $m_2, m_3, \ldots$, telle que

$$(6) \qquad p \varepsilon F_{m_1} F_{m_1, m_2} F_{m_1, m_2, m_3} \ldots$$

L'ensemble $\Phi_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ étant la projection de l'ensemble $F_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ et x_0 étant la projection du point $p(x_0, y)$, il résulte de (6) que

$$(7) \qquad x_0 \varepsilon \Phi_{m_1} \Phi_{m_1, m_2} \Phi_{m_1, m_2, m_3} \ldots,$$

donc, d'après (5): $x_0 \varepsilon E$. Nous avons donc démontré que

$$(8) \qquad \Pi \subset E$$

Or, soit x_0 un élément de l'ensemble E. De (5) résulte qu'il existe une suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, m_3, \ldots$ vérifiant la formule (7).

Soit k un nombre naturel donné. De (7) résulte que $x_0 \varepsilon \Phi_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$: donc x_0 est une projection d'un point de l'ensemble $F_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, soit du point $p_k(x_0, y_k)$.

De (3) nous concluons que

$$F_{n_1, n_2, \ldots, n_r} \subset F_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad \text{pour} \quad r \geqslant k,$$

donc

$$(9) \qquad p_r \varepsilon F_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{pour} \quad r \geqslant k.$$

Les ensembles $F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant bornés, nous en concluons que la suite infinie de points $p_1, p_2, p_3, \ldots$ est bornée. On en peut donc extraire une suite convergente, soit $p_{r_1}, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots$ Posons

$$(10) \qquad p = \lim_{s=\infty} p_{r_s}.$$

L'ensemble $F_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ étant fermé, il résulte de (10) et (9) que

$$(11) \qquad p \varepsilon F_{m_1, m_2, \ldots, m_k}.$$

La formule (11) subsistant pour tout k naturel, il en résulte la formule (6) qui donne, d'après (4): $p \varepsilon P$. Les abscisses des points p_k étant $= x_0$ (pour $k = 1, 2, \ldots$), nous concluons, d'après (10), que x_0 est l'abscisse du point p: il en résulte donc de $p \varepsilon P$ que $x_0 \varepsilon \Pi$. Nous avons ainsi démontré que $E \subset \Pi$, ce qui donne, d'après (8): $\Pi = E$, c. q. f. d.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Donc une projection d'un ensemble (plan) $F_{\sigma\delta}$ est toujours un ensemble (A)[1]. Tout ensemble G_δ étant, comme on sait, un ensemble $F_{\sigma\delta}$ (puisque tout ensemble ouvert est un F_σ), il en résulte, à plus forte raison, qu'une projection d'un ensemble plan G_δ est un ensemble (A). Or, nous prouverons maintenant la réciproque.

Soit donc (4) un ensemble (A) (linéaire) donné. y étant un nombre irrationnel donné et

(12) $$y = n_0 + \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \dots$$

son développement en fraction continue, désignons par $P(y)$ l'ensemble

$$P(y) = F_{n_1} F_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2, n_3} \dots$$

— ce sera un ensemble fermé (ou vide), comme produit d'ensembles fermés. D'après (4) nous aurons évidemment

(13) $$P = \Sigma P(y),$$

la sommation s'étendant à tous les nombres irrationnels y.

Or, désignons par $S(y)$ l'ensemble plan, formé de tous les points (x, y), tels que $x \varepsilon P(y)$, et posons

(14) $$S = \Sigma S(y),$$

la sommation s'étendant à tous les y irrationnels. $P(y)$ étant évidemment la projection de l'ensemble $S(y)$ sur l'axe d'abscisses. il résulte de (13) et (14) que P est la projection de l'ensemble S. Or, nous prouverons que S est un G_δ.

Désignons par T l'ensemble de tous les points (x, y) du plan pour lesquels l'ordonnée y est irrationnelle. T est un G_δ, son complémentaire étant évidemment un F_σ (comme somme d'une infinité dénombrable de parallèles à l'axe d'abscisses). Or, je dis que

(15) $$S = \bar{S} \,.\, T,$$

$\bar{S}$ désignant, comme d'habitude, la somme $S + S'$.

De (14) et de la définition des ensembles $S(y)$ résulte immédiatement que $S \subset T$, donc $S \subset \bar{S}T$. Il nous reste donc à démontrer que $\bar{S}T \subset S$.

[1] En modifiant légèrement notre démonstration on pourrait prouver qu'une image univoque et continue (dans un sens) d'un ensemble (A) est un ensemble (A). Par conséquent, la propriété d'être un ensemble (A) est un invariant topologique Dans une note qui va suivre (*Sur les ensembles complémentaires aux ensembles* (A), ce volume p. 160) M. P. Alexandroff prouvera une propriété analogue des ensembles complémentaires aux ensembles (A).

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Soit donc $p(x, y)$ un point de l'ensemble $\overline{ST}$. Le nombre y est donc irrationnel: soit (12) son développement en fraction continue. De $p \varepsilon \overline{ST} \subset \overline{S}$ résulte qu'il existe une suite infinie $p_k(x_k, y_k)$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ de points de S, telle que

(16) $$p = \lim_{k=\infty} p_k.$$

De (16) résulte que

(17) $$x = \lim_{k=\infty} x_k \quad \text{et} \quad y = \lim_{k=\infty} y_k.$$

$p_k(x_k, y_k)$ étant un point de S, y_k est irrationnel: soit

(18) $$y_k = n_0^k + \frac{1|}{|n_1^k} + \frac{1|}{|n_2^k} + \frac{1|}{|n_3^k} + \ldots$$

son développement en fraction continue. D'après (18), (17) et (12) nous concluons sans peine que, s étant un nombre naturel donné quelconque, il existe un indice $q = q(s)$, tel que

(19) $$n_i^k = n_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, s; \quad k > q.$$

De (19) et de la définition des ensembles $P(y)$ résulte tout de suite que

(20) $$P(y_k) \subset F_{n_1^k, n_2^k, \ldots, n_s^k} = F_{n_1, n_2, \ldots, n_s} \quad \text{pour} \quad k > q(s).$$

De $p_k \varepsilon S$, pour $k = 1, 2, \ldots$, de (14) et de la définition des ensembles $S(y)$ résulte que $p_k \varepsilon S(y_k)$, donc $x_k \varepsilon P(y_k)$, ce qui donne, d'après (20):

(21) $$x_k \varepsilon F_{n_1, n_2, \ldots, n_s} \quad \text{pour} \quad k > q(s).$$

L'ensemble $F_{n_1, n_2, \ldots, n_s}$ étant fermé, la formule (21) prouve, d'après (17), que

$$x \varepsilon F_{n_1, n_2, \ldots, n_s}.$$

Le nombre naturel s étant quelconque, nous en concluons, d'après la définition de l'ensemble $P(y)$, que

$$x \varepsilon P(y),$$

donc $p \varepsilon S(y)$ et parsuite $p \varepsilon S$. La formule $\overline{ST} \subset S$, et par conséquent aussi la formule (15) est ainsi établie. Or, $\overline{S}$ étant fermé et T étant un G_δ, la formule (14) prouve que S est G_δ, c. q. f. d.

Nous avons donc démontré que *les ensembles* (A) (linéaires) *sont des projections des ensembles plans G_δ et réciproquement.*