# Sur la représentation des fonctions mesurables $B$ par les séries transfinies de polynomes.

Par

M. M. Lavrentieff (Moscou).

Dans sa Note *„Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire"* [1]) M. Sierpiński a posé la question suivante: *Peut-on représenter toute fonction de classe 2 par une série transfinie de polynomes* [2])?

Je donnerai ici une réponse affirmative à cette question, en démontrant une proposition plus générale que voici:

*Pour qu'une fonction soit de classe $\leqslant \alpha$, il faut et il suffit qu'elle soit représentable par une série transfinie de polynomes du type $\omega^\alpha$.*

**Lemme I.** *Toute fonction de classe $\alpha$* (finie ou non) *peut être considérée comme limite d'une suite* (de type $\omega$) *de fonctions bornées de classes $< \alpha$* [3]).

Pour démontrer ce lemme, il suffit de remplacer toute fonction $f_n(x)$, de la suite de fonctions de classes $< \alpha$, convergente vers $f(x)$, par une fonction $\varphi_n(x)$, égale à $f_n(x)$, si $|f_n(x)| \leqslant n$, à $n$, si $f_n(x) > n$, et à $-n$, si $f_n(x) < -n$ (ce qui n'altère pas la classe, d'après Baire [4]).

**Lemme II.** *Toute fonction $f$ bornée de classe $\alpha$ peut être considérée comme limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune est comprise entre les bornes de $f$.*

$A$ et $B$ étant les bornes de $f$, il suffit, pour démontrer notre lemme, de remplacer $f_n(x)$ par une fonction égale à $f(x)$, si $A \leqslant f_n(x) \leqslant B$, à $A$, si $f_n(x) < A$, à $B$, si $f_n(x) < B$.

[1]) *Fundamenta Mathematicae* t. I, p. 135.

[2]) Les définitions d'une suite et d'une série transfinie (de nombres réels ou de fonctions) se trouvent dans la Note citée de M. Sierpiński

[3]) Cf. R. Baire: *Acta Mathematica*, t. 30, p. 7.

[4]) Loc. cit. p. 3.

**Lemme III.** *Toute fonction $f$ bornée de classe 1 est, dans un intervalle fini, limite d'une suite de polynomes, dont chacun est compris entre les bornes de $f$.*

Soit, en effet, $A \leqslant f(x) \leqslant B$, pour $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$, où $f_n(x)$ sont des fonctions continues dans $(a, b)$.

$n$ étant un nombre naturel donné quelconque, posons

$$\varphi_n(x) = f_n(x), \quad \text{si} \quad A + \frac{B-A}{n} \leqslant f_n(x) \leqslant B - \frac{B-A}{n};$$

$$\varphi_n(x) = A, \quad \text{si} \quad f_n(x) < A + \frac{B-A}{n};$$

$$\varphi_n(x) = B, \quad \text{si} \quad f_n(x) > B - \frac{B-A}{n};$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ seront évidemment continues, et nous aurons

$$(1) \qquad A + \frac{B-A}{n} \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B - \frac{B-A}{n},$$

et

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Or, d'après le théorème de Weierstrass, il existe pour la fonction $\varphi_n(x)$, continue et bornée dans $(a, b)$, un polynome $P_n(x)$, tel que

$$(3) \qquad |\varphi_n(x) - P_n(x)| < \frac{B-A}{n}, \quad \text{pour} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

ce qui donne, d'après (1):

$$A \leqslant P_n(x) \leqslant B;$$

or, d'après (2) et (3) nous avons:

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = f(x);$$

la suite de polynomes $P_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est donc la suite cherchée.

**Lemme IV.** *$A$ et $B$ étant deux nombres réels finis, $f(x)$ une fonction de classe $\alpha$, telle que $A \leqslant f(x) \leqslant B$, et $\varepsilon_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite convergente vers 0, il existe toujours une suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de fonctions de classes $< \alpha$ tendant vers $f(x)$ et telle que*

$$A + (B-A)\varepsilon_n \leqslant f_n(x) \leqslant B - (B-A)\varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Soit, en effet, $\varphi_n(x)\,(n=1, 2, 3....)$ une suite infinie de fonctions de classes $<\alpha$ ayant $f(x)$ pour limite. Pour obtenir la suite $f_n(x)$ satisfaisant aux conditions de notre lemme, il suffira, comme on voit sans peine, poser

$$f_n(x)=\varphi_n(x), \quad \text{si} \quad A+(B-A)\varepsilon_n \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B-(B-A)\varepsilon_n;$$

$$f_n(x)=A+(B-A)\varepsilon_n, \quad \text{si} \quad \varphi_n(x)<A+(B-A)\varepsilon_n,$$

et

$$f_n(x)=B-(B-A)\varepsilon_n, \quad \text{si} \quad \varphi_n(x)>B-(B-A)\varepsilon_n.$$

**Lemme V.** *Toute fonction $f(x)$ (finie ou non) de classe $\alpha$ peut être considérée comme limite d'une suite $f_k(x)\,(k=1, 2, 3,...)$ de fonctions de classes $<\alpha$, telles que*

$$(4) \qquad |f_{k+1}(x)-f_k(x)| \leqslant \varepsilon_k \leqslant \frac{1}{p}, \quad (n=1, 2, 3,\ldots)$$

*$p$ étant un nombre naturel quelconque donné d'avance, et $\varepsilon_k$ $(k=1, 2,...)$ des nombres positifs tendant vers 0.*

Démonstration. Soit $f(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x)$; $\mathrm{cl}\,\varphi_n(x)<\alpha$ [1]). D'après le lemme I nous pouvons supposer

$$(5) \qquad |\varphi_n(x)| \leqslant n.$$

Posons $\varphi_0(x)\equiv 0$; nous pouvons alors écrire

$$(6) \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)].$$

Selon (5) nous aurons

$$(7) \qquad |\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leqslant |\varphi_{n+1}(x)|+|\varphi_n(x)| \leqslant 2n+1.$$

Remplaçons maintenant tout terme $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$ de la série (6) par une somme de $p(2n+1)^2$ termes donc chacun est $= \dfrac{\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)}{p(2n+1)^2}$, et désignons par $f_n(x)$ la somme de $k$ premiers termes de la série ainsi obtenue. Nous aurons évidemment $\mathrm{cl}\,f_n(x)<\alpha$, $\lim_{k=\infty} f_k(x)=f(x)$, et, d'après (7):

$$|f_{k+1}(x)-f_k(x)|=\frac{|\varphi_{n_k+1}(x)-\varphi_{n_k}(x)|}{p(2n_k+1)^2} \leqslant \frac{1}{p(2n_k+1)} \leqslant \frac{1}{p},$$

[1]) Nous désignons, suivant M. Lusin, par le symbole $\mathrm{cl}\,f(x)$ la classe de la fonction $f(x)$.

où $n_k (k=1, 2, \ldots)$ est une suite infinie de nombres naturels, croissante indéfiniment avec $k$: donc, en posant $\varepsilon_n = \frac{1}{p(2n_k+1)}$, nous aurons l'inégalité (4), ce qui prouve notre lemme.

**Théorème.** 1°. *Toute fonction $f(x)$ de classe $\alpha$ est une somme d'une série transfinie de polynomes de type $\omega^\alpha$.*

2°. *Si $f(x)$ est une fonction bornée de classe $\alpha$ et $k$ un nombre naturel donné, il existe une série transfinie de polynomes de type $\omega^\alpha$ ayant $f(x)$ pour somme, et telle que toutes ses sommes partielles sont comprises entre les bornes de $f(x)$, pour $|x| \leqslant k$.*

Démonstration. Dans le cas $\alpha = 1$ les deux propositions résultent du théorème connu de Weierstrass et du lemme III.

Soit maintenant $\alpha$ un nombre ordinal donné quelconque, $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que les propositions 1° et 2° sont vraies pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha$: nous prouverons qu'elles seront encore vraies pour le nombre $\alpha$.

1°. Soit $f(x)$ une fonction quelconque de classe $\alpha$, et soit

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x); \quad \mathrm{cl}\, f_n(x) = \alpha_n < \alpha; \quad \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$$

D'après le lemme V, nous pouvons supposer

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ est une suite, telle que $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

La proposition 2° étant, par hypothèse, vraie pour $\xi < \alpha$, nous pouvons écrire, en posant $f_0(x) \equiv 0$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{\xi < \omega^{\alpha_{n+1}}} P_\xi^{(n)}(x), \tag{8}$$

où $P_\xi^{(n)}(x) (\xi < \omega^{\alpha_{n+1}}, n = 0, 1. 2, \ldots)$ sont des polynomes et où nous avons

$$\left| \sum_{\xi < \gamma} P_\xi^{(n)}(x) \right| \leqslant \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}} \quad \text{et} \quad |x| \leqslant n. \tag{9}$$

Soit maintenant $\beta$ un nombre ordinal donné quelconque $< \omega^\alpha$: on voit sans peine que $\beta$ peut être écrit (d'une façon unique) sous la forme

$$\beta = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n} + \gamma,$$

où $n$ est un nombre naturel ou 0, et $\gamma$ un nombre ordinal $< \omega^{\alpha_{n+1}}$.

Posons, pour tout $\beta < \alpha$:

(10) $$S_\beta(x) = S_{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\ldots+\omega^{\alpha_n}+\gamma}(x) = f_n(x) + \sum_{\xi<\gamma} P_\xi^{(n)}(x).$$

De (10) résulte sans peine que $S_{\xi+1}(x) - S_\xi(x)$ sont des polynomes, pour $\xi < \omega^\alpha$. Donc

(11) $$\sum_{\xi<\omega^\alpha} [S_{\xi+1}(x) - S_\xi(x)]$$

est une série de polynomes de type $\omega^\alpha$: démontrons qu'elle a $f(x)$ pour somme.

Or, soit $x_0$ un nombre réel donné, $\varepsilon$ — un nombre positif donné quelconque. D'après $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$ et d'après $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe un indice $N \geqslant |x_0|$, tel que

(12) $$|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour} \quad n \geqslant N.$$

D'autre part, d'après (9), nous avons

(13) $$\left|\sum_{\xi<\gamma} P_\xi^{(n)}(x_0)\right| \leqslant \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}} \quad \text{et} \quad n \geqslant N.$$

Les formules (10), (12) et (13) donnent donc:

(14) $$|S_{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\ldots+\omega^{\alpha_n}+\gamma}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad n \geqslant N, \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}}.$$

Posons $\mu = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_N}$: d'après $\alpha_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, \ldots$, nous aurons, comme on voit sans peine, $\mu < \omega^\alpha$. Or, pour $\beta = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n} + \gamma > \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_N} = \mu$, nous avons évidemment $n \geqslant N$, donc, d'après (14):

$$|S_\beta(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad \mu < \beta < \omega^\alpha,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{\beta<\omega^\alpha} S_\beta(x) = f(x_0)$, donc que

$$\sum_{\xi<\omega^\alpha} [S_{\xi+1}(x_0) - S_\xi(x_0)] = f(x_0).$$

La somme (11) est donc égale à $f(x)$ pour tout $x$ réel, ce qui prouve la proposition 1⁰.

2⁰. Soit $A \leqslant f(x) \leqslant B$, et $f(x) = \alpha$, $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$, et $f_n(x) = \alpha_n < \alpha$, et soit $k$ un nombre naturel donné. D'après les lemmes V et IV, nous pouvons supposer

$$(15) \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n < B - A, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, et

$$(16) \quad A + (B - A)\varepsilon_n \leqslant f_n(x) \leqslant B - (B - A)\varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En conservant les notations utilisées dans la première partie de notre démonstration, nous aurons la formule (8) et nous pourrons supposer (d'après l'hypothèse que la proposition 2° est vraie pour $\xi > \alpha$):

$$(17) \quad \Big|\sum_{\xi<\gamma} P_\xi^{(n)}(x)\Big| \leqslant \varepsilon_n, \quad \text{pour} \quad \gamma < \omega^{\alpha_{n+1}} \, (n = 0, 1, 2, \ldots,) \text{ et } |x| \leqslant k.$$

Les formules (10), (16) et (17) donnent:

$$A + (B - A)\varepsilon_n - \varepsilon_n \leqslant S_\beta(x) \leqslant B - (B - A)\varepsilon_n + \varepsilon_n,$$

donc, d'après $\varepsilon_n < B - A$:

$$A < S_\beta(x) < B, \quad \text{pour} \quad \beta < \alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Notre théorème est ainsi démontré par l'induction transfinie.

**Théorème inverse:** *La somme d'une série transfinie de polynomes du type $\omega^\alpha + \gamma$, où $\gamma + \omega^{\alpha+1}$, est une fonction de classe $\leqslant \alpha$.*

Démonstration. Faisons d'abord la remarque suivante. Si la somme de toute série transfinie convergente de polynomes de type $\omega^\alpha$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha$, la somme d'une série transfinie de polynomes de type $\omega^\alpha + \gamma$, où $\gamma < \omega^{\alpha+1}$, est de même une fonction de classe $\leqslant \alpha$. En effet, d'après $\gamma < \omega^{\alpha+1}$, il existe un nombre naturel $n$, tel que $\omega^\alpha + \gamma = \omega^\alpha \, n + \gamma_1$, où $\gamma_1 < \omega^\alpha$, donc

$$\sum_{\xi<\omega^\alpha+\gamma} P_\xi(x) = \sum_{\xi<\omega^\alpha} P_\xi(x) + \sum_{\omega^\alpha \leqq \xi < \omega^\alpha \cdot 2} P_\xi(x) + \ldots + \sum_{\omega^\alpha(n-1) \leqq \xi < \omega^\alpha \cdot n} P_\xi(x) + \sum_{\omega^\alpha \cdot n \leqq \xi < \omega^\alpha \cdot n + \gamma_1} P_\xi(x).$$

Chacune de $n+1$ sommes à droite étant une série transfinie de type $\omega^\alpha$ [1]), donc, d'après l'hypothèse, une fonction de classe $\leqslant \alpha$, leur somme est une fonction de classe $\leqslant \alpha$ (d'après le théorème de M. Baire sur les sommes finies de fonctions de classe $\leqslant \alpha$). Notre

[1]) La dernière série à droite peut être complétée à une série de type $\omega^\alpha$ par l'adjonction des termes $= 0$.

remarque est ainsi justifiée. Il en résulte qu'il suffira de démontrer notre théorème pour les séries de type $\omega^\alpha$.

Pour $\alpha = 1$ notre théorème est vrai évidemment. Supposons qu'il est vrai pour $\xi < \alpha$, $\alpha$ étant un nombre ordinal donné $< \Omega$. Deux cas sont possibles:

1) $\alpha = \beta + 1$. Considérons les sommes partielles

$$S_{\omega^\beta}(x),\ S_{\omega^\beta . 2}(x), \ldots,\ S_{\omega^\beta . n}(x), \ldots;$$

notre théorème étant, par hypothèse, vrai pour $\beta < \alpha$, nous avons, en vertu de notre remarque: cl $S_{\omega^\beta . 2} \leqslant \alpha$, donc

$$\text{cl}\, S_{\omega^\alpha}(x) = \text{cl}\, [\lim_{n=\infty} S_{\omega^\beta . n}(x)] \leqslant \beta + 1 = \alpha.$$

2) $\alpha$ est un nombre de seconde espèce, soit $\alpha = \lim \alpha_n$. Les sommes partielles $S_{\omega^{\alpha_1}}(x)$, $S_{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}}(x), \ldots$, $S_{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\ldots+\omega^{\alpha_n}}(x)$ sont, d'après l'hypothèse, de classes $< \alpha$, donc

$$\text{cl}\, S_{\omega^\alpha}(x) = \text{cl}\, [\lim_{n=\infty} S_{\omega^{\alpha_1}+\omega^{\alpha_2}+\ldots+\omega^{\alpha_n}}(x)] \leqslant \alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Notre théorème est ainsi établi. Remarquons qu'on pourrait démontrer par un raisonnement analogue qu'une somme d'une série transfinie de type $\omega^\alpha + \gamma$ $(\gamma < \omega^{\alpha+1})$ de fonctions de classes $\leqslant \beta$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha + \beta$.

Moscou, le 13 décembre 1922.