Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

Posons, comme d'habitude,

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}.$$

I. **Théorème.** *Si la suite d'entiers $n_m (m = 1, 2 \ldots)$ remplit la condition suivante:*

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} > \lambda > 1,$$

alors, pour la série de Fourier de toute fonction à carré intégrable, S_{n_m} converge presque partout vers la fonction donnée.

Démonstration. Il est connu que σ_{n_m} converge presque partout vers la fonction donnée; il suffira donc de prouver que $S_{n_m} - \sigma_{n_m}$ converge presque partout vers zéro; il est aisé de voir, que ceci résulte de la convergence de la série suivante:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (S_{n_m} - \sigma_{n_m})^2 dx. \tag{1}$$

Considérons la somme d'indice p de la série (1). On aura

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{p} \int_0^{2\pi} (S_{n_m} - \sigma_{n_m})^2 dx = \sum_{m=1}^{m=p} \frac{1}{n_m^2} \sum_{k=1}^{k=n_m} k^2 (a_k^2 + b_k^2) = \tag{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n_p} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \left(\frac{1}{n_{m_k}^2} + \frac{1}{n_{m_k+1}^2} + \ldots + \frac{1}{n_p^2} \right);$$

les n_{m_k} sont déterminés par les inégalités suivantes:

$$n_{m_k-1} < k \leqq n_{m_k}.$$

On a évidemment

$$\frac{1}{n_{m_k}^2} + \frac{1}{n_{m_k+1}^2} + \ldots + \frac{1}{n_p^2} < \frac{1}{n_{m_k}^2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda^{2p}}\right) <$$
$$< \frac{1}{n_{m_k}^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \leqq \frac{1}{k^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$$

et, par conséquent, l'expression (2) est moindre que

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} \sum_{k=1}^{k=n_p} (a_k^2 + b_k^2).$$

Ceci entraîne la convergence de la série (1) et notre démonstration est achevée.

II. **Théorème.** *Si dans une série de Fourier-Lebesgue tous les termes sont nuls sauf ceux d'indice n_m, (les n_m remplissant l'inégalité-hypothèse du th. I) la série converge presque partout.*

Démonstration. Si l'on ne considère que des fonctions à carré intégrable, la proposition II est corollaire immédiat de I; mais le théorème reste vrai pour *toute fonction intégrable*. La suite σ_{n_m} converge presque partout; par conséquent on n'a qu'à considérer la différence

$$(3) \qquad | S_{n_{m-1}} - \sigma_{n_m} | \leqq \sum_{k=1}^{k=m-1} \frac{n_k}{n_m} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|).$$

Puisque $|a_{n_k}| + |b_{n_k}|$ tend vers zéro pour $k \to \infty$, et d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{k=m-1} \frac{n_k}{n_m} = \sum_{k=1}^{k=m-1} \frac{1}{\lambda^{m-k}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

on voit que la différence (3) tend vers zéro pour $k \to \infty$.

7. X. 1922.