Sur les nombres dérivés des fonctions.

Par

S. Saks (Varsovie).

1. Dans son „*Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions*[1]", M. Denjoy a demontré le théorème suivant:

une fonction continue étant donnée, ses quatre nombres dérivés satisfont sur une épaisseur pleine aux lois suivantes: deux nombres dérivés associés sont égaux s'ils sont finis, inégaux si l'un au moins est infini; deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux ou infinis et inégaux[2]).

Ce théorème a été généralisé par M^me^ G. C. Young aux fonctions mesurables, continues ou non[3]) Une partie en a subit récemment une nouvelle généralisation. C'est M. Banach qui a démontré que l'ensemble des points où une fonction quelconque admet deux nombres dérivés associés égaux et infinis, est de mesure nulle[4]).

Le but de cette Note est de compléter le résultat obtenu par M. Banach; je vais donner une démonstration à l'énoncé de MM. G. C. Young et A. Denjoy qui me semble plus simple

[1]) *Journal de Mathematiques* (7). t. I. 1915. p. 105.

[2]) Deux nombres dérivés sont dits, selon M. Denjoy, *associés*, s'ils sont propres aux mêmes côtés; ils sont considérés commes *opposés*, s'ils sont relatifs à des côtés et à des rangs différents. Cf. A. Denjoy *Sur les fonctions dérivées sommables*. Bull. Soc. Math. de France, t. 43 (1915) p. 162.

[3]) *Comptes Rendus*. 1917. Note du 13 mars 1916. La démonstration complète a été donnée dans le Mémoire de Mme Young: *Proc. Lond. Math. Soc.* (2). vol. 19. 1917 p. 360: Voir aussi: Hobson *The theory of functions of a real variable.* (Second Edition) vol. 1921. p. 370. Les raisonnents de Mme Young y sont reproduits avec quelques modifications.

[4]) *Comptes Rendus*, t. 163, V. aussi Fund. Math. t. IV p. 205.

et qui s'applique aux fonctions quelconques, même non mesurables[1])

2. Précisons d'abord les notions.

E désignant un ensemble contenu dans un intervalle (a, b), où la fonction $f(x)$ est bien déterminée, je désigne par $f_E(x)$ une fonction qui n'est considérée qu'aux points de E et qui y coïncide avec la fonction $f(x)$.

Pour désigner quatre nombres dérivés de $f(x)$ j'employerai la notation due à M^me^ Young: les symboles $f^+(x)$, $f^-(x)$, $f_+(x)$, $f_-(x)$ signifient resp. le dérivé supérieur droit, le dérivé supérieur gauche, le dérivé inférieur droit et le dérivé inférieur gauche.

3. Je commence par rappeler quelques théorèmes connus dont je ferai usage au cours de cet article:

Théorème L 1. E étant un ensemble quelconque et $f(x)$ désignant une fonction déterminée sur E et monotone, $f_E(x)$ admet presque partous dans E la dérivée unique et finie[2]).

Théorème L 2. Presque tous les points d'un ensemble E quelconque sont points de densité extérieure de E[3]).

Théorème Y.-S. $F(x)$ désignant une fonction quelconque, l'ensemble des points x, où $F^+(x) < F_-(x)$ ou $F^-(x) < F_+(x)$, est au plus dénombrable[4]).

4. **Lemme 1.** $f(x)$ *désignant une fonction quelconque, et* E *étant*

[1]) La propriété des fonctions d'être mesurables est essentielle dans les raisonnements des auteurs anglais (l. c.). En effet, on y a recours au théorème, bien connu, de M. Lusin sur la C-propriété des fonctions mesurables; or, MM. Sierpiński et Zygmund ont démontré récemment (*Fund. Math.* vol. IV, p. 318) que l'énoncé de M. Lusin ne se prête pas à être généralisé aux fonctions non mesurables.

[2]) Le théorème est du à M. Lebesgue (V. *Leçons sur l'intégration* 1904. p. 128. *Ann. de l'Ec. Norm.* (3), 27, 1910). Dans une Note de M. Rajchman et de moi (*Fund. Math.* t. IV. p. 204), nous en avons donné une démonstration élémentaire; on y trouvera aussi la bibliographie.

[3]) Le théorème est du à M. Lebesgue. Plusieurss démonstrations qui élémentaires s'appliquent aux ensembles quelconques, mesurables ou non, ont été données après; nous en citons celle de M. Sierpiński, publiée dans les „*Fundamenta*" (t. IV, p. 167). On y trouvera la bibliographie.

[4]) W. Sierpiński *Bull. Ac. Sc. de Cracovie* 1912, p. 850. Nous avons réproduit le raisonnement de M. Sierpiński dans la Note citée plus haut de M. Rajchman et de moi.

Une autre démonstration a été donnée indépendemment par M^me^ G. C. Young et publiée dans *Acta Math.* 1914. vol. 37. p. 144. On peut consulter aussi: Hobson op. cit. p. 369.

un ensemble de mesure extérieure non nulle et tel, que l'un des nombres dérivés supérieurs, p. ex. $f^+(x)$ (*resp.* $f^-(x)$), *y est différant de* $+\infty$, *il existe alors un sous-ensemble* E_1 *de* E *tel que:*

(*I*) $m_e(E_1) > 0$,

(*II*) $f_{E_1}(x)$ *admet aux points de* E_1 *la dérivée unique et finie* $f'_{E_1}(x)$,

(*III*) $x \varepsilon E_1$ *entraîne* $f_-(x) \geqslant f'_{E_1}(x)$ (*resp.* $f_+(x) \geqslant f'_{E_1}(x)$).

Démonstration: Considérons, pour fixer l'idée, le nombre dérivé $f^+(x)$. Soit $E_{n,m}$ ($m, n = 1, 2, \ldots$) l'ensemble des points x de E où

(1) l'inégalité $0 < h < \dfrac{b-a}{m}$, implique: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} < n$,

(a, b) désignant l'intervalle où la fonction $f(x)$ est considérée. $f^+(x)$ étant, par hypothèse, différant de $+\infty$ aux points de E, on a: $E = \sum\limits_{n, m=1}^{\infty} E_{n,m}$ et l'un au moins des ensembles $E_{n,m}$, soit p. ex. E_{n_0, m_0}, est de mesure extérieure non nulle.

Posons: $\varphi(x) = f(x) - n_0 x$.

Donc, en vertu de (1):

(2) les relations $x \varepsilon E_{n_0, m_0}$ et $0 < h < \dfrac{b-a}{m_0}$, impliquent:

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - n_0 < 0.$$

Divisons l'intervalle (a, b) en m_0 sous-intervalles égaux et n'empiétant pas: $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_0}$ et soit: $E_{n_0, m_0, k} = E_{n_0, m_0} \times \delta_k$. Or, $E_{n_0, m_0} = \sum\limits_{k=1}^{m_0} E_{n_0, m_0, k}$, donc l'un au moins des ensembles $E_{n_0, m_0, k}$, soit p. ex. E_{n_0, m_0, k_0}, est de mesure extérieure positive.

La fonction $f_{E_{n_0, m_0, k_0}}(x)$ est monotone (décroissante) sur E_{n_0, m_0, k_0}. En effet, les points x, y appartenant à $E_{n_0, m_0, k_0} \subset E_{n_0, m_0}$, leur distance est inférieure à $\dfrac{a-b}{m_0}$ c.-à.-d. à la longueur commune des intervalles δ_k, et d'après (2) l'inégalité $x < y$ entraîne $\varphi(y) - \varphi(x) < 0$ ou $\varphi(x) > \varphi(y)$.

Supprimons de E_{n_0, m_0, k_0} les points où $\varphi(x)$ n'admet pas la dérivée unique et finie, et ceux qui ne sont pas des points de densité extérieure. L'ensemble des points suprimés est, en vertu des théorèmes L 1, L 2, de mesure nulle. Soit E_1 l'ensemble des points restant. Sa mesure extérieure, étant égale à celle de E_{n_0, m_0, k_0}, est, par conséquent, positive. La fonction $\varphi_E(x)$, et à fortiori $f_{E_1}(x) = \varphi_{E_1}(x) + \eta_0 x$, admettent la dérivée unique et finie en tout point de E_1. E_1 satisfait donc aux conditions (I) et (II) de notre lemme. Nous allons prouver que la condition (III) est vérifiée aussi.

Soit ε_0 un nombre positif et x_0 un point de E_1. La condition (II) étant satisfaite et l'ensemble E_1 ne contenant que des points de densité extérieure, il existe un nombre positif $\eta < \dfrac{b-a}{m_0}$, tel que:

$$(3)\qquad x \varepsilon E_1 \text{ et } |x_0 - x| < \eta \text{ entraînent: } \frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0 - x} \geqslant \varphi'_{E_1}(x_0) - \varepsilon;$$

$$(4)\qquad |x_0 - x| < \eta \text{ implique: } \frac{m_e(E_1(x))}{|x_0 - x|} \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon},$$

$E_1(x)$ désignant la partie de E_1 contenue dans l'intervalle (x, x_0).

Soit x_1 un point du segment $(x_0 - \eta, \eta_0)$ déterminé d'une telle manière qu'il existe dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_1)$ des points de E_1 et que l'inégalité soit vérifiée:

$$(5)\qquad \varphi_-(x_0) \geqslant \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_1)}{x_0 - x_1} - \varepsilon.$$

Soit x_2 la borne supérieure des points de E_1 contenus dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_1)$. Il existe, évidemment, un point x_3 de E_1, tel que:

$$(6)\qquad x_0 - \eta < x_2 \leqslant x_3, \quad x_2 - x_3 \leqslant \varepsilon(x_0 - x_1).$$

On a, ce vertu de (2), η étant, par définition, inférieur à $\dfrac{b-a}{m_0}$, $\varphi(x_1) - \varphi(x_3) < 0$, donc d'après (5):

$$\varphi_-(x_0) \geqslant \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_3)}{x_0 - x_1} - \varepsilon.$$

ou:

$$(7)\qquad \varphi_-(x_0) \leqslant \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_3)}{x_0 - x_3} \cdot \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_1} - \varepsilon.$$

Or, $\varphi_{E_1}(x)$ étant décroissante sur E_1:

$$(8)\qquad \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_3)}{x_0 - x_3} < 0;$$

d'autre part, l'intervalle (x_2, x_1) ne contenant pas des points de

$E_1(x_2) \subset E_1$, on a:

$$m(E_1(x_2)) \leqslant x_0 - x_1, \quad \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} \geqslant \frac{m(E_1(x_2))}{x_0 - x_2},$$

et, en raison de (4) et (6):

$$(9) \qquad \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_1} = \frac{x_0 - x_2}{x_0 - x_1} + \frac{x_2 - x_3}{x_0 - x_1} \leqslant 1 + 2\varepsilon.$$

Donc, x_3 étant contenu par définition dans E_1, on déduit immédiatement de (3), (7), (8), (9):

$$\varphi_-(x_0) \geqslant [\varphi'_E(x_0) - \varepsilon](1 + 2\varepsilon) - \varepsilon.$$

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit le nombre ε positive, on en tire:

$$\varphi_-(x_0) \geqslant \varphi'_E(x_0), \quad \text{donc:} \quad f_-(x_0) \geqslant f'_E(x_0).$$

Notre assertion est donc démontrée.

Lemme 2. *$f(x)$ désignant une fonction quelconque, et E étant un ensemble de mesure extérieure non nulle et tel que l'un des nombres dérivés inférieurs, p. ex. $f_+(x)$ (resp. $f_-(x)$), y est différent de $-\infty$, il existe alors un sous-ensemble E_1 de E tel, que*

(I^{bis}) $m_e(E_1) > 0$,

(II^{bis}) $f_{E_1}(x)$ admet la dérivée unique et finie $f'_{E_1}(x)$ en tout point de E_1,

(III^{bis}) $x \varepsilon E_1$ entraîne $f^-(x) \leqslant f'_{E_1}(x)$, (resp. $f(x) \leqslant f'_{E_1}(x)$).

D é m o n s t r a t i o n: Soit p. ex. le nombre $f+(x)$ différent de $-\infty$ aux points de E. Posons: $F(x) = -f(x)$. E est donc l'ensemble des points où $F^+(x) = -f_+(x)$ est différent de $+\infty$. En vertu du lemme 1, existe donc un sous-ensemble E_1 de E tel que les conditions *(I)*, *(II)*, *(III)* de ce lemme sont satisfaites par E_1 et $F(x)$.

Or, $F_{E_1}(x) = -f_{E_1}(x)$, $F'_{E_1}(x) = -f'_{E_1}(x)$, $F_-(x) = -f^-(x)$, donc les conditions *(I)*, *(II)*, *(III)*, du lemme précédent étant vérifiées, la fonction $f(x)$ et l'ensemble E_1 satisfont en même temps aux conditions *(I^{bis})*, *(II^{bis})*, *(III^{bis})* du lemme à démontrer.

5. Les lemmes preliminaires établis, nous allons prouver les théorèmes qui fournissent ensemble l'énoncé de Mme G. C. Y o u n g et de M. A. D e n j o y (§ 1). généralisé aux fonctions quelconques.

Théorème 1. *E étant l'ensemble des points où une fonction $f(x)$ admet un nombre dérivé supérieur (resp. inférieur) différent de $+\infty$ (resp. $-\infty$), ce nombre dérivé et le dérivé opposé sont égaux et finis sur une pleine épaisseur de E.*

Démonstration: Soit, pour fixer l'idée, le nombre dérivé $f^+(x)$ différent de $+\infty$ en tout point de E. Désignons par H l'ensemble des points de E, où les dérivés $f^+(x), f_-(x)$ ne sont pas égaux, et par K celui des points de E, où l'un au moins de deux dérivés considérés est infini.

Il suffit de montrer que $m_e(H+K)=0$.

Considérons d'abord l'ensemble H et supposons que:

$$m_e(H)>0. \tag{10}$$

Il existe donc, en vertu du lemme 1 du § précédent, un sous-ensemble H_1 de H tel que:

$$m_e(H_1)>0, \tag{11}$$

et

$$f'_{H_1}(x) \leqslant f_-(x), \quad \text{si:} \quad x \varepsilon H_1, \tag{12}$$

$f'_{H_1}(x)$ existant et étant fini en chaque point de H_1.

Le nombre dérivé inférieur $f_-(x)$ est donc différent de ∞ en tout point de H_1. Il existe donc, d'après le lemme 2, un ensemble $H_2 \subset H_1$ tel que:

$$m_e(H_2)>0, \tag{13}$$

et

$$f'_{H_2}(x) \geqslant f^+(x) \tag{14}$$

aux points x de H_2.

Or, les dérivées $f'_{H_1}(x), f'_{H_2}(x)$ sont identiques en tout point de $H_2 \subset H_1$; d'autre part les deux dérivés opposés $f^+(x), f_-(x)$ sont, par hypothèse, différents, en tout point de $H \supset H_1 \supset H_2$. On conclut donc de (12) et (14) que

$$f_-(x) > f^+(x), \tag{15}$$

aux points de H_2.

Or, en vertu du théorème Y — S. du § 3 l'ensemble des points où l'inégalité (15) est vérifiée, et, à plus forte raison, l'ensemble H_2, sont au plus dénombrables. Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec (13). Par consequent, $m_e(H)=m(H)=0$.

Je dis, qu'aussi: $m_e(K-H)=0$.

Supposons, en effet, qu'au contraire:

$$m_e(K-H)>0. \tag{16}$$

Les nombres dérivés $f^+(x), f^-$ étant sur $H-K$ égaux et infinis, on a:

$$f^+(x)=f_-(x)=-\infty, \tag{17}$$

x appartenant à $K-H$.

D'après le lemme 2, il existe, par suite, un sous-ensemble, non vide, $K_1 \subset K - H$ tel qu'aux points de K_1 $f_-(x)$ est supérieur à $f'_{K_1}(x)$, donc différent de $-\infty$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction avec (17). Donc: $m_e(K-H) = m(K-H) = 0$.

Par suite: $m(K+H) = m(H) + m(K-H) = 0$.

On déduit aisément du théorème demontré l'énoncé cité plus haut (§ 1) et dû à M. Banach; à savoir:

Théorème 2. *L'ensemble des points où deux nombres dérivés associés sont égaux et infinis est de mesure nulle.*

Démonstration: soit E l'ensemble des points où p. ex.

$$f^+(x) = f_+(x) = +\infty. \tag{18}$$

Le nombre $f_+(x)$ y étant différent de $-\infty$, il est d'après le théorème précédent fini sur une épaisseur pleine E_1 de E. Or, en vertu de (18), $E_1 = 0$; d'autre part, $m(E - E_1) = 0$. Par suite:

$$m(E) = m(E_1) + m(E - E_1) = 0.$$

Théorème 3. *Deux nombres dérivés associés d'une fonction $f(x)$ étant finis en tout point d'un ensemble E, la fonction $f(x)$ y admet la dérivée unique sur une épaisseur pleine.*

Démonstration: Soient, p. ex. $f_+(x), f^+(x)$ les dérivés associés, finis aux points de E. D'après le théorème 1, les égalités suivantes sont vérifiées sur une épaisseur pleine de E:

$$f^+(x) = f_-(x), \quad f^-(x) = f_+(x). \tag{19}$$

Or, $f^+(x) \geqslant f_+(x), f^-(x) \geqslant f_-(x)$, on conclut, par suite, de (19) que: $f^+(x) = f_+(x) = f^-(x) = f_-(x)$, cette égalité étant réalisée sur une épaisseur pleine de E.

Notre assertion est donc démontrée.

6. On remarque aisément que la fonction $f(x)$ déterminée dans tout l'intervalle, peut être remplacée dans nos énoncés par $f_E(x)$ qui n'est considérée qu'aux points d'un ensemble E quelconque, même non mesurable.