Sur les continus homogènes.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Je dirai qu'un ensemble de points A est homogène si à tout couple $a_1 . a_2$ de points de A correspond une transformation biunivoque et bicontinue transformant A en soi et a_1 en a_2.

2. Je me propose de démontrer le résultat suivant:

Une ligne de Jordan[1]) *plane et homogène est une ligne simple fermée.*

Remarques préliminaires.

3. Je vais désigner par R_2 le plan euclidien. La frontière d'un domaine plan B sera désigné par $F(B)$.

4. L'ensemble somme de trois arc simples $L_1 . L_2, L_3$ coextrémales et n'ayant deux à deux que les extrémités a, b en commun détermine dans R_2 trois domaines: G_1, G_2, G_3. On a:

$$F(G_i) = L_j + L_k \quad i, j, k; \; i \neq j \neq k \neq i \tag{1}$$

G_i et $[G_i + G_k - (a+b)]$ sont les deux domaines connexes déterminés par la ligne simple fermée $L_j + L_k$. C'est une conséquence facile des propriétés fondamentales des lignes simples fermées. en particulier du théorème de Jordan

5. *La frontière d'un domaine déterminé par une ligne de Jordan est une ligne de Jordan.* En effet, soit B un tel domaine. D'après un théorème de M. Schoenflies[2]) tout point de $F(B)$ est „allseitig

[1]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math* I p. 180, 27.

[2]) A. Schoenflies: Die Entwickelung d. Lehre von d. Punktmannigfaltigkeiten II, Kap. 6. p. 237.

erreichbar" de B. Donc, en vertu d'un théorème de M. Torhorst [1]) $F(B)$ est une ligne de Jordan c. q. f. d.

6. Le sous-ensemble fermé A_1 du continu A découpe A si $A - A_1$ contient deux points x, y tels, que tout sous-continu de A contenant x et y a de points communs avec A_1. Si A est une ligne de Jordan, on voit sans peine que les mots: „sous-continu de A contenant x et y" peuvent être remplacés par: „arc simple aux extrémités x et y contenu dans A", sans altérer le sens de la définition. Un arc simple aux extrémités x, y contenu dans A sera désigné dans la suite par le symbole $J(a, b; A)$.

7. *Une ligne de Jordan A ne contenant aucune ligne simple fermée ne découpe pas R_2.* Supposons en effet que A découpe R_2 entre les points x et y. A contient alors une coupure irréductible [2]) entre x et y. Cette coupure — designons la par A_1 — est un continu [3]) donc une ligne de Jordan [4]), ne contenant aucune ligne simple fermée. A_1 étant une ligne de Jordan n'est pas indécomposable, on a donc une décomposition: $A_1 = A_2 + A_3$ telle que

$$(2) \qquad A_1 - A_2 \neq 0, \quad A_1 - A_3 \neq 0$$

A_2 et A_3 étant de continus, donc des lignes de Jordan [4]). Supposons que $A_2 \times A_3$ contient deux points b_1, b_2 différents. Il existe alors un $J(b_1, b_2; A_2)$ et un $J(b_1, b_2; A_3)$. Mais comme il n'y a qu'un seul $J(b_1, b_2; A_1)$ [5]), on doit avoir:

$$(3) \qquad J(b_1, b_2; A_2) = J(b_1, b_2; A_3) = J(b_1, b_2; A_1)$$

$$(4) \qquad A_2 \times A_3 \supset J(b_1 . b_2; A_1)$$

$A_2 \times A_3$ est donc bien enchaîné. D'après (2) et la définition de A_1, A_2 et A_3 ne découpent pas R_2 entre x et y, donc en vertu d'un théorème de Janiszewski [6]) A_1 n'est pas une coupure de R_2 entre x et y, contrairement à la supposition.

8. Une ligne de Jordan ne contenant aucune ligne simple fermée contient des points qui la découpent. Ce sont tous les points sauf les extrémités des arcs simples saturés de la ligne en question [7]).

[1]) M. Torhorst: *Math. Zeitschr.* IX p. 65.
[2]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* I p. 62—64, **7—10**.
[3]) l. c. p. 65, **11**.
[4]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* II p. 123, **10**.
[5]) ibid.
[6]) Z. Janiszewski: *Prace mat.-fiz.* 26 p. 48, 62; v. a. *Fund. Math.* p. 20—21, **5**.
[7]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* II p. 121, **7**.

Solution du problème.

9. Soit A une ligne de Jordan, homogène dans R_2.

10. A contient au moins deux points qui ne le découpent pas [1]). Donc, en vertu de sa homogéneité A n'est découpé par aucun de ses points. D'après **8** il en résulte que A contient une ligne simple fermée. A étant borné n'est pas identique à R_2, donc en vertu de sa homogénéité et du théorème sur l'invariance d'un domaine à deux dimensions [2]) A est non dense dans R_2 et découpe R_2.

11. On a:

$$R_2 - A = \sum_k B_k$$

les B_n étant des domaines connexes. La somme à droite comprend, d'après **10**, au moins deux éléments.

12. D'après **5** $F(B_k)$ est une ligne de Jordan. Elle découpe R_2 (entre un point arbitraire de B_k et un point arbitraire de tous B_l, $l \neq k$), donc elle contient une ligne simple fermée (d'après **7**).

13. *$F(B_k)$ est une ligne simple fermée.* En effet soit C une ligne simple fermée contenue dans $F(B_k)$, D_1 celui des deux domaines déterminés par C qui contient B_k, D_2 le domaine complémentaire. Supposons:

(6) $$F(B_k) - C \neq 0.$$

On aura:

(7) $$F(B_k) - C \subset D_1.$$

Soit x_1 un point de $F(B_k) - C$, x_2 un point de C, M_1 un $J(x_1, x_1; F(B_k))$, x_3 le premier point de M_1 (à partir de x_1) contenu dans C, x_4 un point de C différent de x_3, M_2 la partie de M_1 entre x_1 et x_3. Comme x_3 ne découpe pas A, il existe un $J(x_1, x_4; A)$, désignons le par M_3, qui ne contient pas x_3. Soit x_5 le premier point de M_3 (à partir de x_1) contenu dans C, M_4 la partie de M_3 entre x_1 et x_3. On a $x_5 \neq x_3$. $M_2 + M_4$ est une ligne de Jordan contenant x_3 et x_5, il existe donc un $J(x_3, x_5; M_2 + M_4)$, désignons le par L_1; soient de plus L_2, L_3 le deux arcs simples déterminés sur C par x_3, x_5. On a:

(8) $$L_2 \times L_3 = x_3 + x_5$$

(9) $$L_2 + L_3 = C$$

[1]) l. c. d. 119, **5**.

[2]) A. Brouwer: *Math. Ann.* 71.

(10) $$L_1 \times C \subset (M_2 + M_4) \times C = x_3 + x_5$$
donc:
(11) $$L_1 \times L_2 = L_1 \times L_3 = x_3 + x_5.$$

D'après 4 $L_1 + L_2 + L_3$ détermine dans R_2 trois domaines G_1, G_2 et G_3 assujéttis à (1). Comme:

(12) $$L_1 \subset M_2 + M_4 \subset D_1 + C$$
on aura:
(13) $$G_1 = D_2$$
(14) $$G_2 + G_3 + L_1 - (x_3 + x_5) = D_1$$

et par suite une des deux relations: $B_k \subset G_2$, $B_k \subset G_3$; on peut toujours moyennant une permutation d'indices 2 et 3 supposer que c'est la première. Donc:

(15) $$L_2 \subset C \subset F(B_k) \subset G_2 + F(G_2) = G_2 + (L_1 + L_3)$$
donc comme $G_2 \times L_2 = 0$:
(16) $$L_2 \subset L_1 + L_3$$

ce qui est incompatible avec (8) et (11). Donc $F(B_k) - C = 0$ et $F(B_k) = C$ c. q. f. d.

14. *Si, pour $k \neq l$, $F(B_k) \times F(B_l)$ contient un arc simple, alors A est une ligne simple fermée.* Supposons que $F(B_k) \times F(B_l)$ contient un arc simple N. y_1, y_2 étant deux points de N construisons un arc simple N_1 aux extrémités y_1, y_2 tel que:

(17) $$N_1 - (y_1 + y_2) \subset B_k.$$

Soit N_2 la partie de N entre y_1 et y_2, N_3 l'arc complémentaire de N_2 sur $F(B_k)$, Q — l'arc complémentaire de N_2 sur $F(B_l)$, y_3 un point de N_2 différent de y_1, y_2, — P_1, P_2 les deux arc simples: $J(y_1, y_3; N_2)$, $J(y_2, y_3; N_2)$. On a:

(18) $$P_1 + P_2 = N_2$$
(19) $$P_1 \times P_2 = y_3$$

$N_1 + N_2 + N_3$ déterminent d'après 4 trois domaines: H_1, H_2, H_3, assujéttis à la condition:

(20) $$F(H_k) = N_j + N_l \quad j, k, l = 1, 2, 3;\ j \neq k \neq l \neq j.$$

H_1 est évidemment identique au complémentaire de B_k, donc:

(21) $$H_2 + H_3 + N_1 - (y_1 + y_2) = B_k$$

N_1+N_2+Q déterminent de même trois domaines K_1, K_2, K_3 aux frontières N_2+Q, N_1+Q, N_1+N_2. On voit facilement que $K_1=B_i$, $K_3=H_3\subset B_k$. On a:

(22) $R_2=N_1+N_2+Q+K_1+K_2+K_3=N_1+N_2+Q+B_i+K_2+H_3$

(23) $A-(P_1+P_2)=A-N_2=[(A-N_2)\times N_1]+[(A-N_2)\times N_2]+$
$$+[(A-N_2)\times Q]+[(A-N_2)\times B_i)+[(A-N_2)\times K_2]+[(A-N_2)\times H_3]\subset$$
$$\subset N_1+Q+(A\times B_i)+K_2+(A\times B_k)=N_1+Q+K_2$$

(24) $$[A-(P_1+P_2)]'\subset N_1+Q+K_2$$

(25) $$[A-(P_1+P_2)]'\times y_3=0.$$

Les relations (19) et (25) montrent que y_3 est un point *ordinaire* de A [1]). Donc A étant homogène tous les points A sont *ordinaires* et A est une ligne simple fermée c. q. f. d.

15. Supposons maintenant que A n'est pas une ligne simple fermée.

16. On a dans ce cas:

(26) $$A-\sum_k F(B_k)\neq 0.$$

En effet, d'après **14** l'ensemble $E_{ik}=F(B_i)\times F(B_k)$, $i\neq k$ est vide ou punctiforme, donc l'ensemble $E=\sum_{i,k}E_{ik}$, $i\neq k$ est un ensemble punctiforme F_σ. a_1 désignant un point de B_1, a_2 un point de B_2 il existe par suite [2]) un continu borné S, contenant a_1 et a_2, tel que $S\times E=0$. Supposons:

(28) $$A-\sum_k F(B_k)=0$$

alors:

(28) $$R_2=\sum_k(B_k+F(B_k))=\sum_k\overline{B}_k$$

(29) $$S=\sum_k\overline{B}_k\times S$$

(30) $(\overline{B}_k\times S)\times(\overline{B}_l\times S)=S\times(\overline{B}_k\times\overline{B}_l)=S\times E_{kl}\subset S\times E=0$

(31) $$\overline{B}_1\times S\supset a_1;\quad \overline{B}_2\times S\supset a_2.$$

[1]) Z. Janiszewski: *Thèse* (Sur les continus irréductibles entre deux points) p, 64.

[2]) l. c. p. 71, Théorème VII.

On a ainsi une décomposition du continu borné S en une infinité dénombrable ou un nombre fini d'ensembles fermés sans points communs deux à deux, dont deux au moins sont non vides, ce qui est impossible [1]). Donc (26) est démontré.

17. Soit z_1 un point de $A - \sum_k F(B_k)$, $z_2 \neq z_1$ un point quelconque de A. L'ensemble $z_1 + z_2$ ne découpe pas A. En effet, supposons le contraire et soit $z_3 . z_4$ un couple de points de A entre lesquels $z_1 + z_2$ découpe A. Comme z_2 ne découpe pas A, il existe un $J(z_3, z_4; A - z_2)$: désignons le par U. On a $z_1 \subset U$. Soit ε_1 un nombre positif inférieur à la fois à $\frac{1}{2}\varrho(z_1, z_2)$, $\varrho(z_1, z_3)$, $\varrho(z_1 . z_4)$. En désignant par $\delta(Z)$ le diamètre d'un ensemble Z, on a d'après le théorème cité de Schoenflies [2]):

$$\lim_{k=\infty} \delta(B_k) = 0. \tag{32}$$

Il existe par suite un entier q, tel que $k \geqq q$ entraîne $\delta(B_k) \geqq \varepsilon_1$.

D'après la définition de z_1, on a pour tout k:

$$\varrho(z_1, B_k) > 0 \tag{33}$$

donc:

$$\varrho\left(z_1, \sum_{k=1}^{q} B_k\right) > 0. \tag{34}$$

Soit ε_2 un nombre positif inférieur à ε_1 et à $\varrho(z_1, \sum_{k=1}^{q} B_k)$, V_1 la circonférence de centre z_1 et de rayon ε_2, $k_1, k_2 \ldots$ les indices pour lesquels $V_1 \times B_{k_n} \neq 0$. Posons:

$$V_2 = (V_1 \times A) + \sum_{n=1}^{\infty} F(B_{k_n}). \tag{35}$$

En s'appuyant sur la relation (32) on démontre aisément que V_2 est un continu. En vertu de sa définition V_2 ne contient pas z_1. Comme d'autre part $k_n > q$, on a $\delta(B_{k_n}) = \delta(F(B_{k_n})) \leqq \varepsilon_1$ et $V_1 \times \times F(B_{k_n}) \neq 0$, donc pour tout point $x \subset V_2$:

$$\varrho(x, z_1) \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_1 < \varrho(z_1, z_2) \tag{36}$$

c. a. d. V_2 ne contient pas z_2. Enfin $V_2 \subset A$.

[1]) W Sierpiński: *Tôhoku Math. Journ.* Vol. 13 (1918), p. 300.

[2]) A. Schoenflies: Die Entwickelung d. Lehre von d. Punktmannigfaltigkeiten II, Kap. 6. p. 237.

Soient U_1, U_2 les parties de U entre z_3, z_1 et z_1, z_4 respectivement. Comme:

(37) $$\varrho(z_1, z_3) > \varepsilon_1 > \varepsilon_2, \quad \varrho(z_1, z_4) > \varepsilon_1 > \varepsilon_2$$

z_3 et z_4 sont extérieurs à V_1; donc:

(38) $$U_1 \times V_1 \neq 0, \quad U_2 \times V_1 \neq 0.$$

Soit z_5 le premier point de U_1 (à partir de z_3) contenu dans V_1, z_6 le premier point de U_2 (à partir de z_4) contenu dans V_1, U_3 la partie de U_1 entre z_3 et z_5, U_4 la partie de U_2 entre z_4 et z_6. U_3 et U_4 ne contiennent ni z_1 ni z_2 et sont contenus dans A. On a:

(39) $$z_5 \subset A, \quad z_5 \subset V_1$$

(40) $$z_5 \subset A \times V_1 \subset V_2$$

(41) $$U_3 \times V_2 \supset z_5$$

et de même

(42) $$U_4 \times V_2 \supset z_6.$$

Il en résulte que $U_3 + V_2 + U_4$ est un continu contenant z_3 et z_4 contenu dans A et ne contenant pas z_1, z_2. L'ensemble $z_1 + z_2$ ne découpe pas A, entre z_3 et z_4, contrairement à la supposition.

18. A étant homogène il résulte que *A n'est découpé par aucun couple de ses points.*

19. *L'ensemble $F(B_k) \times F(B_l)$ est vide ou composé d'un seul point.* Supposons en effet que cet ensemble contient deux point différents $x_1 . x_2$. Construisons deux arcs simples aux extrémités x_1, x_2: K_1 et K_2 tels que:

(43) $$K_1 - (x_1 + x_2) \subset B_k; \quad K_2 - (x_1 + x_2) \subset B_l$$

$K_1 + K_2 = K$ est une ligne simple fermée, qui détermine dans R_2 deux domaines G_1, G_2. G_1 contient des points de B_k et des points de B_l, donc des points de $F(B_k)$: par suite:

(44) $$G_1 \times A \neq 0$$

et de même

(45) $$G_2 \times A \neq 0.$$

Soit x_3 un point de $G_1 \times A$, x_4 un point de $G_2 \times A$; on aura: $x_3 + x_4 \subset A - (x_1 + x_2)$. Soit L un $J(x_3, x_4; A)$, on aura:

(46) $$L \times K \neq 0$$

donc, comme $L \subset A$:

(47) $$L \times K \times A = L \times (K \times A) = L \times (x_1 + x_2) \neq 0$$

c. à. d. L contient soit x_1, soit x_2. Donc $x_1 + x_2$ découpe A (entre x_3 et x_4), contrairement à **18**.

20. *$F(B_k)$ ne découpe pas A.* Soient z_1, z_2 deux points arbitraires de $A - F(B_k)$, L un $J(z_1, z_2; A)$. Supposons que:

(48) $$L \times F(B_k) \neq 0.$$

Comme z_1 et z_2 sont situées dans le domaine complémentaire de B_k, il existe un continu C, tel que:

(49) $$C \supset z_1 + z_2; \quad C \times F(B_k) = 0.$$

On peut tracer une ligne polygonale simple, fermée P, telle que C soit contenu dans l'un, $F(B_k)$ dans l'autre des deux domaines déterminés par P [1]). On a, d'après (48):

(49) $$L \times P \neq 0.$$

Soient z_3 le premier, z_4 le dernier point de L (à partir de z_1) situé sur P, L_1 et L_2 les parties de L entre z_1, z_3 et z_4, z_2 respectivement. On a:

(50) $$L_1 + L_2 \subset A; \quad (L_1 + L_2) \times F(B_k) = 0.$$

Soit $k_1, k_2 \ldots$ la suite d'indices pour lesquels

(51) $$P \times B_{k_n} \neq 0; \quad F(B_k) \times F(B_{k_m}) = 0$$

$l_1, l_2 \ldots$ la suite d'indices pour lesquels:

(52) $$P \times B_{l_m} \neq 0; \quad F(B_k) \times F(B_{l_m}) \neq 0.$$

D'après **19** $F(B_k) \times F(B_{l_m})$ se réduit à un seul point x_m. P ne contient pas x_m, car d'après la définition de P:

(53) $$P \times F(B_k) = 0.$$

On peut par suite trouver un arc simple E_m ne contenant pas x_m et tel que

(54) $$F(B_{l_m}) \times P \subset E_m.$$

[1]) A. Brouver: *Math. Ann.* **69** p. 170.

On a:

(55) $$E_m \times F(B_k) = 0.$$

Considérons maintenant l'ensemble:

$$P_1 = [P \times A] + \sum_n F(B_{k_n}) + \sum_m E_m.$$

En utilisant (32) et (54) on démontre facilement que c'est un continu. (51), (53) et (55) entraînent:

(57) $$P_1 \times F(B_k) = 0.$$

D'autre part:

(58) $$z_3 + z_4 \subset A; \quad z_3 + z_4 \subset P$$

(59) $$z_3 + z_4 \subset A \times P \subset P_1$$

(60) $$P_1 \times L_1 \neq 0; \quad P_1 \times L_2 \neq 0$$

donc l'ensemble:

(61) $$P_2 = L_1 + P_1 + L_2$$

est un continu contenant z_1 et z_2. (50) et (56) entraînent:

(62) $$P_2 \subset A;$$

enfin, en vertu de (50), (57):

(63) $$P_2 \times F(B_k) = 0.$$

On voit bien que $F(B_k)$ ne découpe pas A entre z_1 et z_2, c. q. f. d.

21. *Une ligne simple fermée contenue dans A et passant par un point de l'ensemble $A - \sum_k F(B_k)$ découpe A.* Soit C une telle ligne, a un point de $C \times [A - \sum_k F(B_k)]$, H_1, H_2 les deux domaines déterminés pas C. On a:

(64) $$H_1 \times A \neq 0,$$

car dans le cas contraire on aurait pour un indice déterminé k_1:

(65) $$H_1 = B_{k_1}$$

(66) $$a \subset C = F(B_{k_1})$$

contrairement à la supposition. On a de même:

(67) $$H_2 \times A \neq 0.$$

Or il est évident que C découpe A entre tout point de $H_1 \times A$ et tout point de $H_2 \times A$.

22. Soit maintenant $x \subset F(B_1)$, $y \subset A - \sum_k F(B_k)$. La transformation biunivoque et bicontinue de A en soi qui transforme x en y, transforme $F(B_k)$ en une ligne simple fermée contenue dans A, ne découpant pas A et passant par y. Mais d'après **21** une telle ligne n'existe pas. La supposition **15** entraîne donc une contradiction, c. q. f. d.

23. En utilisant les considérations exposées et la méthode d'inversion [1]) on pourrait démontrer le résultat suivant complétant celui de notre note:

Une ligne de Jordan généralisée [2]) *plane et homogène est* 1) *identique au plan tout entier ou bien* 2) *une droite topologique.*

24. J'indique encore le problème suivant:

Existe-t-il un continu plan, borné et homogène, qui n'est pas une ligne de Jordan [3])?

[1]) C. Kuratowski: *Fund. Math.* IV p. 151 ss.

[2]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* I, p. 193, 33.

[3]) Ce problème est équivalent au problème 2) posé par MM. Knaster et Kuratowski dans le t. I de ce journal (p. 223).