Contribution à l'étude de continus de Jordan.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Dans le § 1 de cet ouvrage je m'occupe d'un théorème établi par M. Mazurkiewicz dans le vol. II de ce Journal [1]). J'en donne une démonstration plus brève, en le déduisant des propriétés générales des continus de Jordan. Dans le § 2 je généralise un théorème de M. Kline [2]) concernant les continus plans. Je l'étend à l'espace à n dimensions. Enfin dans le § 3 j'établis une nouvelle condition suffisante et nécessaire pour qu'un continu soit une courbe simple fermée.

Notations. Pour les définitions des symboles employés dans cette note, le lecteur consultera les „*notations*" de l'ouvrage *Sur les continus non-bornés*, publié dans ce volume. On y trouvera aussi les définitions des notions: domaine, continu, ensemble connexe, semi-continu (p. 28), région. Rappelons encore les définitions suivantes:

A est dit un *constituant* d'un ensemble E, si A est un semi-continu qui est contenu dans E mais qui n'est contenu dans aucun autre semi-continu qui soit sous-ensemble de E. Si $A \subset E$ et $E - A$ n'est pas un semi-continu, je dis que A *coupe* E (je n'emploie cette définition qu'en cas où E est un semi-continu). Si $A \subset E$ et $E - A$ est fermé, A est dit un *domaine relatif à* E; si en outre, A est un semi-continu, A est dit une *région relative.* Si $A \subset E$ et $\overline{E - A} = E$, A est dit *non dense* dans E; si, en outre, A est un continu, A est un *continu de condensation de* E (ces quatre dernières définitions ne seront employée qu'en cas où E est fermé).

Un continu C est dit un *continu de Jordan*, si pour tout point p de C et toute sphère S de centre p, il existe un continu K tel que $K \subset S \times C$ et $p \varepsilon K - \overline{C - K}$ (dans le cas de continu borné, cette notion coïncide avec la notion d'image continue du segment [3])

[1]) *Un théorème sur les lignes de Jordan* pp. 119—130.

[2]) Ce volume, p. 8 , theorème C.

[3]) Voir: Mazurkiewicz, Fund. Math. I p. 191.

§ 1.

Je m'appuie sur les propriétés suivantes des continus de Jordan:

(I) Chaque constituant d'un domaine relatif à un continu de Jordan C est une région relative à C;

(II) K étant un sous-continu (au sens plus large) [1] d'un continu de Jordan C et R un constituant de $C-K$, les ensembles $C-R$ et $R+K$ sont des continus.

J'ai établi la propriété (I) dans une note publiée dans le vol. I de ce Journal [2]. Je vais, à présent, démontrer (II).

R étant, selon (I), un domaine relatif à C, $C-R$ est fermé. D'autre part, $C-(R+K)$ est l'ensemble-somme de tous les constituants de $C-K$, sauf R. Or, ces constituants étant d'après (I) des domaines relatifs à C, leur somme en est également un. $R+K$ est donc fermé.

Pour prouver que $C-R$ et $R+K$ sont des continus (au sens plus large), envisageons leur somme et leur produit:

$$(C-R)+(R+K)=C+R+K=C$$

$$(C-R)\times(R+K)=(C-R)\times K=K.$$

Or, si la somme et le produit de deux ensembles fermés sont des continus (au sens plus large), ces ensembles sont également des continus (au sens plus large) [3]. Donc $C-R$ et $R+K$ sont des continus (au sens plus large).

Théorème. *Tout continu borné de Jordan contient deux points au moins qui ne le coupent pas (séparément).*

Démonstration. Soit C un continu borné de Jordan et soit

$$(1) \qquad p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

une suite de points dense dans C. Nous pouvons supposer que chacun de ces points coupe C. Car, s'il n'en existait qu'un seul qui ne coupe pas C, on pourrait l'omettre, et s'il en existait plus d'un, le théorème serait réalisé.

Soient R_0 et $S_0(\neq R_0)$ deux régions relatives à C qui entrent comme constituants dans le domaine relatif $C-(p_0)$. Nous allons

[1] C'est-à-dire: continu, ensemble vide ou un seul point.

[2] P. 43. Cf. Hahn, Fund. Math. II, p. 189.

[3] Théorème établi par Janiszewski et moi, Fund. Math. I p. 211.

définir par induction deux suites:

(2) $$p_{k_0}(=p_0), p_{k_1}, \dots p_{k_n}, \dots$$

de points exstraits de la suite (1), et

(3) $$R_0, R_1, \dots R_n, \dots$$

où R_n est une région-constituante de $C-(p_{k_n})$, convenablement choisie.

Les suites (2) et (3) supposées définies pour $n=m(\geqslant 0)$, désignons par $p_{k_{m+1}}$ le premier terme de la suite (1) tel que

(4) $$p_{k_{m+1}} \varepsilon R_m.$$

Un tel terme existe, car la suite (1) étant dense dans C, chaque domaine relatif à C, donc R_m en particulier, contient des points de cette suite.

Remarquons que, par définition de $p_{k_{m+1}}$, on a

(5) $$p_i \varepsilon C - R_m \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \dots k_{m+1} - 1$$

(6) $$p_{k_{m+1}} \varepsilon R_m - R_{m+1}.$$

La formule (4) entraîne l'inclusion

(7) $$C - R_m \subset C - (p_{k_{m+1}}).$$

En substituant dans la proposition (II): p_{k_m} à K et R_m à R, on en conclut que $C-R_m$ est un continu. Ce continu est donc, selon (7), situé entièrement dans une seule région-constituante de $C-(p_{k_{m+1}})$. Nous désignons par R_{m+1} une autre région-constituante de $C-(p_{k_{m+1}})$, d'ailleurs tout à fait arbitraire. Une telle région existe, car, par hypothèse, le point $p_{k_{m+1}}$ coupe le continu C.

Les suites (2) et (3) ainsi définies, remarquons que, par définition de R_{m+1}, on a $(C-R_m) \times R_{m+1} = 0$, d'où

(8) $$R_m \supset R_{m+1}.$$

Les formules (4) et (8) donnent, quel que soit $n \geqslant 0$,

(9) $$R_n \supset R_{n+1} + (p_{k_{n+1}}) \supset R_{n+2},$$

d'où

(10) $$\prod_{n=0}^{\infty} R_n = \prod_{n=0}^{\infty} \{R_{n+1} + (p_{k_{n+1}})\}.$$

D'après la proposition (II), chacun des ensembles $R_n + (p_{k_n})$ est fermé et, d'après (9), ils forment une suite décroissante. Or, selon un théorème de Cantor, le produit d'une suite d'ensembles décroissants fermés et bornés n'est pas vide. Il existe donc, en raison de (10), un point $r \varepsilon \prod_{n=0}^{\infty} R_n$.

Je dis que le point r ne coupe pas le continu C. Il suffit évidemment de prouver que tout point $x \varepsilon C - (r)$ peut être uni à p_0 par un continu situé dans $C - (r)$.

Or, soit X la région-constituante de $C - (r)$ qui contient x. X étant un domaine relatif à C, il existe un point de la suite (1), soit p_n, tel que $p_n \varepsilon X$. Joignons p_n à x par un continu $Q \subset X$. Nous allons prouver qu'il existe un indice k_m tel que $n < k_m$.

Il suffit à cet effet de prouver que

$$k_i < k_{i+1} \quad \text{quel que soit} \quad i \geqslant 0. \tag{11}$$

Or, selon (6), $k_i \neq k_{i+1}$. D'autre part, si $k_{i+1} < k_i$, on aurait, en vertu de (5), $p_{k_{i+1}} \varepsilon C - R_{i-1}$ donc, d'après (8): $p_{k_{i+1}} \varepsilon C - R_i$, contrairement à (4). La formule (11) est donc établie.

Or, l'inégalité $n < k_m$ entraîne, selon (5), que p_0 et p_n sont situés sur le continu $C - R_m$. On a, en outre, $C - R_m \subset C - (r)$, car $r \varepsilon R_m$. Ainsi le continu $Q + (C - R_m)$ unit les points p_0 et x dans C sans rencontrer le point r. Ce point ne coupe donc pas C.

Si l'on prend comme point de départ, en construisant la suite (3), S_0 au lieu de R_0, on peut déterminer d'une façon tout à fait analogue un point $s \varepsilon S_0$ qui ne coupe nonplus le continu C. Comme $r \neq s$, le théorème est prouvé.

Remarque. On voit aussitôt que si un continu borné de Jordan C contient un point qui coupe C en n parties, on peut déterminer, par la même méthode, n point dont aucun ne coupe C. Il en est de même pour $\aleph_0$.

§ 2.

Je vais me servir du lemme suivant [1]):

(III) tous deux points d'une région relative à un continu de Jordan peuvent être unis dans cette région par un continu *borné* (même par un arc simple).

[1]) Cf. R. L. Moore, Mathematische Zeitschrift, Berlin 1922, p. 255.

Théorème. *Chaque continu non-borné de Jordan contient un continu borné qui le coupe.*

Démonstration. Soit C un continu non-borné de Jordan. Entourons un point arbitraire p de C de trois sphères (à n dimensions) $S_1 \subset S_2 \subset S_3$. Soient T_1, T_2, T_3 leurs surfaces.

Par définition de continu de Jordan, il existe un continu K tel que

(12) $$K \subset S_1 \times C$$

(13) $$p \text{ non } \varepsilon\, \overline{C - K}.$$

Si K coupe C, le théorème est réalisé. Supposons donc que

(14) $$C - K \quad \text{est une région.}$$

Désignons par A la partie du continu C qui est situé entre les surfaces T_1 et T_3. A est donc un domaine relatif à C et, selon (12):

(15) $$A \subset C - K.$$

Nous allons prouver que parmi les constituants de A il n'y a qu'un nombre fini qui aient des points communs avec T_2.

En effet, dans le cas contraire, on peut choisir de chacun de ces constituants un point situé sur T_2. Il existe alors un point d'accumulation q de ces points. Comme $q \varepsilon C \times T_2$ et $C \times T_2 \subset A$, on a $q \varepsilon A$. R désignant le constituant de A qui contient le point q, ce point est donc point d'accumulation des points qui appartiennent à $C-R$. Mais ceci est impossible, car, selon I, R est un domaine relatif à C.

Soit donc $R_1, R_2, \ldots R_m$ la suite (finie) formée par toutes les régions-constituantes de A qui passent par T_2. On a $m \geqslant 1$, car C étant non-borné et contenant le centre p de S_2. il existe des points de $C \times T_2$ donc de A.

Ainsi

(16) $$T_2 \times C \subset R_1 + R_2 + \ldots R_m$$

et d'après (15):

(17) $$R_1 + R_2 + \ldots R_m \subset C - K.$$

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_m$ une suite de points choisis resp. des régions R_1, $R_2, \ldots, R_m$.

$C-K$ étant, selon (14), une région, on peut, en vertu du lemme (III) unir le point r_1 successivement aux points $r_2, r_3, \ldots r_m$ par des continus bornés $L_1, L_2, \ldots L_{m-1}$, situés dans cette région. Donc

(18) $$L_1 + L_2 + \ldots + L_{m-1} \subset C - K.$$

Le continu

(19) $$Q = \overline{R}_1 + L_1 + \overline{R}_2 + L_2 + \ldots L_{m-1} + \overline{R}_m$$

étant borné, il existe un point $z \varepsilon C - Q - S_2$. Je dis que Q coupe C entre z et p.

En effet, selon (17), (18) et (19): $Q \subset \overline{C - K}$; donc, d'après (13), $p \operatorname{non} \varepsilon Q$. Or, p étant situé à l'intérieur de la sphère S_2 et z en étant situé en dehors, chaque sous-continu X de C qui unit ces points passe par la surface T_2 de S_2, donc: $X \times T_2 \times C \neq 0$, d'où, selon (16) et (19), $X \times Q \neq 0$, c. q. f. d.

Remarque. L'ensemble $C - Q$ n'est pas connexe, car relativement aux continus de Jordan les notions de domaine connexe et de région coïncident [1]). Ainsi, en énonçant notre théorème de cette façon:

Chaque continu non-borné C de Jordan contient un *continu* borné Q tel que $C - Q$ n'est pas connexe, on obtient une généralisation du théorème mentionné de M. *Kline*: Chaque continu non-borné et *plan* C de Jordan contient un ensemble *connexe* et borné Q tel que $C - Q$ n'est pas connexe.

§ 3.

Soit C un ensemble fermé donné d'avance. X étant un sous-ensemble fermé arbitraire de C, je désigne l'ensemble $\overline{C - \overline{C - X}}$ par $R(X)$. Je vais me servir dans la suite des propriétés suivantes de la fonction $R(X)$:

(α) $$R(X) \subset X$$

(β) $$R(R(X)) = R(X)$$

(γ) $$R(X + Y) = R(X) + R(Y)$$

(δ) la condition nécessaire et suffisante pour que X soit non-dense dans C est que $R(X) = 0$.

J'ai établi les propositions (α), (β) et (δ) dans ma note *Sur l'opération A de l'Analysis situs* [2]). Je vais établir à présent la formule (γ).

[1]) Voir mon article cité du vol I de ce Journal.

[2]) Fund. Math. III, pp. 186, 183 (théor. 6) et 194. J'y ai donné à $R(X)$ le nom de la *partie régulière* de X relative à C. En employant les notations que j'y ai adoptées, on peut écrir la formule (γ) de cette façon:

$$A^{-1-1-} + B^{-1-1-} = (A + B)^{-1\,1-}$$

quels que soient A et B.

D'après le théor. 3 de ma note précitée, $\overline{X} - \overline{Y} \subset \overline{X - Y}$; par conséquent:

$$\overline{(C-X)-Y} \supset \overline{C-X} - \overline{Y} = \overline{C-X} - Y,$$

puisque, par hypothèse, $Y = \overline{Y}$.

Donc

$$C - \overline{(C-X)-Y} \subset C - (\overline{C-X} - Y) = (C - \overline{C-X}) + Y$$

d'où

$$\overline{C - \overline{(C-X)-Y}} \subset \overline{(C - \overline{C-X}) + Y} = \overline{C - \overline{C-X}} + Y$$

et, comme $(C-X) - Y = C - (X+Y)$, on a

$$\overline{C - \overline{C-(X+Y)}} = \overline{C - \overline{(C-X)-Y}} \subset \overline{C - \overline{C-X}} + Y$$

c'est-à-dire:

(20) $$R(X+Y) \subset R(X) + Y$$

L'inclusion $A \subset B$ entraîne $R(A) \subset R(B)$ [1]). On tire donc de (20):

(21) $$R(R(X+Y)) \subset R(R(X) + Y).$$

La formule (20) a été établie dans la seule hypothèse que X et Y sont fermés. Or, l'ensemble $R(X)$ étant fermé par définition, on peut substituer dans (20) $R(X)$ à X. On obtient:

(22) $$R(R(X) + Y) = R(Y + R(X)) \subset R(X) + R(Y).$$

Les formules (21) et (22) donnent en raison de (β):

(23) $$R(X+Y) \subset R(X) + R(Y).$$

D'autre part, on a [2]):

(24) $$R(X) + R(Y) \subset R(X+Y).$$

Les inclusions (23) et (24) donnent l'identité (γ).

Lemme. Si le continu C ne contient aucun continu de condensation et si aucun sous-continu de C ne le coupe, C est une courbe simple fermée.

Démonstration. Tout continu qui ne contient aucun continu de condensation est un continu de Jordan [3]). Tous deux points d'un

[1]) Ibid. form. (3) p. 185.

[2]) Ibid. form. (4) p. 185.

[3]) Voir: Mazurkiewicz Fund. Math I, p. 176 et Moore R. L. Bull. Amer. Math. Soc. 25, 1919.

continu de Jordan s'y laissent unir par un arc simple [1]). Soit donc A un arc simple situé sur C.

Par hypothèse, A n'est pas un continu de condensation de C. A contient donc un arc simple B tel que seules les extrémités a et b de B soient des points d'accumulation de $C-B$. Ainsi, I désignant l'arc B dépourvu de ces extrémités, on a

$$(25) \qquad \overline{C-B} \times I = 0.$$

Comme, par hypothèse, B ne coupe pas C, l'ensemble $C-B$ est un semi-continu et, partant, $\overline{C-B}$ est un continu. C'est un continu de Jordan, car C ne contenant aucun continu de condensation, $\overline{C-B}$ n'en contient nonplus.

Soit D un arc simple qui unit les points a et b dans $\overline{C-B}$. Les arcs B et D n'ayant que les extrémités en commun, leur somme est une courbe simple fermée. Nous allons prouver que

$$(26) \qquad C = B + D,$$

c'est-à-dire, qu'en posant

$$(27) \qquad N = C - B - D$$

on a $N=0$.

Supposons, par contre, que $N \neq 0$. D étant un continu, $C-D$ est, par hypothèse, un semi-continu. Mais $C-D=N+I$ et, selon (27) on a $N \subset C-B \subset \overline{C-B}$, d'où, suivant (25), $N \times I = 0$.

Or les ensembles N et I étant, par définition, des domaines relatifs à C, l'égalité $N \times I = 0$ prouve qu'aucun d'eux ne contient de point d'accumulation de l'autre. Il n'existe donc aucun continu qui unisse un point de N à un de I tout en étant situé dans $N+I$. L'ensemble $N+I$ n'est donc pas un semi-continu, contrairement à l'assertion antérieure.

Cette contradiction prouve que $N=0$, d'où en vertu de (27) on tire l'égalité (26).

Théorème. *Si aucun sous-continu d'un continu borné C ne coupe C, C est une courbe simple fermée.*

Démonstration. Par hypothèse, si K est un vrai sous-continu arbitraire de C, l'ensemble $C-K$ est un semi-continu. D'après un

[1]) Voir: Mazurkiewicz Fund. Math. I, p. 205 et Moore: R. L.: Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1917.

théorème établi dans l'ouvrage *Sur les continus non-bornés* [1]), tout semi-continu borné qui est une différence de deux ensembles fermés est somme d'une suite de continus croissants. Il existe donc une suite de continus $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ telle que:

$$C - K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \tag{28}$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \subset \ldots \tag{29}$$

On peut supposer qu'aucun des continus K_n n'est un continu de condensation de C. En effet, dans le cas contraire, on peut admettre en raison de (29), que tous les K_n sont des continus de condensation Alors, en vertu de (28), on a

$$\overline{C-K} = \overline{C-K} \times K + (C-K) = \overline{C-K} \times K + \sum_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{30}$$

L'ensemble $\overline{C-K} \times K$, comme frontière relative de K (à C), est non-dense dans C [2]). La formule (30) représente donc une décomposition de l'ensemble $\overline{C-K}$ en une infinité dénombrable d'ensembles non-denses dans C. Mais, tout ensemble non-dense dans C et non-dense dans $\overline{C-K}$ [3]). La formule (30) contredit donc le théorème de Baire. d'après lequel aucun ensemble fermé n'est somme d'une suite d'ensembles non-denses dans lui.

L'hypothèse qu'aucun des K_n n'est un continu de condensation et ainsi justifiée. D'après (δ), cela veut dire que $R(K_n) \neq 0$. Nous

[1]) Ce volume p. 31. Il serait intéressant de reconnaître, si la condition que le semi-continu $S = A - B$, où A et B sont fermés, soit borné est essentielle. On peut, en tout cas, la remplacer par l'hypothèse plus générale, que seul l'ensemble B soit borné.

En effet, soit $p \varepsilon S$ et soit ϱ la distance de p à B. Entourons chaque point de B d'une sphère de rayon ϱ/n (avec n fixe). Désignons pour chaque n, par I_n l'ensemble-somme des intérieurs de ces sphères. Soit K_n le plus grand continu tel que: $p \varepsilon K_n$ et $K_n \subset S - I_n$. Je dis que $S = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$.

Car, soit $x \varepsilon S$. S étant un semi-continu, il existe un continu Q qui unit p et x dans S. Or, B étant borné, sa distance de Q est, pour n suffisamment grand, $< \varrho/n$. Donc $Q \subset S - I_n$, d'où $Q \subset K_n$. Par suite $S \subset \sum_{n=1}^{\infty} K_n$. L'inclusion inverse est évidente.

[2]) Voir, ma note du vol. III de ce Journal, p. 188 (corollaire).

[3]) Ibid. p. 194 (corollaires 3 et 4).

arrivons donc à cette conclusion:

(31) à chaque sous-continu K de C et à chaque point $p \varepsilon C - K$ correspond un continu K_1 tel que

$$K_1 \subset C - K, \quad p \varepsilon K_1, \quad R(K_1) \neq 0.$$

Pour prouver notre théorème, il suffit, en vertu du lemme, de démontrer que C ne contient aucun continu de condensation.

Supposons par contre que M soit un continu de condensation de C. Donc

(32) $$R(M) = 0$$

Soit N un continu tel que

(33) $$N \subset M \quad \text{et} \quad N \neq M.$$

Soit

(34) $$p \varepsilon (M - N).$$

D'après (31) il existe un continu N_1 tel que:

(35) $$N_1 \subset C - N$$

(36) $$p \varepsilon N_1$$

(37) $$R(N_1) \neq 0.$$

En remplaçant dans (31): K par N_1 et p par un point arbitraire q de N, on en conclut qu'il existe un continu N_2 tel que

(38) $$N_2 \subset C - N_1$$

(39) $$q \varepsilon N_2$$

(40) $$R(N_2) \neq 0.$$

Les formules (33) et (39) entraînent, en raison de la formule $q \varepsilon N$, l'inégalité: $M \times N_2 \neq 0$.

De plus $M \times N_1 \neq 0$, car selon (34) et (36): $p \varepsilon M \times N_1$.

L'ensemble

(41) $$S = N_1 + M + N_2$$

est donc un continu. Donc, par hypothèse, $C - S$ est un semi-continu et, partant, $\overline{C - S}$ est un continu (ou vide). Par conséquent, $C - \overline{C - S}$ est un semi-continu et l'ensemble $\overline{C - \overline{C - S}} = R(S)$ est un continu

Ainsi, en vertu de (γ) et de (41), l'ensemble

(42) $$R(S) = R(N_1) + R(M) + R(N_2)$$

est un continu.

Mais, selon (38), $N_1 \times N_2 = 0$, d'où suivant (α):

$$R(N_1) \times R(N_2) = 0. \tag{43}$$

L'égalité (42) représente donc, en vertu des formules (32), (37), (40) et (43), une décomposition de $R(S)$ en deux ensembles fermés, disjoints et non-vides: $R(N_1)$ et $R(N_2)$.

L'ensemble $R(S)$ ne peut donc être un continu, contrairement à l'assertion antérieure.

Cette contradiction prouve que C ne contient aucun continu de condensation, c. q. f. d.