Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix.

Par

Alfred Tajtelbaum-Tarski (Varsovie).

Je me propose dans cette Note d'établir que *l'axiome du choix* de M. Zermelo équivaut à chacun des sept théorèmes suivants: $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *étant des nombres cardinaux transfinis* [1]).

I. $$\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n};$$

II. $$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2;$$

III. $$\textit{si}\ \ \mathfrak{m}^2=\mathfrak{n}^2,\ \textit{on a}\ \ \mathfrak{m}=\mathfrak{n};$$

IV. $$\textit{si}\ \ \mathfrak{m}<\mathfrak{n}\ \textit{et}\ \mathfrak{p}<\mathfrak{q},\ \textit{on a}\ \ \mathfrak{m}+\mathfrak{p}<\mathfrak{n}+\mathfrak{q};$$

IV'. $$\textit{si}\ \ \mathfrak{m}<\mathfrak{n}\ \textit{et}\ \mathfrak{p}<\mathfrak{q},\ \textit{on a}\ \ \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{p}<\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{q};$$

V. $$\textit{si}\ \ \mathfrak{m}+\mathfrak{p}<\mathfrak{n}+\mathfrak{p},\ \textit{on a}\ \ \mathfrak{m}<\mathfrak{n};$$

V'. $$\textit{si}\ \ \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{p}<\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p},\ \textit{on a}\ \ \mathfrak{m}<\mathfrak{n}.$$

La démonstration sera basée sur le système d'axiomes de M. Zermelo, *l'axiome du choix* étant naturellement exclu [2]); j'ajoute cependant à ces axiomes deux axiomes suivants qui introduisent la notion du nombre cardinal:

1. *A tout ensemble correspond un objet qui est son nombre cardinal.*

2. *Pour que deux ensembles quelconques soient de la même puissance, il faut et il suffit qu'il leur corresponde le même nombre cardinal.*

On sait que *l'axiome du choix* équivaut au théorème connu de M. Zermelo, d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné [3]).

[1]) C'est-à-dire les nombres cardinaux qui correspondent aux ensembles infinis.

[2]) E. Zermelo: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Mathematische Annalen 65, 1909, p. 261 281. *L'axiome de l'infini* ne joue pas un rôle essentiel dans nos raisonnements.

[3]) Cf. W. Sierpiński: *Zarys teorji mnogości* (*Éléments de la Théorie des Ensembles*), Warszawa 1923 (en polonais), p. 190.

Si l'on appelle *alephs* les nombres cardinaux correspondants aux ensembles infinis qui peuvent être bien ordonnés, ce théorème s'énonce de la façon suivante:

Z. *Tout nombre cardinal transfini est un aleph.*

Ainsi le but de cette Note consiste à prouver l'équivalence de la proposition **Z** à chacune des propositions **I**—**V'**. Il est déjà connu, d'ailleurs, que les propositions **I**—**V'** résultent de **Z**, puisque tous les alephs remplissent les conditions exprimées dans ces propositions[1]; c'est pourquoi je me borne dans la suite à démontrer l'implication inverse.

Le théorème de M. Hartogs[2], d'après lequel à tout ensemble A correspond un ensemble bien ordonné dont la puissance n'est ni inférieure ni égale à celle de A, joue un rôle essentiel dans nos raisonnements. M. Sierpiński a observé que ce théorème implique le corollaire suivant[3]:

S. *A tout nombre cardinal* $\mathfrak{m}$ *correspond un aleph,* $\aleph(\mathfrak{m})$, *qui n'est ni plus grand ni plus petit que* $\mathfrak{m}$.

Je passe à prouver que la proposition **Z** résulte de chacune des propositions **I**—**V'**. Je vais établir au préalable le suivant:

Lemme 1. $\mathfrak{m}$ *étant un nombre cardinal transfini et* $\aleph$ *un aleph, si* $\mathfrak{m}\cdot\aleph=\mathfrak{m}+\aleph$, *on a* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph$ *ou bien* $\mathfrak{m}\leqslant\aleph$[4].

Démonstration. Soient M et A des ensembles qui satisfont aux conditions:

(1) $$\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}\text{[5]},$$

(2) $$\overline{\overline{A}}=\aleph.$$

On peut admettre que M et A n'ont pas d'éléments communs[6]:

[1]) Cf. par exemple W. Sierpiński, op. cit., p 191—192.

[2]) F. Hartogs: *Ueber das Problem der Wohlordnung,* Math. Ann. 76, 1914, p. 436—443.

[3]) W. Sierpiński: *Les exemples effectifs et l'axiome du choix,* Fund. Math. II, 1921, p. 118. Le théorème de M. Hartogs et le corollaire de M. Sierpiński sont établis sans faire appel à *l'axiome du choix.*

[4]) Le théorème analogue au lemme 1 a été énoncé par M. Bernstein (*Untersuchungen aus der Mengenlehre* Math. Annal. 61, 1905), mais d'une façon plus générale, concernant les nombres cardinaux transfinis quelconques. Cependant nous ne savons pas démontrer ce théorème sans l'aide de *l'axiome du choix.* Cf. A. Schönflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen,* Leipzig und Berlin 1913, p. 47.

[5]) Par „$\overline{\overline{M}}$“ je vais désigner le nombre cardinal correspondant à l'ensemble M.

[6]) Cf. E. Zermelo, op. cit., p. 270.

(3) $$M \times A = 0;$$

l'ensemble A est supposé bien ordonné.

Soit P l'ensemble de toutes les paires (m, a) composées d'un élément m de M et d'un élément a de A. Conformément à la définition du produit des nombres cardinaux et à l'hypothèse du lemme, on a

(4) $$\overline{\overline{P}} = \mathfrak{m} \cdot \aleph = \mathfrak{m} + \aleph.$$

Il résulte de (4) l'existence de deux sous-ensembles M_1 et A_1 de P qui vérifient les formules:

(5) $$P = M_1 + A_1,$$

(6) $$M_1 \times A_1 = 0,$$

(7) $$\overline{\overline{M}}_1 = \mathfrak{m},$$

(8) $$\overline{\overline{A}}_1 = \aleph.$$

Deux cas ce se présentent maintenant:

1° il existe un tel élément m_1 de M que pour tout élément a de A:

$$(m_1, a) \varepsilon M_1$$

ou bien 2° pour tout élément m de M il existe au moins un tel élément a de A que la paire (m, a) n'appartient pas à M_1, donc que l'on a, selon (5) et (6):

$$(m. a) \varepsilon A_1.$$

Au premier cas, soit A_2 l'ensemble de toutes les paires (m_1, a). On obtient évidemment

(9) $$A_2 \subset M_1,$$

(10) $$\overline{\overline{A}}_2 = \overline{\overline{A}}.$$

Les formules (9) et (10) impliquent. en vertu de (2) et (7), que

$$\mathfrak{m} \geqslant \aleph.$$

Au deuxième cas, désignons par $\varphi(m)$ l'élément a de A qui remplit la condition:

$$(m, a) \varepsilon A_1$$

et qui précède par rapport à l'ordre établi dans A tous les autres éléments de A remplissant la même condition; l'existence d'un tel élément résulte de la définition du bon ordre. Soit M_2 l'ensemble de toutes les paires $(m, \varphi(m))$, m appartenant à M. On a alors:

(11) $$M_2 \subset A_1,$$

(12) $$\overline{\overline{M}}_2 = \overline{\overline{M}}.$$

On conclut de (11) et (12), selon (1) et (8), que

$$\mathfrak{m} \leqslant \aleph.$$

On obtient donc en tout cas:

$$\mathfrak{m} \geqslant \aleph \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{m} \leqslant \aleph, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 1. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **I**.

Démonstration. Envisageons un nombre cardinal transfini $\mathfrak{m}$; soit $\aleph(\mathfrak{m})$ l'aleph qui corréspond à $\mathfrak{m}$ conformement au théorème **S**. En appliquant à ces nombres cardinaux la proposition I, on obtient:

$$\mathfrak{m} \,.\, \aleph(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}),$$

d'où, en vertu du lemme établi tout à l'heure,

$$\mathfrak{m} \geqslant \aleph(\mathfrak{m}) \quad \text{ou bien} \quad \mathfrak{m} \leqslant \aleph(\mathfrak{m}).$$

Or, suivant le théorème **S** chacune de ces formules implique:

$$\mathfrak{m} = \aleph(\mathfrak{m}),$$

de sorte que $\mathfrak{m}$ est un aleph.

Nous avons donc établi que la proposition **Z**, d'après laquelle tout nombre cardinal transfini est un aleph, résulte de la proposition I, c. q. f. d.

Lemme 2. *La proposition* **I** *résulte de la proposition* **II**.

Démonstration [1]. Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ des nombres cardinaux transfinis quelconques. En appliquant la proposition II, on obtient:

(1) $$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m},$$

(2) $$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n},$$

(3) $$(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^2 = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}.$$

On a aussi, en vertu des théorèmes généraux concernant les nombres cardinaux:

(4) $$(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})^2 = \mathfrak{m}^2 + 2 \,.\, \mathfrak{m} \,.\, \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^2.$$

[1] L'idée de cette démonstration est dûe à M. Bernstein (op. cit.).

Toutes ces formules, (1)—(4), donnent:

(5) $$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+2\,.\,\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}+\mathfrak{n},$$

d'où [1])

(6) $$\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}\leqslant 2\,.\,\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}\leqslant \mathfrak{m}+2\,.\,\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}+\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n}.$$

D'autre part, on peut établir (sans l'aide de *l'axiome du choix*) la formule suivante;

(7) $$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}\ \text{[2]}).$$

De (6) et (7) on conclut aussitôt que

$$\mathfrak{m}\,.\,\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n},\qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème 1 et le lemme 2 implique immédiatement le suivant.

Théorème 2. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **II.**

Je passe à démontrer le

Théorème 3. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **III.**

D é m o n s t r a t i o n. $\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini arbitraire, pososons:

(1) $$\mathfrak{n}=\mathfrak{m}^{\aleph_0},$$

(2) $$\mathfrak{p}=\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n}),$$

(3) $$\mathfrak{q}=\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n}).$$

On obtient de (1):

(4) $$\mathfrak{n}^2=(\mathfrak{m}^{\aleph_0})^2=\mathfrak{m}^{\aleph_0\cdot 2}=\mathfrak{m}^{\aleph_0}=\mathfrak{n},$$

d'où, selon (2):

(5) $$\mathfrak{p}^2=[\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})]^2=\mathfrak{n}^2+2\,.\,\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})+\aleph^2(\mathfrak{n})=$$
$$=\mathfrak{n}+\mathfrak{n}\,.\,[2\,.\,\aleph(\mathfrak{n})]+\aleph(\mathfrak{n})=[\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})]+\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n}).$$

De la formule:

(6) $$\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})\leqslant\mathfrak{n}\ \ \aleph(\mathfrak{n})$$

on conclut que

(7) $$\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})\leqslant[\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})]+\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})\leqslant\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})+\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})=$$
$$=\mathfrak{n}\,.\,[2\,.\,\aleph(\mathfrak{n})]=\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n}),$$

d'où

(9) $$\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n})=[\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})]+\mathfrak{n}\,.\,\aleph(\mathfrak{n}).$$

[1]) En raison de la formule générale: $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$. Cf. W. Sierpiński, *Zarys teorji mnogości* p. 73.

[2]) Cf. W. Sierpiński, op. cit., p. 74, où cette formule est établie pour les nombres cardinaux correspondant aux ensembles infinis dans le sens de Dedekind. D'ailleurs on peut démontrer cette formule pour les nombles transfinis quelconques.

Les formules (5) et (8) donnent l'identité:

(9) $$\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{n} \cdot \aleph(\mathfrak{n}).$$

De (3), (4) et (9) on conclut aussitôt:

(10) $$\mathfrak{q}^2 = [\mathfrak{n} \cdot \aleph(\mathfrak{n})]^2 = \mathfrak{n}^2 \cdot \aleph^2(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \cdot \aleph(\mathfrak{n}) = \mathfrak{p}^2.$$

En appliquant aux nombres cardinaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ la proposition **III**, on obtient, selon (10):

(11) $$\mathfrak{q} = \mathfrak{p},$$

donc, en vertu de (2) et (3):

(12) $$\mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \ \aleph(\mathfrak{n}).$$

Cette formule entraîne, conformément au lemme 1, que

(13) $$\mathfrak{n} \leqslant \aleph(\mathfrak{n}) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{n} \geqslant \aleph(\mathfrak{n}),$$

ce qui implique, en raison du théorème **S**, l'égalité:

(14) $$\mathfrak{n} = \aleph(\mathfrak{n}).$$

En d'autres termes, $\mathfrak{n}$ est un aleph.

Mais comme, selon (1),

(15) $$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$$

et comme tout nombre cardinal trantsfini. qui est plus petit qu'un aleph, est un aleph aussi [1]), on conclut finalement, suivant (14) et (15), que $\mathfrak{m}$ est un aleph.

Nous avons donc établi, à l'aide de la proposition **III**. que tout nombre cardinal transfini est un aleph, c. q. f. d.

Théorème 4. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **IV**.

Démonstration. Envisageons un nombre cardinal transfini $\mathfrak{m}$ et posons:

(1) $$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot \aleph_0$$

On obtient aussitôt:

(2) $$2 \cdot \mathfrak{n} = 2 \cdot \mathfrak{m} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{m} \cdot [2 \cdot \aleph_0] = \mathfrak{m} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{n}.$$

On a évidemment:

(3) $$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n})$$

et

(4) $$\aleph(\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}).$$

[1]) Cf. W. Sierpiński, op. cit., p. 178.

Les inégalités

$$\mathfrak{n} < \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n})$$

et

$$\aleph(\mathfrak{n}) < \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n})$$

ne peuvent subsister simultanément. Elles donnent, en effet, conformément à la proposition **IV**:

$$\mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}) < [\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})] + [\mathfrak{n}+\aleph(\mathfrak{n})] = 2 \,.\, \mathfrak{n} + 2 \,.\, \aleph(\mathfrak{n}),$$

d'où, selon (2),

$$\mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}) < \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}),$$

ce qui est évidemment absurde.

Il faut donc poser, en vertu de (3) et (4):

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}) \tag{5}$$

ou bien

$$\aleph(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}). \tag{6}$$

De (4) et (5) on conclut immédiatement que

$$\aleph(\mathfrak{n}) \leqslant \mathfrak{n}, \tag{7}$$

tandis que les formules (3) et (6) entraînent:

$$\mathfrak{n} \leqslant \aleph(\mathfrak{n}). \tag{8}$$

Chacune des conditions (7) et (8) implique, selon le théorème **S**, l'identité:

$$\mathfrak{n} = \aleph(\mathfrak{n}); \tag{9}$$

en d'autres termes, $\mathfrak{n}$ est un aleph.

On a, en vertu de (1):

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) entraînent aussitôt [1]) que $\mathfrak{m}$ est un aleph aussi. Donc tout nombre cardinal transfini est un aleph, c. q. f. d.

Théorème 5. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **IV'**.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème précédent. Il faut seulement poser:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$$

au lieu de

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \,.\, \aleph_0$$

et établir ensuite la formule:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$$

[1]) Comparer à la note précédente.

au lieu de

$$\mathfrak{n} = 2 \, . \, \mathfrak{n}.$$

Théorème 6. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **V.**

Démonstration. $\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini quelconque, on a manifestement:

$$(1) \qquad \aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m}).$$

Nous allons démontrer que l'inégalité:

$$(2) \qquad \aleph(\mathfrak{m}) < \mathfrak{m} + \aleph(\mathfrak{m})$$

conduit à une contradiction.

En effet, la formule (2) entraîne

$$(3) \qquad \aleph(\mathfrak{n}) = \aleph(\mathfrak{n}) + \aleph(\mathfrak{n}) < \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}),$$

d'où, conformément à la proposition **V**,

$$(4) \qquad \aleph(\mathfrak{n}) < \mathfrak{n}.$$

Mais cette conclusion contredit évidemment le théorème **S**.

On doit donc poser, suivant (1):

$$(5) \qquad \aleph(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} + \aleph(\mathfrak{n}),$$

ce qui implique la formule

$$(6) \qquad \mathfrak{n} \leqslant \aleph(\mathfrak{n}).$$

Il résulte de (6) immédiatement que $\mathfrak{n}$ est un aleph, c. q. f. d.

Théoréme 7. *La proposition* **Z** *résulte de la proposition* **V'.**

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème précédent; au lieu des sommes des nombres cardinaux il faut envisager leurs produits.

Pour terminer je veux attirer l'attention sur le fait que l'on peut remplacer les propositions **I**—**V'** qui concernent les propriétés des nombres cardinaux par des propositions analogues concernant les propriétés d'ensembles Ainsi p. ex. à la proposition **II** correspond la proposition suivante:

2. *Tout ensemble infini M a la même puissance que l'ensemble de toutes les paires ordonnées composées d'éléments de M.*

Si l'on envisage les proposition 1—5', obtenues de cette façon, on arrive, en examinant notre raisonnement, à la conclusion que l'équivalence de ces propositions à *l'axiome du choix* résulte exclusivement des autres axiomes de M. Zermelo