Sur deux catégories remarquables de fonctions de variable réelle.

Par

H. Looman (Utrecht).

M. A. Denjoy [1]) a défini deux catégories de fonctions de variable réelle, à savoir les fonctions approximativement continues et à prépondérance de continuité d'une part, les dérivées approximatives et les nombres dérivés prépondérants (de fonctions continues) d'autre part, dont il a démontré, en appliquant la partie réciproque du théorème de Baire [2]), qu'elles sont limites de fonctions continues.

Le but de cette Note est démontrer comment on peut former des suites de fonctions continues, tendant vers les fonctions en question; la seule propriété de ces fonctions que j'ai à appliquer est celle exprimée par leur définition.

I. Les fonctions approximativement continues et les fonctions à prépondérance de continuité.

1. Soit $f(x)$ une fonction mesurable, définie pour $a < x < b$ et finie sur une épaisseur pleine de (a, b). Posons $a < x_1 < x_2 < b$, $0 < \lambda < 1$.

La borne supérieure stricte (et en même temps la plus grande) des nombres y, satisfaisant à

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E[f(x) < y] \leqslant \lambda(x_2 - x_1)$$

[1]) *Sur certaines classes de fonctions de variable réelle.* C. R. t. 162, 1916. *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. 1915, p. 165—186. *Sur la totalisation des nombres dérivés non sommables*, Ann. Ec. Norm. Sup. 1916. p. 198. *Sur une propriété des fonctions dérivées.* Enseignement Mathématique, 1916.

[2]) c.-à-d. le théorème: toute fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait est limite de fonctions continues.

est alors un nombre fini $\Phi(x_1, x_2, \lambda)$; Φ est donc déterminée par les deux conditions:

$$\operatorname*{mes}_{x_2}^{x_1} E\{f(x) < \Phi\} \leqslant \lambda(x_2 - x_1)$$

$$\operatorname*{mes}_{x_2}^{x_1} E\{f(x) < \Phi + \varepsilon\} > \lambda(x_2 - x_1),$$

si petit que soit $\varepsilon > 0$.

De même, la borne inférieure stricte (et en même temps la plus petite) des nombres z, satisfaisant à

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\{f(x) \leqslant z\} \geqslant \lambda(x_2 - x_1)$$

est un nombre fini $\varphi(x_1, x_2, \lambda)$; φ est déterminée par les deux conditions:

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\{f(x) \leqslant \varphi\} \geqslant \lambda(x_2 - x_1)$$

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\{f(x) \leqslant \varphi - \varepsilon'\} < \lambda(x_2 - x_1)$$

si petit que soit $\varepsilon' > 0$.

On a immédiatement:

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\{f(x) \leqslant \Phi\} \geqslant \lambda(x_2 - x_1),$$

donc $\varphi \leqslant \Phi$. On peut avoir $\varphi < \Phi$.

Si x_1, x_2 sont fixes et λ varie de 0 à 1, φ et Φ ne décroissent jamais De là, on déduit aisément, en appliquant la définition de φ et Φ, que l'ensemble des valeurs de λ, tels que $\varphi(x_1, x_2, \lambda) < < \Phi(x_1, x_2, \lambda)$, est fini ou dénombrable (x_1 et x_2 fixes).

2. Je vais démontrer que, *si λ est fixe, les fonctions $\Phi(x_2, x_1, \lambda)$ et $\varphi(x_1, x_2, \lambda)$ sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement par rapport au couple (x_1, x_2).*

En effet, si $\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ n'était pas semi-continue supérieurement, il existerait un couple fixe x_1, x_2 et des couples x'_1, x'_2, tels que l'on aurait:

$$\Phi(x'_1, x'_2, \lambda) > \Phi(x_1, x_2, \lambda) + \varepsilon,$$

où: $x_1 = \lim x'_1$. $x_2 = \lim x'_2$; $\varepsilon > 0$ indépendant de x'_1, x'_2.

D'où:

$$\operatorname*{mes}_{x'_1}^{x'_2} E\{f(x) < \Phi(x_1, x_2, \lambda) + \varepsilon\} \leqslant \operatorname*{mes}_{x'_1}^{x'_2} E\{f(x) < \Phi(x'_1, x'_2, \lambda)\}$$
$$\leqslant \lambda(x'_2 - x'_2),$$

donc, puisque $\operatorname*{mes}_{x'_1}^{x'_2} E\{f(x) < \Phi(x_1, x_2, \lambda) + \varepsilon\}$ est continue par rapport à x'_1, x'_2,

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\{f(x) < \Phi(x_1, x_2, \lambda) + \varepsilon\} \leqslant \lambda(x_2 - x_1),$$

ce qui est en contradiction avec la définition de Φ.

Raisonnement analogue pour démontrer que φ est semi continue inférieurement.

Donc, sur un segment $a_1 b_1$, $\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ et $\varphi(x_1, x_2, \lambda)$ sont bornées, puisque φ est bornée inférieurement, Φ est bornée supérieurement, et $\varphi \leqslant \Phi$.

3. Posons ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, x_1 et x_2 fixes):

$$\psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi(x_1, x_2, \lambda) d\lambda,$$

et puique φ et Φ sont des fonctions non décroissant de λ:

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda_1) \leqslant \psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \leqslant \varphi(x_1, x_2, \lambda_2).$$

Je dis que, $\psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ est une *fonction continue* de (x_1, x_2).

En effet, soit λ un nombre compris entre λ_1 et λ_2, et supposons que les nombres x'_1, x'_2 tendent respectivement vers x_1 et x_2. D'après § 2, on a:

$$\varphi(x_1, x_2, \lambda) \leqslant \varliminf_{\substack{x'_1 \to x_1 \\ x'_2 \to x_2}} \Phi(x'_1, x'_2, \lambda) \leqslant \varlimsup_{\substack{x'_1 \to x_1 \\ x'_2 \to x_2}} \Phi(x_1, x_2, \lambda) \leqslant \Phi(x_1, x_2, \lambda).$$

Donc, sauf peut-être pour une infinité dénombrable de valeurs de λ, $\Phi(x'_1, x'_2, \lambda)$ (et d'ailleurs aussi $\varphi(x'_1, x'_2, \lambda)$) tend vers $\varphi(x_1, x_2, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \lambda)$.

De plus, φ et Φ sont bornées (pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$), puisque on a toujours:

$$\varphi(x'_1, x'_2, \lambda_1) \leqslant \varphi(x'_1, x'_2, \lambda) \leqslant \Phi(x'_1, x'_2, \lambda) \leqslant \Phi(x'_1, x'_2, \lambda_2)$$

et $\varphi(x'_1, x'_2, \lambda)$, $\Phi(x'_1, x'_2, \lambda)$ sont bornées.

Donc, d'après le théorème de M. Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe $\int$ pour les fonctions bornées, on a:

$$\lim_{\substack{x'_1 \to x_1 \\ x'_2 \to x_2}} \psi(x'_1, x'_2, \lambda_1, \lambda_2) = \psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. Pour toute fonction mesurable $f(x)$ [1]), finie sur une épaisseur pleine, nous pouvons donc déterminer une suite de fonctions continues: $f_n(x) = \psi\left(x, x+\frac{1}{n}, \lambda_1, \lambda_2\right)$.

Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $f(x)$, si $f(x)$ est approximativement continue du côté droit, c.-à.-d. si en tout point x_0, les fonctions

$$\operatorname*{mes}_{a}^{x} E\{f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \operatorname*{mes}_{a}^{x} E\{f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$$

possèdent une dérivée à droite égale à *un*, si petit que soit $\varepsilon > 0$.

Donc, si ε et ε' sont deux nombres positifs arbitrairement petits (ε' inférieur à λ_1 et $1-\lambda_2$), il existe un nombre $N(x_0, \varepsilon, \varepsilon')$ tel que l'inégalité $n > N$ entraîne:

$$\operatorname*{mes}_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} E\{f(x) > f(x_0) - \varepsilon\} > (1-\varepsilon')\frac{1}{n},$$

$$\operatorname*{mes}_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} E\{f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} > (1-\varepsilon')\frac{1}{n}.$$

On a aussi d'après les définitions de φ et de Φ:

$$\operatorname*{mes}_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} E\{f(x) > \varphi(x_1, x_2, \lambda_1)\} \leqslant (1-\lambda_1)\frac{1}{n} < (1-\varepsilon')\frac{1}{n}$$

$$\operatorname*{mes}_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} E\{f(x) < \Phi(x_1, x_2, \lambda_2)\} \leqslant \frac{\lambda_2}{n} < \frac{1-\varepsilon'}{n}.$$

Donc

$$f(x_0) - \varepsilon < \varphi(x_1, x_2, \lambda_1) \quad \text{et} \quad f(x_0) + \varepsilon > \Phi(x_1, x_2, \lambda_2),$$

d'où:

$$f(x_0) - \varepsilon < f_n(x) = \psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) < f(x_0) + \varepsilon$$

$f_n(x)$ tend, par suite, vers $f(x)$, si n croît indéfiniment.

Ceci a lieu, en particulier, si $f(x)$ est approximativement continue de deux côtés.

Si $f(x)$ est seulement à prépondérance de continuité du côté droit (ou de deux côtés), c.-à.-d. si les fonctions

$$\operatorname*{mes}_{a}^{x} E\{f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}, \quad \operatorname*{mes}_{a}^{x_0} E\{f(x) < f(x) - \varepsilon\}$$

[1]) Si $f(x)$ est définie dans un intervalle fini; nous lui attribuerons, pour définir $f_n(x)$, des valeurs quelconques finis (p. ex. le valeur 0) hors de cet intervalle.

ont au points x_0 leurs nombres dérivés à droite $> \frac{1}{2}$, il n'est pas permis de choisir λ_1, λ_2 d'une facon quelconque, indépendant de n, mais il faut poser $f_n(x) = \psi(x, x + \frac{1}{n}, \lambda_1(n), \lambda_2(n))$, où $\lambda_1(n), \lambda_2(n)$ tendent vers $\frac{1}{2}$, si n croît indéfiniment.

La démonstration de la convergence de la suite $f_n(x)$ se fait alors comme pour les fonctions approximativement continues.

5. En admettant la proposition démontrée par M. Denjoy[1]) que toute fonction approximativement continue, ou à prépondérance de continuité, prend dans un intervalle quelconque toute valeur entre son minimum et son maximum (dans cet intervalle)[2]), on peut former une autre suite de fonctions continues. En effet, dans ce cas, y étant une valeur quelconque entre le minimum et le maximum de $f(x)$ dans (x_1, x_2), l'ensemble $E\{y-\varepsilon < f(x) < y+\varepsilon\}$ a une mesure positive. De là résulte que $\varphi(x_1, x_2, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \lambda)$ pour toute valeur de λ, comprise entre 0 et 1. Donc, $\varphi = \Phi$ est une fonction continue de x_1, x_2 [3]).

On voit aisément que la suite de fonctions continues $f_n(x) = \varphi(x, x + \frac{1}{n}, \lambda)$ tend vers $f(x)$ (en prenant resp. pour λ un nombre quelconque compris entre 0 et 1, ou le nombre $\lambda = \frac{1}{2}$).

Enfin, pour les fonctions approximativement continues de deux côtés, ou seulement du côté droit, on peut encore procéder comme il suit. Soit d'abord $f(x)$ bornée; $f(x)$ est la dérivée à droite de son intégrale lebesguienne indéfinie $F(x)$[4]), donc la limite de la suite de fonctions continues $\dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n}$, où $h_n > 0$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$. (Il est à rémarquer que $\dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h} = \int\limits_0^1 \varphi(x, x+h, \lambda) d\lambda$, l'intégrale étant celle de Riemann. Cette égalité subsiste si f est

[1]) *Bull. Soc. Math.* 1915. p. 180, p. 184 (en note).

[2]) Cette proposition n'est pas exacte pour des fonctions approximativement continues ou à prépondérance de continuité d'un seul côté, p. ex. du côté droit; exemple: $f(x) = 0$ pour $x < 0$, et $f(x) = 1$ pour $x \geqslant 0$) Elle le devient, si l'on ajoute que $f(x)$ soit toujours une des limites de $f(x)$, si x tend vers x_0. en restant $< x_0$; moyennant cette supposition le raisonnement de § 5 s'applique aussi.

[3]) et aussi de λ. De là résulte que: $\varphi(x_1, x_2, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \lambda) = \lim\limits_{\substack{\lambda_1 \to \lambda \\ \lambda_2 \to \lambda}} \psi(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$

[4]) *Bull. Soc. Math.* 1915. p. 172.

sommable, sans être bornée, mais alors $\int_0^1$ est une intégrale de Riemann généralisée). Si $f(x)$ n'est pas bornée, nous considérons la fonction bornée et approximativement continue $g(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|}$; $g(x)$ est alors la limite de la suite des fonctions $g_n(x) = \frac{1}{n}\int_x^{x+h_n} g(x)dx$ et $f(x)$ celle de la suite $f_n(x) = \frac{g_n(x)}{1-|g_n(x)|}$.

II. Les dérivées approximatives et les nombres dérivés prépondérants.

6. Soit $F(x)$ une fonction continue de x. Il existe un nombre $\chi(x_1, x_2, \lambda)$ fini et un seul, satisfaisant aux conditions:

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\left\{\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} < \chi(x_1, x_2, \lambda)\right\} \leqslant \lambda(x_2 - x_1).$$

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\left\{\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} \leqslant \chi(x_1, x_2, \lambda)\right\} \geqslant \lambda(x_2 - x_1).$$

$\chi(x_1, x_2, \lambda)$ n'est pas autre chose que le nombre $\varphi(x_1, x_2, \lambda) = \Phi(x_1, x_2, \lambda)$ calculé pour la fonction $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$, continue pour $x_1 < x \leqslant x_2$.

On vérifie facilement que la fonction

$$\operatorname*{mes}_{x_1}^{x_2} E\left\{\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} < y\right\},$$

y étant un nombre quelconque, varie d'une façon continue avec x_1 et x_2. On en déduit que $\chi(x_1, x_2, \lambda)$ est une fonction continue de x_1, x_2.

Donc, les fonctions $f_n(x) = \chi\left(x, x+\frac{1}{n}, \lambda\right)$ constituent une suite de fonctions continues.

7. Comme au § 4, on démontre que $f_n(x)$ tend vers une limite $f(x)$.

1° Si $F(x)$ possède une dérivée approximative $f(x_0)$ pour les deux côtés, ou seulement pour le côté droit, c.-à-d. si la fonction

$\operatorname{mes}_a^x E\left\{\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x)\right|<\varepsilon\right\}$ possède au point x_0 une dérivée, ou seulement une dérivée à droite, égale à un, λ peut être choisi un nombre quelconque compris entre 0 et 1.

2° Si $F(x)$ possède un dérivé prépondérant bilatéral, ou seulement à droite, c.-à.-d. si la fonction

$$\operatorname{mes}_a^x E\left\{\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|<\varepsilon\right\}$$

possède au point x_0 ses dérivés extrêmes inférieurs, ou seulement son nombre dérivé inférieur à droite $> \frac{1}{2}$ [1]), dans ce cas λ doit être égal à $\frac{1}{2}$.

[1]) Il suffit même de supposer que

$$\operatorname{mes}_x^{x+h} E\left\{\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x)\right|<\varepsilon\right\}>\frac{h}{2},$$

si h est assez petit; ε désignant toujours un nombre positif arbitrairement petit.